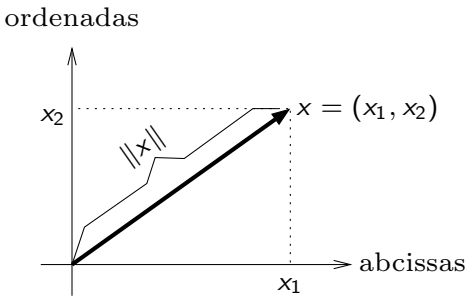
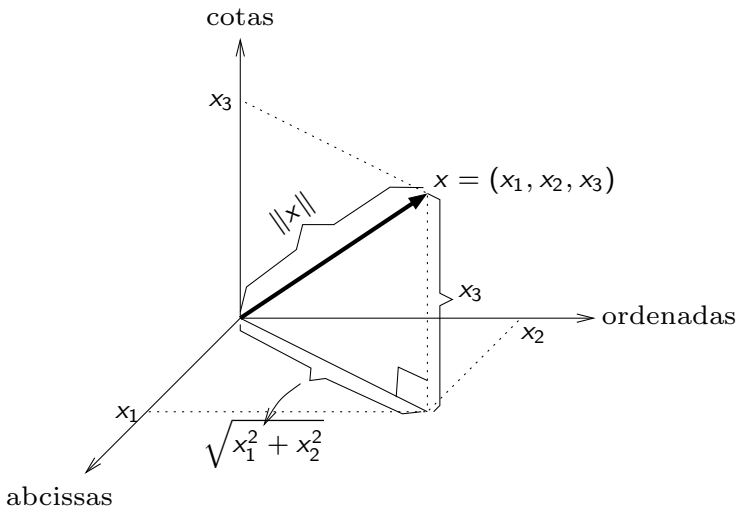
Recordatória: norma (comprimento) de um vetor do plano



$\|x\|$ representa a norma ou comprimento do vetor x, ou seja, a distância do vetor à origem. Pelo teorema de Pitágoras obtém-se,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^T x}$$

Norma de um vetor do espaço



Analogamente, tem-se pelo teorema de Pitágoras,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

Norma de um vetor de $\mathbb{R}^n$

Definição de norma (caso geral)

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se a sua norma (comprimento) por,

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$$

Ex.: $\|(4, 2, -1, 2)\| = \sqrt{(4, 2, -1, 2) \cdot (4, 2, -1, 2)} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 5.$

Propriedades da norma

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

1. $\|x\| \geq 0$.
2. $\|x\| = 0$ se e só se $x = \vec{0}$.
3. $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.
4. $\|x\|^2 = x \cdot x = x^T x$.

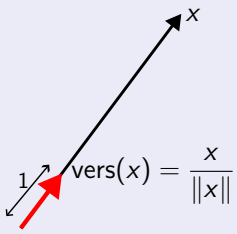
Dem (do ponto 3): $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x)^T \lambda x} = \sqrt{\lambda\, x^T \lambda\, x} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^T x} = |\lambda| \|x\|.$

Vetor unitário e versor

Definições de vetor unitário e versor

- $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se unitário se $\|x\| = 1$, isto é, se $x \cdot x = \|x\|^2 = 1$
- A cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$, associamos o **único** vetor unitário com a mesma direção e sentido que x, designado versor de x,

$$\text{vers}(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$



Por exemplo, $\text{vers}(3, 4) = \frac{(3,4)}{\|(3,4)\|} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Note-se que $\|\text{vers}(3, 4)\| = \|\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$

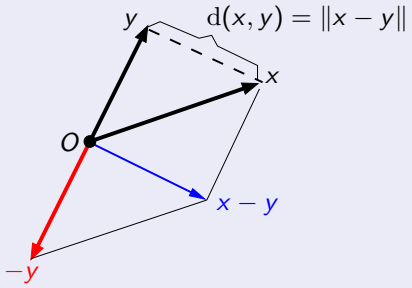
Distância (euclideana) entre vetores de $\mathbb{R}^n$

A partir da norma define-se a distância (euclideana) entre vetores de $\mathbb{R}^n$.

Definição de distância euclideana

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, define-se a distância entre x e y por,

$$\boxed{\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.}$$



Por exemplo,

$$\begin{aligned} d((1,3,2,1),(1,4,3,-1)) &= \|(1,3,2,1) - (1,4,3,-1)\| \\ &= \|(0,-1,-1,2)\| = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

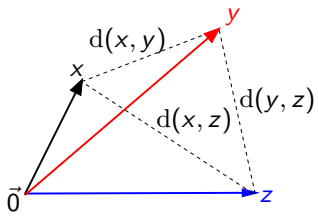
Propriedades da distância

Propriedades da distância

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, tem-se

1. $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$.
2. $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.
4. $\mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.

A propriedade 4. designa-se por desigualdade triangular e significa que o comprimento do lado de qualquer triângulo é inferior ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados.



