

Matemática II

Introdução à Aplicação

2013/2014

(F. Valente e M. Mesquita)

O que é o R?

- É um conjunto integrado de ferramentas computacionais que permitem a manipulação e análise de dados, o cálculo numérico e a produção de gráficos de qualidade.
- É uma linguagem de programação bem desenvolvida e simples (uma variante da linguagem S).
- É uma linguagem orientada por objectos:
 - as estruturas de dados manipuladas são armazenadas na memória activa do computador na forma de objectos, que têm um nome e aos quais se podem aplicar acções.

2

Instalar o R

- O R é uma aplicação de distribuição gratuita e de código público (<http://cran.r-project.org/>), existindo versões já compiladas para execução nos principais sistemas operativos (Windows, Linux e Macintosh).
- Depois de fazer o *download* da versão adequada ao sistema operativo do computador (por ex. R-3.0.2-win.exe, para o Windows), para instalar o R basta executar esse ficheiro.

3

Iniciar uma sessão de R

- Criar, na respectiva área de trabalho, uma nova pasta (por exemplo, Mat2) onde irão ser guardados os ficheiros de dados – pasta de trabalho.

- Iniciar o R:

Start → All Programs → R → R 3.0.2

(em alternativa, pode-se criar um atalho no desktop e alterar as suas propriedades de modo a iniciar a aplicação na pasta de trabalho)

4

RGui

- O R funciona fundamentalmente pelo modelo “pergunta-resposta”:
 - Os comandos introduzem-se a seguir à prompt (`>`) e são executados após pressionar Enter (`↵`)
- Edição de comandos:
 - Repetir comandos ou navegar entre comandos: `↑` ou `↓`
 - Percorrer a linha de comandos: `←` ou `→`
 - Colocar o cursor no início / fim da linha de comandos: Home / End
- Para terminar o R:
 - executar o comando `q()` ou fechar a janela da aplicação,

Comandos elementares

- Expressões aritméticas - são calculadas, o seu valor é impresso mas não é guardado.

```
> 2+3/4*7^2
[1] 38.75
> exp(-2)/log(sqrt(2))
[1] 0.3904951
```
- Atribuições - calcula o valor de uma expressão e guarda-o numa variável mas o resultado não é impresso.

```
> x <- 2 # <- é o operador de atribuição
> x
[1] 2
> x <- 2+3/4*7^2
> x
[1] 38.75
```

6

Designação das variáveis

- Os **nomes das variáveis** podem conter letras (maiúsculas são diferentes de minúsculas), algarismos e pontos. É recomendável que os nomes das variáveis comecem por uma letra.
- Alguns nomes são utilizados pelo sistema, pelo que devem ser evitados (por ex., `c`, `q`, `t`, `C`, `D`, `F`, `I`, `T`, `diff`, `df`, `pt`).

Exemplo: `Pb.ISA`

7

Script

- Os comandos podem ser escritos e guardados num ficheiro de texto para facilitar a sua utilização posterior. Estes ficheiros devem ter extensão `.R` e ser guardados na pasta de trabalho.

- Criar um novo ficheiro de *script*

File → *New script*

- Abrir um ficheiro de *script* existente

File → *Open script...*

8

Ajuda

- Para obter informação sobre uma função específica, por exemplo a função `sin()`, o comando é
 - `> help(sin)`
 - `> help("sin")`
 - `> ?sin`
 - Para pesquisar uma sequência de caracteres no help do R o comando é `help.search()`, por exemplo
 - `> help.search("solve system")`
 - Para navegar nas páginas de ajuda do R utilizando um browser de internet o comando é
 - `> help.start()`
- (qualquer um dos comandos anteriores pode também ser executado através do menu Help)

9

Objectos

- As entidades que o R cria e manipula e que ficam guardadas na memória do computador.
 - Para mostrar os objectos disponíveis,
 - `> ls()`
 - Para mostrar alguma informação sobre os objectos,
 - `> ls.str()`
 - Para remover objectos,
 - `> rm(objecto1, objeto2,...)`
 - Para remover todos os objectos,
 - `> rm(list=ls())`

10

Objectos (*Workspace*)

- A colecção de todos os objectos disponíveis numa sessão pode ser guardada num ficheiro com vista à sua utilização em futuras sessões de R.
 - No final de cada sessão é perguntado ao utilizador se quer guardar o *workspace*. Caso a resposta seja afirmativa, todos os objectos disponíveis em memória são guardados no ficheiro “.RData”, na pasta de trabalho actual, podendo ser carregados na próxima sessão de R.
 - Especificação da pasta de trabalho:
 - menu *File* → *Change dir...*
 - Importar um ficheiro de objectos (por exemplo o ficheiro “.RData”):
 - menu *File* → *Load Workspace...*

11

Exercício R1

- Importar os ficheiros de objectos
 - `DadosMeteo.RData`
 - `serras.RData`
 - `ExSlides_Desc.RData`
- Ver todos os objectos em memória.

