Complemento ortogonal de um subespaço vetorial

Definição de complemento ortogonal

Seja V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Chama-se complemento ortogonal de V e denota-se por $V^\perp$, ao conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^m$ que são ortogonais a V, isto é,

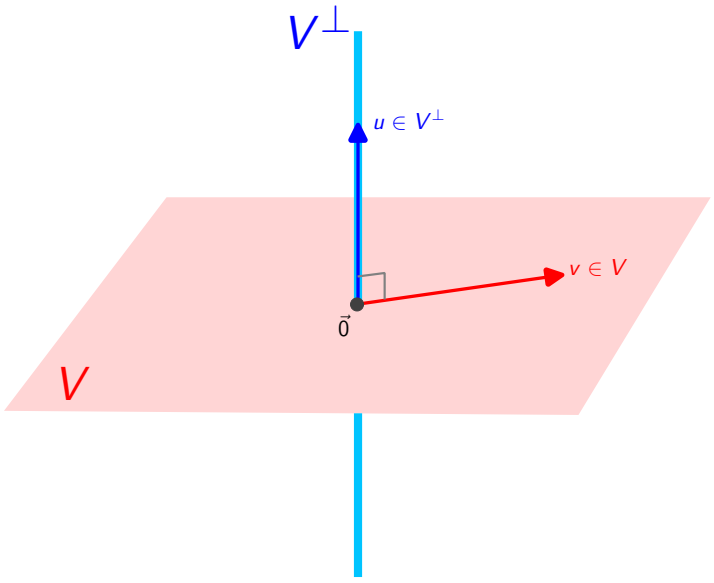
$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \,:\, x \perp V\} = \left\{x \in \mathbb{R}^m \,:\, x^T y = 0,\ \forall y \in V\right\}.$$

- Por definição de complemento ortogonal tem-se portanto,

$$\boxed{u \perp V \quad \Leftrightarrow \quad u \in V^\perp.}$$

Subespaço vetorial e o respetivo complemento ortogonal

- Os vetores de V e $V^\perp$ são ortogonais entre si.



Propriedades do complemento ortogonal

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então $V^\perp$ é também subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e tem-se:

- $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $(V^\perp)^\perp = V$.
- $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^m = m$.
- Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V e $\{w_1, \ldots, w_{m-n}\}$ é base de $V^\perp$, então

$$\{\underbrace{v_1, \ldots, v_n}_{\text{base de } V}, \underbrace{w_1, \ldots, w_{m-n}}_{\text{base de } V^\perp}\},$$

é uma **base** de $\mathbb{R}^m$.

- A relação $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$ significa que o vetor nulo é o **único** vetor que é ortogonal a si próprio.
- A relação $(V^\perp)^\perp = V$ significa que se $W = V^\perp$ então $W^\perp = V$.

TPC: utilizando a 3ª propriedade e as relações do slide 120, determine os complementos ortogonais dos subespaços maximal e minimal, $(\mathbb{R}^m)^\perp$ e $\{\vec{0}\}^\perp$.

Cálculo do complemento ortogonal - exemplo

Sejam $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$ e $A = [\, v_1 \quad v_2 \,]$.

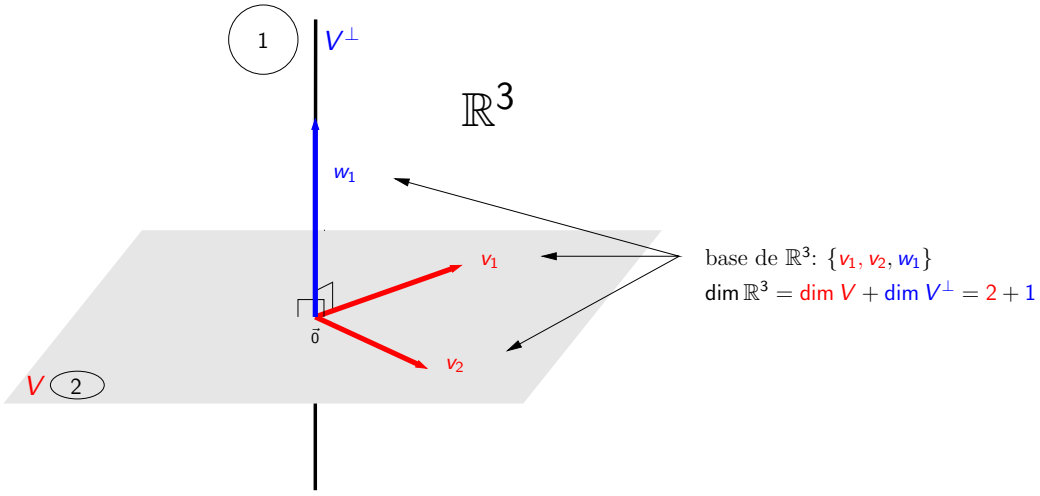
Vamos determinar $\mathcal{C}(A)^\perp = \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$. Ora,

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{C}(A)^\perp &\Leftrightarrow x \perp \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \perp v_1 \\ x \perp v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^T x = 0 \quad (v_1 \cdot x = 0) \\ v_2^T x = 0 \quad (v_2 \cdot x = 0) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}} \\
&\Leftrightarrow A^T x = \vec{0} \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(A^T).
\end{aligned}$$

Obtivemos portanto a relação fundamental, $\mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T) \overset{TPC}{=} \cdots = \langle (-1, 1, 1) \rangle$.

Interpretação geométrica

- $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ admite a base $\{v_1, v_2\}$ pois v_1 e v_2 geram V e o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é l.i. (v_1 e v_2 não são múltiplos entre si), tendo-se $\dim V = 2$ $\Rightarrow$ V é o **plano** de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetores diretores v_1 e v_2.
- $V^\perp = \langle w_1 \rangle$ com $w_1 = (-1, 1, 1)$, admite a base $\{w_1\}$ e $\dim V^\perp = 1$ $\Rightarrow$ $V^\perp$ é a **reta** de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor w_1.
- Pelas propriedades do complemento ortogonal do slide 137, $\mathbb{R}^3$ admite a base $\{v_1, v_2, w_1\}$, que é obtida reunindo as bases anteriores de V e $V^\perp$, tendo-se $\dim V + \dim V^\perp = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.



Resultados-chave-2

A relação $\mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ estabelecida no slide 138 pode ser generalizada para o espaço das colunas de uma matriz arbitrária A, tendo-se o seguinte.

Complemento ortogonal do espaço de colunas / espaço gerado

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m\times n} = [\, v_1 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$. Tem-se:

$$\mathcal{C}(A)^\perp = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle^\perp = \mathcal{N}(A^T).$$

Tem-se ainda a seguinte relação "dual", que resulta da relação anterior e da relação $(V^\perp)^\perp = V$ do slide 137. A relação dual permite determinar facilmente o complemento ortogonal de subespaços definidos por equações homogéneas.

Complemento ortogonal do espaço nulo

$$\mathcal{N}(A)^\perp = \left(\mathcal{C}(A^T)^\perp\right)^\perp = \mathcal{C}(A^T).$$

Mnemónica: complemento ortogonal dum subespaço vetorial associado a uma matriz, "troca" o espaço de colunas com o espaço nulo e transpõe essa matriz.