A 3 primeiras propriedades significam que $d(x,y)$ define uma dissemelhança. Uma distância é uma dissemelhança que verifica a desigualdade triangular.

Ortogonalidade entre vetores

Vetores ortogonais

Dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^m$ dizem-se ortogonais, que se denota por $u \perp v$, se $u \cdot v = 0$, isto é, em notação matricial, se $u^T v = 0$.

Por exemplo, os vetores $u = (-4, 1, 2, 1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$v = (1, 1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são ortogonais pois

$$u \cdot v = u^T v = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0.$$

Ortogonalidade entre um vetor e um subespaço vetorial

Vetor ortogonal a um subespaço vetorial

Sejam $b \in \mathbb{R}^m$ e V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Diz-se que *b é ortogonal a V* e denota-se $b \perp V$ se b for ortogonal a todos os vetores de V isto é, se $b^T v = b \cdot v = 0$ para qualquer $v \in V$.

Vejamos um exemplo.

- Seja $V = \langle (1, 2, -1) \rangle$ a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com direção $u = (1, 2, -1)$. Vejamos que $b = (1, -1, -1) \perp V$. Comecemos por notar que $b \perp u$ pois $b \cdot u = 0$ (confirme). Como

$$V = \langle (1, 2, -1) \rangle = \{\alpha\, u \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

qualquer vetor $v \in V$ é da forma $v = \alpha\, u$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e obtém-se

$$b^T v = b^T (\alpha\, u) = \alpha\, b^T u = \alpha\, (b \cdot u) = \alpha\, 0 = 0.$$

Logo b é ortogonal a todo o vetor de V e portanto $b \perp V$.

Exemplo

Seja $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, com $v_1 = (1, 2, -1)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$.

Vejamos que $b = (1, -1, -1) \perp V$:

- Comecemos por notar que $b \perp v_1, v_2$ pois $b \cdot v_1 = 0$ e $b \cdot v_2 = 0$ (confirme).
- Como
$$V = \langle v_1, v_2 \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\},$$
qualquer vetor $v \in V$ é da forma $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e obtém-se
$$\begin{aligned} b^T v &= b^T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 b^T v_1 + \alpha_2 b^T v_2 \\ &= \alpha_1 (b \cdot v_1) + \alpha_2 (b \cdot v_2) = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo $b = (1, -1, -1)$ é ortogonal a todo o vetor de V e portanto $b \perp V$, o que significa que b é um vetor normal ao plano V. Em particular, V admite a equação cartesiana $x - y - z = 0$, o que pode ser confirmado calculando $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle$ com $A = [\, v_1 \quad v_2 \,]$, que fica como TPC...

Vetor ortogonal a um subespaço dado por geradores

Nos dois exemplos anteriores vimos que o vetor b era ortogonal ao subespaço vetorial V porque era ortogonal aos geradores de V. Tem-se um resultado análogo para um subespaço vetorial geral.

Teorema (resultado-chave)

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Tem-se:

$$u \perp V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \perp v_1 \\ \vdots \\ u \perp v_n \end{cases}$$

Como uma base de um subespaço vetorial constitui um conjunto de geradores desse espaço, deduz-se o imediatamente o seguinte resultado.

Corolário

Seja $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^m$.
Então $u \perp V$ se e só se for ortogonal aos vetores de uma base de V.

Demonstração do resultado-chave

Dem.: suponhamos que $u \perp V$. Então $u \perp v$ para todo o $v \in V$, tendo-se, em particular, $u \perp v_1, \ldots, u \perp v_n$, uma vez que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ pertencem a V.

Reciprocamente, suponhamos que $u \perp v_1, \ldots, u \perp v_n$ e seja $b \in V = \langle v_1 \ldots, v_n \rangle$. Então b é CL de $v_1, \ldots, v_n$ e portanto existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Daqui resulta que

$$\begin{aligned} u^T b &= u^T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = u^T(\alpha_1 v_1) + \cdots + u^T(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \cancel{u^T v_1} + \cdots + \alpha_n \cancel{u^T v_n} = 0, \end{aligned}$$

uma vez que $u^T v_i = 0$ para todo i. Logo $u \perp b$, para todo o $b \in V$, isto é, $u \perp V$. $\square$

Observação

Em Álgebra Linear é frequente que para provar que **todos** os vetores de um subespaço vetorial verificam uma certa propriedade seja **suficiente** provar a propriedade para um conjunto finito de geradores do subespaço.

Exemplo

Exercício

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,]$ e $b = (1, 1, 1, \alpha)$.

Determine os valores de α para os quais $b \perp \mathcal{C}(A)$.

Resolução: tem-se $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Logo pelo teorema-chave do slide 132 tem-se,

$$b \perp \mathcal{C}(A) \;\Leftrightarrow\; b \perp \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} b \perp v_1 \\ b \perp v_2 \\ b \perp v_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \cdot v_1 = 0 \\ b \cdot v_2 = 0 \\ b \cdot v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{(confirme!)}$$