12

Alguns objectos

- *Vector*
- *Matrix*
- *List*
- *Data Frame*
- *Function*

Nota: deve distinguir-se os objectos do R *vector* e *matrix* das entidades matemáticas vector e matriz. Esta distinção justifica-se por ser possível no R realizar certas operações que não estão definidas na Álgebra Linear. Por exemplo, enquanto no R é possível somar vectores com diferente número de componentes, na Matemática esta operação só está definida para vectores da mesma dimensão.

13

Vector

É uma colecção ordenada de elementos do mesmo tipo (valores numéricos, lógicos, alfanuméricos, ...).

Uma das maneiras de criar um vector no R é através da função `c()`.

```
> x <- c(5.4, -3.7, 11.2, 0.78, 21.6)
> x
[1] 5.40 -3.70 11.20 0.78 21.60
> y <- c(FALSE, TRUE, TRUE, TRUE, FALSE)
> y
[1] FALSE TRUE TRUE TRUE FALSE
> nomes <- c("Ana", "Paulo", "Zé")
> nomes
[1] "Ana" "Paulo" "Zé"
```

14

Vector

Um vector pode conter os símbolos especiais NA e NaN, que designam valor desconhecido e valor não numérico, respectivamente.

```
> y <- c(NA, 53, 31, 15, 62)
> sqrt(c(-1, 1, 2))
[1] NaN 1.000000 1.414214
Warning message:
NaNs produced in: sqrt(c(-1, 1, 2))
```

15

Vector

`c()` é a função de concatenação. Os argumentos desta função podem ser eles próprios *vectors*, pelo que `c(v1, v2)` devolve a concatenação de `v1` e `v2`. Esta função pode ter um qualquer número de argumentos.

```
> c(x, 0, x)
[1] 5.40 -3.70 11.20 0.78 21.60 0.00
5.40 -3.70 11.20 0.78 21.60
> nomes <- c(nomes, "Manel")
> nomes
[1] "Ana" "Paulo" "Zé" "Manel"
```

16

Vector numérico (operações aritméticas)

As operações são realizadas elemento a elemento.

Alguns operadores aritméticos: `+`, `-`, `*`, `/`, `^`

```
> v1 <- c(5, 7)
> v2 <- c(10, 11, 12, 13)
> 1/v1
[1] 0.2000000 0.1428571
> v1+v2 # o vector de menor dimensão é repetido
(total ou parcialmente) até ficar com o
mesmo número de elementos do maior
> v1*4 # cada componente de v1 é multiplicada por 4
> v1*v2
[1] 50 77 60 91
```

17

Vector numérico (algumas funções básicas)

`log`, `exp`, `sin`, `cos`, `tan`, `atan`, `sqrt`, `abs`, ...

`length(x)` devolve o número de elementos do vector `x`,

`sum(x)` devolve a soma dos elementos do vector `x`,

`prod(x)` devolve o produto dos elementos do vector `x`,

`cumsum(x)` devolve um vector cujos elementos são a soma acumulada dos elementos do vector `x`,

`cumprod(x)` devolve um vector cujos elementos são o produto acumulado dos elementos do vector `x`,

`sort(x)` devolve um vector com os elementos do vector `x` ordenados por ordem crescente,

`choose(n, k)` devolve o número de combinações nC_k

18

Exercício R2

- Crie o vector `notas` com as classificações que obteve nas UC do primeiro semestre.
- Determine a média aritmética das notas do primeiro semestre.
- Crie o vector `creditos` com os créditos correspondentes às UC da alínea a).
- Determine a média das notas do primeiro semestre, ponderadas pelos respectivos créditos.

Exercício R3

Indique uma instrução em R que permita calcular o factorial de 10.

