INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

5 de janeiro de 2026 - Duração: 2h30

Guarde **todos os equipamentos eletrónicos**, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. **Não é permitido escrever no enunciado** para além do preenchimento do nome e do número de aluno. O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1c)**	**1d)**	**1e)i**	**1e)ii**	**2**	**3**
1.75	0.5	0.75	0.75	1.5	1	1.25	1	1.5

4a)	**4b)**	**4c)**	**5a)**	**5b)**	**5c)**	**6**	**7a)**	**7b)**	Total
0.75	1.5	1.5	1.75	1	0.5	1	0.75	1.25	20

Atenção: os dados relativos às questões **1.**, **4.** e **5.** encontram-se abaixo. No início da resolução de cada uma dessas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1+\alpha & 2 \\ \alpha & 2\alpha+1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Considere $U = \big\langle (1,1,0,1), (0,1,1,2), (-1,1,2,3) \big\rangle$, $w = (1,0,2,-1)$ e $b = (0,4,1,-1)$.

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

[7.5v] **1.** a) Classifique o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β.

Se $\alpha \neq -1, 2$ e β arbitrário $\Rightarrow$ PD
Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq -1$ $\Rightarrow$ IMP
Se $\alpha = -1$ e $\beta = -1$ $\Rightarrow$ PI
Se $\alpha = 2$ e $\beta \neq 2$ $\Rightarrow$ IMP
Se $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ $\Rightarrow$ PI

b) Indique os valores de α para os quais:

i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.
$\alpha \neq -1, 2$

ii) $\mathcal{C}(A)$ define um plano em $\mathbb{R}^3$.
$\alpha = -1$ ou $\alpha = 2$ ($\dim \mathcal{C}(A) = 2$)

c) Indique os valores de α e β para os quais $\langle v_1, v_2, v_3, b\rangle = \mathbb{R}^3$.
($\alpha \neq -1, 2$ e β arbitrário) ou ($\alpha = -1$ e $\beta \neq -1$) ou ($\alpha = 2$ e $\beta \neq 2$)

d) Considere $\alpha = 0$ e determine a inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e) No que se segue assuma $\alpha = 2$.

i) Considere $\beta = 2$ e escreva b como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 de duas formas distintas.
$b = (-4 + 4\,\alpha_3)v_1 + (2 - 2\,\alpha_3)v_2 + \alpha_3\, v_3$ com $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha_3 = 0$ (por exemplo) obtém-se $b = -4\,v_1 + 2\,v_2 + 0\,v_3$
Se $\alpha_3 = 1$ (por exemplo) tem-se $b = 0\,v_1 + 0\,v_2 + v_3$

ii) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de $\mathcal{C}(A)$.
Por exemplo, $\{v_1, v_2, b\}$ escolhendo um valor para $\beta \neq 2$.

[1v] **2.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(1, 0) = (1, 1, 1)$ e $T(0, 1) = (2, 3, 1)$.
Determine $T(x, y)$ para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$T(x, y) = (x + 2y, x + 3y, x + y)$.

[1.5v] **3.** Considere $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ e $V = \langle v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\rangle$. Justifique que $\dim V \leq 2$.

Designando $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_2 - v_3$ e $u_3 = v_3 - v_1$ e somando estes vetores obtém-se $u_1 + u_2 + u_3 = \vec{0}$. Daqui resulta a combinação linear $u_1 = -u_2 - u_3$ e portanto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores. Logo qualquer matriz em escada A' obtida a partir de $A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ por aplicação do método de eliminação de Gauss possui no máximo duas colunas com *pivot*. Como $V = \mathcal{C}(A)$, tem-se $\dim V = \dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$ e portanto $\dim V \leq 2$.

[3.75v] **4.** a) Mostre que $w \in U^{\perp}$.

