INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

19 de janeiro de 2026 - Duração: 2h30

Guarde **todos os equipamentos eletrónicos**, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
Não é permitido escrever no enunciado para além do preenchimento do nome e número de aluno e da **resposta à alínea 7a) que deve ser respondida no enunciado**.
O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1c)**	**1d)i**	**1d)ii**	**1d)iii**	**2**	**3**
1.75	0.5	0.75	1.25	1	1.25	0.75	0.75	1.5

4a)	**4b)**	**4c)**	**5a)**	**5b)i**	**5b)ii**	**6**	**7a)**	**7b)**	**7c)**	**Total**
1.5	1	1.25	0.75	1.5	1.25	1	1	0.5	0.75	20

Atenção: Os dados relativos às questões **1.**, **4.** e **5.** encontram-se abaixo. No início da resolução de cada uma dessas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ -1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 2\alpha+1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = (-1, 3, 1, 3)$.

5. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

v.s.f.f.

[7.25v] **1.** a) Classifique o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β.

Se $\alpha \neq -1, 1$ e β arbitrário $\Rightarrow$ PD
Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq -1$ $\Rightarrow$ IMP
Se $\alpha = -1$ e $\beta = -1$ $\Rightarrow$ PI
Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq -1$ $\Rightarrow$ IMP
Se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ $\Rightarrow$ PI

b) Indique os valores de α para os quais:

i) A é invertível.

A invertível se e só se $\mathrm{car}(A) = 3$ se e só se $\alpha \neq -1, 1$.

ii) $(2, 2, 0) \in \mathcal{N}(A)$.

$u = (2, 2, 0) \in \mathcal{N}(A)$ se e só se $Au = \vec{0}$ se e só se $\alpha = -1$.

c) Considere $\alpha = \beta = 2$ e escreva b como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

$b = 6v_1 - v_2 + 3\,v_3$.

d) No que se segue assuma $\alpha = 1$.

i) Descreva $\mathcal{C}(A)$ geometricamente.

$\mathcal{C}(A)$ define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetores diretores v_1 e v_2 e vetor normal $(-2, -1, 1)$.

ii) Justifique que $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Verifica as 3 condições do critério do slide 139...

iii) Indique uma base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.

Aplicando Gram-Schmidt à base da alínea anterior, por exemplo, obtém-se a base ortogonal $\{(1, 0, 2), (-2, 5, 1)\}$ (após multiplicar por 5 o segundo vetor da base obtida por G.-S.)

[0.75v] **2.** Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$. Indique a matriz canónica de T.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1.5v] **3.** Considere as matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ tais que AB é a matriz nula e um vetor $u \in \mathbb{R}^n$. Prove que se $u \in \mathcal{C}(B)$ então $u \in \mathcal{N}(A)$.

Por definição de $\mathcal{C}(B)$ existe $v \in \mathbb{R}^p$ tal que $u = Bv$. Logo $Au = A(Bv) = (AB)v = \vec{0}$, uma vez que AB é a matriz nula. Logo $u \in \mathcal{N}(A)$.

[3.75v] **4.** a) Determine uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)^\perp$.

Uma base para $\mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ é $\{(-2, 0, 1, 1)\}$ e a respetiva dimensão é um.

b) Calcule $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(b)$.

$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(b) = (-2, 0, 1, 1)$.

c) Determine o vetor de $\mathcal{C}(A)$ à menor distância de b e o valor dessa distância.

É a $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = b - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(b) = (1, 3, 0, 2)$, tendo-se $d(b, \mathcal{C}(A)) = \|\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(b)\| = \sqrt{6}$.

[3.5v] **5.** a) Determine o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais 0 é valor próprio de A.

0 é valor próprio de A se e só se $\det A = 0$ se e só se $\alpha = 0$.

b) No que se segue considere $\alpha = 1$.

i) Indique os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

Os valores próprios de A são $-1, 1, 2$ todos com multiplicidade algébrica 1.

ii) Indique um vetor próprio unitário de A e o correspondente valor próprio.

Por exemplo, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ associado ao valor próprio 1.