19

Geração de sequências regulares

- O R permite gerar sequências de valores numéricos
- > `1:15` # é o vector `c(1,2,...,14,15)`
- > `15:1` # é o vector `c(15,14,...,2,1)`
- > `2*1:15` # é o vector `c(2,4,...,28,30)`
- > `(2*1):15` # é o vector `c(2,3,...,14,15)`
- > `seq(1,15)`
- > `seq(to=15,from=1)`
- > `seq(-5,-1,by=0.5)`
- [1] -5.0 -4.5 -4.0 -3.5 -3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0
- > `seq(length=9,from=-5,by=0.5)`
- > `rep(1:3,2)` # é o vector `c(1,2,3,1,2,3)`
- > `rep(1:3,each=2)` # é o vector `c(1,1,2,2,3,3)`

20

Exercício R4

Considere as folhas de exercícios de Estatística Descritiva (http://www.isa.utl.pt/dm/mat2AP/mat2AP/Exercicios_MatII_EstDesc.pdf).

Para os exercícios 1. e 2., crie vectores com as observações de cada um dos conjuntos de dados.

21

Indicadores numéricos no R

- `mean(x)` devolve a média dos elementos do vector `x`
- `median(x)` devolve a mediana dos elementos do vector `x`
- `quantile(x,probs=p)` devolve o quantil de ordem `p` dos elementos do vector `x`; por omissão `p=seq(0,1,0.25)`, isto é, devolve os extremos e os quartis de `x`
- `max(x)/min(x)` devolve o máximo/mínimo dos elementos do vector `x`
- `range(x)` devolve o vector `c(min(x),max(x))`
- `IQR(x)` devolve a amplitude inter-quartil dos elementos do vector `x`

22

Indicadores numéricos no R (cont.)

- `var(x)` devolve a variância dos elementos do vector `x`; é igual a $\text{sum}(x - \text{mean}(x))^2 / (\text{length}(x) - 1)$
- `sd(x)` devolve o desvio padrão dos elementos do vector `x`; é igual a `sqrt(var(x))`
- `summary` devolve os extremos, os quartis e a média do vector `x`

23

Exercício R5

Os vectores `precip`, `temp` e `vento` contêm dados para o ano de 2006 de precipitação (mm), temperatura do ar (°C) e velocidade do vento (ms⁻¹), respectivamente, medidos de 10 em 10 minutos numa estação meteorológica em Évora.

- Determine para cada vector o número total de elementos.
- Determine indicadores numéricos de localização e de dispersão para estes dados meteorológicos.

24

List

- ☐ Coleção ordenada de elementos que podem ser de tipos diferentes: vectores numéricos, vectores lógicos, matrizes, listas, funções, ...
 - ☐ As componentes de uma lista são numeradas e podem ter um nome associado a elas.
- ```
> estudante<-list(nr=12345,nome="José Silva",
+ notas=c(12,14,10,14,11))
```
- ☐ O resultado de muitas funções é uma lista.

25

## List (selecção de componentes)

- ☐ As componentes de uma lista são indexadas e podem ser referidas pelo seu índice, utilizando parêntesis rectos duplos; se tiverem nome, também podem ser referidas pelo nome.
- ```
> estudante[[2]]  
> estudante$nome
```

26

Data frame

- ☐ As *data frames* são casos especiais de listas (com formato de tabela).
- ```
> serras <- data.frame(nome=serras.nome,
+ altitude=serras.altitude)
> iris
> ?iris
> str(iris)
```

27

## Data frame (selecção de componentes)

- ☐ Os elementos de uma *data frame* podem ser referidos indicando a linha e a coluna:
- ```
> serras[4,1]  
> serras[,2]
```
- ☐ A notação `nomeDataFrame$nomeComponente` (como numa *list*) também pode ser usada:
- ```
> serras$nome
> serras[[1]]
```

28

## Data frame (função attach())

- ☐ As consultas a *data frames* podem ser simplificadas utilizando a função `attach()`
  - ☐ A função `attach()` permite aceder directamente às colunas de uma *data frame*, sem necessidade referir o nome da *data frame*.
- ```
> Species  
Error: object "Species" not found  
> attach(iris)  
> Species  
  
> detach(iris)  
> Species  
Error: object "Species" not found
```

29

Gráficos no R

- ☐ O R permite construir uma grande variedade de gráficos.
 - ☐ Os comandos para criar gráficos dividem-se fundamentalmente em dois grupos:
 - **funções gráficas de alto nível** (que permitem criar um novo gráfico);
 - **funções gráficas de baixo nível** (que permitem acrescentar informação a um gráfico existente).
 - ☐ A função `par` permite ver e modificar uma lista de parâmetros gráficos.
- ```
> par() # devolve a lista dos valores dos parâmetros
> ?par # informação sobre a função par
```