Basta ver que os 3 geradores de U são ortogonais a w ou, em alternativa, que $w \in U^{\perp} = N(A^T)$ onde A é a matriz cujas colunas são esses 3 geradores.

b) Determine uma base ortogonal de U e indique a dimensão de U.

Por exemplo, $\{(1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)\}$, tendo-se $\dim U = 2$.

c) Calcule $\text{proj}_U(b)$ e indique a distância de b a U.

$\text{proj}_U(b) = (1, 1, 0, 1)$ e $d(b, U) = \|b - \text{proj}_U(b)\| = \sqrt{15}$.

[3.25v] **5.** a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

Os valores próprios de A são $-1, 1, 4$ todos com multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1.

b) Determine todos os vectores próprios de A associados a um valor próprio de A à sua escolha.

Os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$ (por exemplo), são os vetores **não nulos** do subespaço próprio $E(1) = \mathcal{N}(A - I)$, isto é, os vetores da forma $(-x_2, x_2, 0)$ com $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

c) Existirá uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $AP = PD$?

Sim, porque a multiplicidade algébrica de cada valor próprio de A coincide com a respetiva multiplicidade geométrica e a pergunta é equivalente a saber se A é diagonalizável.

[1v] **6.** Uma exploração agrícola dispõe de 100 hectares de terreno para produzir trigo, cevada e ervilha. Cada tipo de cultura requer quantidades distintas de trabalho e de água e ocupa uma área de terreno com limites mínimo e máximo. Por questões de rotação e fertilidade do solo, pelo menos 30% da área total ocupada pelas culturas deve estar afetada às leguminosas (ervilha). Os dados por hectare para cada tipo de cultura encontram-se na tabela seguinte:

Cultura	Lucro (€/ha)	Trabalho (h/ha)	Água (m^3/ha)	Área mínima (ha)	Área máxima (ha)
Trigo	450	9	1100	10	60
Cevada	400	7	900	5	50
Ervilha	300	6	600	0	40

A exploração dispõe de 800 horas de trabalho e 90000 m^3 de água. Pretende-se determinar a área a destinar a cada cultura respeitando as restrições anteriores por forma a maximizar o lucro. Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

Solução:

$$
\begin{array}{llcl}
\max & 450\,x + 400\,y + 300\,z & & \\
\text{s. a} & x + y + z & \leq & 100 \\
& -0.3\,x - 0.3\,y + 0.7\,z & \geq & 0 \\
& 9\,x + 7y + 6\,z & \leq & 800 \\
& 1100\,x + 900y + 600\,z & \leq & 90000 \\
& x & \geq & 10 \\
& x & \leq & 60 \\
& y & \geq & 5 \\
& y & \leq & 50 \\
& z & \leq & 40 \\
& x,\ y,\ z & \geq & 0
\end{array}
$$

em que x, y e z representam as áreas a destinar, em hectares, ao cultivo do trigo, cevada e ervilha, respectivamente.

[2v] **7.** Considere o seguinte problema em programação linear na forma *standard*, em que f_1, f_2 e f_3 são as variáveis de folga:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 - f_1 = 4 \\
& 2x_1 + x_2 + f_2 = 10 \\
& x_1 + f_3 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \geq 0.
\end{array}
$$

a) Indique uma formulação equivalente do problema em programação linear sem usar variáveis de folga.

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1,\ x_2,\ \geq 0.
\end{array}
$$

b) Justifique que $(x_1, x_2) = (4, 1)$ é uma solução admissível do problema da alínea anterior, indique a correspondente solução do problema na forma *standard* e averigue se essa solução é básica admissível.

A solução é admissível porque verifica todas as restrições funcionais e de sinal do problema formulado em a). A correspondente solução do problema na forma *standard* é $(x_1, x_2, f_1, f_2, f_3) = (4, 1, 1, 1, 0)$, que não corresponde a uma s.b.a. pois o número de componentes nulas deste vetor é inferior à diferença entre o número de variáveis contando com folgas (5) e número de restrições funcionais (3).