[1v] **6.** Uma central elétrica dispõe de três fontes distintas para a produção de energia: uma central térmica convencional, uma central a gás natural e um parque de produção eólico. O custo de produção por unidade de energia é de 6 € na central térmica, 4 € na central a gás natural e 5 € no parque eólico. Para que seja garantida a segurança e a estabilidade da rede elétrica, a central térmica deve produzir pelo menos mais duas unidades de energia que a central a gás natural e o parque eólico juntos e o parque eólico deve produzir pelo menos mais uma unidade de energia que a central a gás natural. A previsão da procura de energia e razões operacionais exigem que a produção total proveniente das três fontes seja não inferior a 30 unidades e não superior 40 unidades. Sabe-se ainda que as quantidades de energia produzidas pela central térmica, central a gás natural e parque eólico não podem exceder 20, 18 e 15 unidades, respetivamente. Pretende-se determinar a quantidade de energia a produzir por cada uma das três fontes respeitando as restrições anteriores, de modo a minimizar o custo total de produção.

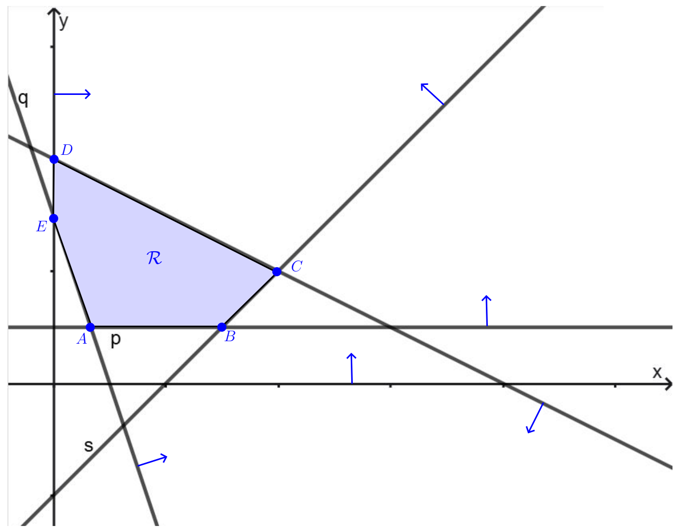
Formule o problema em termos de Programação Linear, atribuindo significado às variáveis de decisão.

$$
\begin{array}{lll}
\max & 6x + 4y + 5z & \\
\text{s. a} & x - y - z & \geq 2 \\
& -y + z & \geq 1 \\
& x + y + z & \geq 30 \\
& x + y + z & \leq 40 \\
& x & \leq 20 \\
& y & \leq 18 \\
& z & \leq 15 \\
& x,\ y,\ z & \geq 0
\end{array}
$$

em que x, y e z representam, respetivamente, o número de unidades de energia produzidas pela central térmica, central a gás e pelo parque eólico.

[2.25v] **7.** Considere o problema de programação linear $\mathcal{P}$ abaixo e a figura que o acompanha, onde se encontram representadas as retas de suporte, p, q, r e s, das restrições funcionais de $\mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & z = 5x + 4y & & \\
\text{s. a} & x + 2y & \leq & 8 \\
 & 3x + y & \geq & 3 \\
 & x - y & \leq & 2 \\
 & y & \geq & 1 \\
 & x, \quad y & \geq & 0.
\end{array}$$



a) Assinale a sombreado na figura a região admissível de $\mathcal{P}$, identificando os seus vértices.
Vértices de $\mathcal{R}$: $A = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$, $B = (3, 1)$, $C = (4, 2)$, $D = (0, 4)$ e $E = (0, 3)$.

b) Escreva $\mathcal{P}$ na forma *standard*.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & z = 5x & + & 4y & & & & & & & & & & \\
\text{s. a} & x & + & 2y & + & f_1 & & & & & & & = & 8 \\
 & 3x & + & y & & & - & f_2 & & & & & = & 3 \\
 & x & - & y & & & & & + & f_3 & & & = & 2 \\
 & & & y & & & & & & & - & f_4 & = & 1 \\
 & x, & & y, & & f_1, & & f_2, & & f_3, & & f_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

c) Identifique uma solução básica admissível do problema formulado em b).
Por exemplo, a s.b.a. $(4, 2, 0, 11, 0, 1)$ associada ao vértice C.