30

## Função gráfica: plot

- plot(*f*, *from*=*a*, *to*=*b*), com *f* uma função, traça o gráfico de *f* entre *a* e *b* (por omissão, *a*=0 e *b*=1):  
> **plot(sin)**  
> **plot(sin, -2\*pi, 2\*pi)**
- plot(*x*), com *x* um vector numérico, produz um diagrama dos valores de *x* versus o seu índice:  
> **plot(serras.altitude)**  
> **plot(sort(serras.altitude))**
- plot(*x*, *y*), com *x* e *y* vectores numéricos, produz um diagrama de pontos de *y* versus *x*:  
> **x<-seq(0.1, 100, 0.1)**  
> **fx<-sin(x)/x**  
> **plot(x, fx)**

31

## Função gráfica: plot (argumentos)

- Com a função `plot` podem ainda ser utilizados outros argumentos. O argumento `type` controla o tipo de gráfico produzido. O seu valor pode ser "p" (pontos) (valor por omissão), "l" (linhas), "b" (pontos ligados por linhas), "h" (linhas verticais dos pontos ao eixo das abcissas), "s" e "S" (função em escada).  
> **plot(serras.altitude, type="h")**  
> **plot(temp, type="l")**  
> **plot(x, fx, type="l")**

32

## Função gráfica: plot (argumentos)

- O título, sub-título e as legendas dos eixos num gráfico podem ser criados/alterados através dos argumentos `main`, `sub`, `xlab` e `ylab`, respectivamente. Os extremos dos eixos podem ser definidos com os argumentos `xlim` e `ylim`, cujos valores são vectores de duas componentes.  
> **plot(x, fx, type="l", main="Gráfico da função f(x)=sin(x)/x", xlab="x", ylab="f(x)")**
- Qualquer um dos argumentos da função `par` pode ser também utilizado como argumento da função `plot` para modificar as características do gráfico produzido.

33

## Visualização de vários gráficos

- As funções gráficas de alto nível criam, por omissão, um novo gráfico, apagando, se necessário, aquele que se encontra na janela gráfica.
  - Em alguns casos, a utilização do argumento `add=TRUE` permite sobrepor diferentes gráficos na mesma janela gráfica.  
> **plot(sin, -pi, pi)**  
> **plot(cos, -pi, pi, add=TRUE, col="red", lty=2)**
- Pode-se utilizar a função `par` para visualizar simultaneamente vários gráficos.  
> **op<-par(mfrow=c(2,1))**  
> **plot(sin, -pi, pi); plot(cos, -pi, pi)**  
> **par(op)** # recupera os valores iniciais dos parâmetros

34

## Funções gráficas de baixo nível

- Permitem acrescentar informação a um gráfico existente na janela gráfica:
  - as funções `points(x, y)` e `lines(x, y)` permitem acrescentar, respectivamente, pontos e pontos ligados por linhas;
  - a função `abline(a, b)` acrescenta uma recta de declive *b* e ordenada na origem *a*;
  - as funções `abline(v=x)` e `abline(h=y)` permitem adicionar rectas verticais (de abcissa *x*) e horizontais (de ordenada *y*), respectivamente;
  - a função `legend` permite acrescentar uma legenda ao gráfico.

35

## Funções gráficas de baixo nível (exemplo)

- > **plot(sin, -pi, pi)**  
> **plot(cos, -pi, pi, add=T, col="red", lty=2)**  
> **legend(-3, 1, c("sin", "cos"), col=c("black", "red"), lty=1:2)**  
> **abline(h=0, v=0)**

36

## Relembrando os exemplos 1 e 2

```
> sucesso
> ozono
```

37

## Representação gráfica no R

▣ No caso de dados de natureza qualitativa ou quantitativa discreta, a função `table(x)` devolve uma tabela com a frequência absoluta para cada um dos elementos distintos do vector `x`.

```
> table(sucesso)
```

▣ A função `plot(x)`, em que `x` é uma tabela de frequências obtida com a função `table`, cria um diagrama de barras com os dados de `x`.

```
> plot(table(sucesso))
```

▣ A função `hist(x)`, cria um histograma com os elementos do vector `x`.

```
> hist(ozono)
```

