

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

16 de julho de 2026 - Duração: 2h30

Coloque **todos os equipamentos eletrônicos**, incluindo telemóveis, calculadoras, *smartwatches*, etc, na secretária do docente.

Não é permitido escrever no enunciado para além do preenchimento do número de aluno e do nome.

O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

Justifique todas as respostas. Respostas sem justificação poderão receber uma classificação muito reduzida ou nula.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número:

Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)i	1b)ii	1c)	1d)	1e)i	1e)ii	2	3a)	3b)
1.25	0.5	0.5	0.75	1.25	1.25	1.5	1.5	0.75	1.75

3c)	3d)	4a)	4b)	4c)	5	6a)	6b)	6c)	Total
1.25	0.75	0.5	1.75	1.25	1.25	0.5	0.5	1.25	20

Atenção: Os dados relativos às questões **1.**, **2.**, **3.**, **4.** e **6.** encontram-se abaixo. No início da resolução de cada uma dessas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = [u \mid v \mid w]$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Matriz A simétrica ($A^T = A$) e não invertível.

3. $V = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 0), (-1, 0, -2, 1) \rangle$, $u = (-2, -2, 2, 2)$ e $b = (1, 2, -2, 1)$.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. Problema de programação linear $\mathcal{P}$:

$$\begin{array}{llll} \max & 6x + 4y + 5z & & \\ \text{s. a} & x - y - z & \geq & 2 \\ & -y + z & \geq & 0 \\ & x + y + z & \geq & 30 \\ & x + y + z & \leq & 40 \\ & x, y, z & \geq & 0 \end{array}$$

- [7v] 1. a) Classifique o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β .
 b) Indique os valores de α para os quais:
 i) A é invertível.
 ii) $w \in \langle u, v \rangle$.
 c) Indique os valores de α e β para os quais $\langle u, v, w, b \rangle = \mathbb{R}^3$.
 d) Considere $\alpha = \beta = 2$ e escreva b como combinação linear de u , v e w de duas formas distintas.
 e) No que se segue assuma $\alpha = 2$.
 i) Determine $\mathcal{C}(A)$ e descreva-o geometricamente.
 ii) Justifique que $\{(1, 1, 5), (-2, -2, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.
- [1.5v] 2. Mostre que A admite um vetor próprio ortogonal a $\mathcal{C}(A)$, associado ao valor próprio nulo.
- [4.5v] 3. a) Justifique $u \in V^\perp$.
 b) Determine uma base ortogonal de V e indique a dimensão de V .
 c) Calcule a $\text{proj}_V(b)$.
 d) Determine o vetor de $V^\perp$ à menor distância de b e indique o valor dessa distância.
- [3.5v] 4. a) Justifique que v é vetor próprio de A e indique o correspondente valor próprio.
 b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
 c) Determine dois vetores próprios de A linearmente independentes.
- [1.25v] 5. Para rentabilizar uma floresta vão ser criadas zonas multiuso para recreio e produção de madeira e zonas de reserva natural apenas para recreio. A floresta tem 1600 ha de terreno de produtividade elevada e 2400 ha de terreno de produtividade baixa.
- As quantidades esperadas de produtos florestais (em cada ano de atividade) estão descritas na tabela abaixo.

	Terreno de produtividade elevada		Terreno de produtividade baixa	
	Zona multiusos	Reserva natural	Zona multiusos	Reserva natural
Madeira (m^3/ha)	35		12	
Sedimentos (m^3/ha)	1,2	0,6	0,6	0,3
Recreio (visitantes-dia/ha)	2,5	10	1,5	6

Pretende-se determinar a área a destinar às diferentes zonas de acordo com o tipo de terreno, de forma a maximizar a afluência anual associada ao recreio (em número de visitantes-dia), garantindo uma produção anual de pelo menos 14000 m^3 de madeira e não mais do que 2000 m^3 de sedimentos.

Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

- [2.25v] 6. a) Escreva $\mathcal{P}$ na forma *standard*.
 b) Mostre que $(21, 9, 10)$ é uma solução admissível de $\mathcal{P}$ e indique o correspondente valor da função objectivo.
 c) Averigue se a solução da alínea anterior corresponde a um vértice da região admissível de $\mathcal{P}$.