38

## A função `hist()`

▣ O parâmetro `breaks=x` da função `hist()` permite definir o número de rectângulos do histograma (por omissão, calculado pela regra de Sturges) em que :

- `x` é o número de classes em que se pretende agrupar os dados, ou
- `x` é um vector numérico com os limites das várias classes.

```
> hist(ozono, breaks=7)
> hist(ozono, breaks=seq(0, 12, 1.5))
> hist(ozono, breaks=seq(1, 13, 1.5))
> hist(ozono, breaks=seq(1, 13, 1.5), plot=F)
```

39

## Exercício R6

- Construa um histograma para os dados do vector `serras.altitude`.
- Ainda com os dados do vector `serras.altitude`, construa três novos histogramas: um com classes de amplitude de 100m, outro com classes de amplitude de 200m e outro também com classes de amplitude 200m mas cujo o primeiro intervalo de classe é ]100,300].
- Dos quatro histogramas anteriores, qual permite ter uma melhor representação gráfica da distribuição das altitudes das serras de Portugal Continental? Justifique.
- Apresente os quatro histogramas construídos nas alíneas anteriores na mesma janela gráfica (sugestão: utilize a função `par`).

40

## Caixa-de-bigodes no R

▣ Estes gráficos podem ser obtidos em R utilizando a função `boxplot()`.

```
> boxplot(serras.altitude)
```

41

## Exercício R7

- Construa um diagrama de barras com os dados do vector `sucesso` colocando um título e legendas nos eixos.
- Para os conjuntos de dados dos exemplos 1 e 2 (vectores `sucesso` e `ozono`), construa as respectivas caixas-de-bigodes. Analise os resultados obtidos, comparando-os com as representações gráficas efectuadas anteriormente.

42

## Leitura de ficheiros

Uma tabela de valores, registada num ficheiro de texto (ASCII), pode ser atribuída a uma *data frame*, através da função

```
read.table(ficheiro,header=FALSE,sep="",
 dec = ".",row.names, col.names, as.is = FALSE,
 na.strings = "NA")
```

em que,

**ficheiro** é o nome do ficheiro de dados; se este não se encontrar na pasta de trabalho, é necessário indicar o endereço completo (utilizando / ou \ como separador de pastas);

**header** é uma variável lógica que indica se o ficheiro tem ou não os nomes das variáveis na primeira linha. Por omissão o valor é FALSE;

**sep** é o carácter que separa os valores em cada linha; por omissão é " " que corresponde a um ou mais espaços em branco;

43

## Leitura de ficheiros (cont.)

**dec** é o carácter utilizado como separador decimal. Por omissão é o ponto;

**row.names** é um vector com os nomes das linhas. Por omissão 1, 2, 3, ...;

**col.names** é um vector com os nomes das colunas. Por omissão V1, V2, V3, ...;

**as.is** é uma variável lógica que controla a conversão das variáveis alfanuméricas em factores. Se o seu valor é TRUE a leitura mantém o tipo original dos dados;

**na.strings** é o valor usado para os dados desconhecidos no ficheiro e que será convertido em NA.

44

## Dados bivariados

### Indicadores numéricos

`cov(x, y)` devolve a covariância entre  $x$  e  $y$

`cor(x, y)` devolve o coeficiente de correlação de  $x$  e  $y$

### Regressão linear simples – método dos mínimos quadrados:

`lm(y~x)` devolve os coeficientes da recta de regressão de  $y$  sobre  $x$

### Exemplo:

```
> x<-c(20,50,30,100,70); y<-c(3,5,3,10,8)
```

```
> cov(x,y); cor(x,y)
```

```
[1] 98.5
```

```
[1] 0.9854435
```

```
> lm(y~x)
```

```
Coefficients:
```

```
(Intercept) x
 0.63592 0.09563
```

45

## Dados bivariados: representação gráfica

`plot(x, y)` ou `plot(y~x)`, com  $x$  e  $y$  vectores numéricos, produz um diagrama de dispersão (nuvem de pontos) de  $y$  versus  $x$

`abline(lm(y~x))` acrescenta ao diagrama de dispersão anterior, a recta de regressão dos mínimos quadrados de  $y$  sobre  $x$ .

### Exemplo:

```
> x<-c(20,50,30,100,70); y<-c(3,5,3,10,8)
```

```
> plot(y~x)
```

```
> abline(lm(y~x))
```

46