Análise Matemática

Cálculo diferencial, primitivas e cálculo integral de funções de uma variável

(Soluções)

Jorge Orestes Cerdeira, Isabel Martins, Ana Isabel Mesquita

Instituto Superior de Agronomia

- 2011 -

Capítulo 1

Complementos sobre derivadas

1.1 Regra de Cauchy

Exercícios 1

1. Calcule, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{6x^2-10x-4}$	**Solução**: $\frac{1}{14}$
b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x - 1}$	**Solução**: Não existe
c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x^5}}$	**Solução**: $+\infty$
d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3-5x+1}{\ln x}$	**Solução**: $+\infty$
e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x}$	**Solução**: -1

Exercícios 2

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$	**Solução**: $\frac{4}{9}$

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln x}$ **Solução**: 0

c) $\lim_{x\to 0} xe^{1/x}$ **Solução**: Não existe

d) $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x}$ **Solução**: 0

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right)$ **Solução**: $+\infty$

f) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$ **Solução**: 0

g) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/x}$ **Solução**: 0

h) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$ **Solução**: 1

i) $\lim_{x\to +\infty} (e^x + \ln \frac{1}{x})$ **Solução**: $+\infty$

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ **Solução**: 0

k) $\lim_{x\to 1} x^{\ln x}$ **Solução**: 1

l) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$ **Solução**: e^5

m) $\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$ **Solução**: 1

n) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ **Solução**: Não existe

o) $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x)$ **Solução**: 0

p) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ **Solução**: $-\frac{1}{2}$

q) $\lim_{x\to 0^+} (\ln^2 x)^x$ **Solução**: 1

2. Determine, caso existam, as assimptotas dos gráficos das seguintes funções.

a) $y = \frac{3x^2-5x+6}{2x-3}$

Solução: Vertical: $x = \frac{3}{2}$. Oblíqua à direita e à esquerda: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

Solução: Oblíqua à esquerda: $y = -x + \frac{1}{2}$. Oblíqua à direita: $y = x - \frac{1}{2}$.

c) $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$

Solução: Horizontal à direita: $y = 0$.

d) $y = 2x - \frac{1}{x}e^{1+\frac{3}{x}}$

Solução: Vertical: $x = 0$. Oblíqua à direita e à esquerda: $y = 2x$.

e) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 + e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Solução: Vertical: $x = 0$. Horizontal à esquerda: $y = 0$. Horizontal à direita: $y = 1$.

3. Identifique os maiores domínios de continuidade e derivabilidade das seguintes funções e defina as correspondentes derivadas de 1ª ordem.

a) $y = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$

Solução: f é contínua e derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln(x) & , \quad x > 0 \\ 2x & , \quad x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Solução: f é contínua e derivável em $\mathbb{R}$. $f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}} - 1 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Solução: f é contínua e derivável em $\mathbb{R}$. $f'(x) = \begin{cases} 4\,x^{-3}e^{-\frac{2}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

1.2 Fórmula de Taylor

Exercícios 3

1. Escreva os polinómios de Taylor de ordens 1, 2 e 3 de $f(x) = \ln x$ no ponto $a = 1$.

   Solução: $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$, $P_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$

2. Escreva o polinómio de MacLaurin de ordem 3 para cada uma das seguintes funções:

   a) $f(x) = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 3$

   Solução: $P_3(x) = 7 - 7x + 2x^2 + x^3$

   b) $f(x) = xe^x$

   Solução: $P_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$

   c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

   Solução: $P_3(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^3}{48}x^3$

   d) $f(x) = \cos x$

   Solução: $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

   e) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

   Solução: $P_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$

3. Use a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ como soma de potências de $x + 2$.

   Solução: $P(x) = -28 + 25(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3$

4. a) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 da função $\sqrt{x}$ no ponto $a = 1$.
   Solução: $P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$

   b) Utilize o polinómio da alínea anterior para indicar um valor aproximado de $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$. **Solução**: $\frac{23}{32}$

5. Seja $P_2(x)$ o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

   a) Explicite $P_2(x)$. **Solução**: $P_2(x) = 1 - 2x + 3x^2$

   b) Justifique que, para valores positivos de x, tem-se $P_2(x) > f(x)$.

6. Seja $f(x) = \sqrt{x+2}$.

   a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 1 de f.
   Solução: $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{8\sqrt{(c+2)^3}}x^2$ em que $c \in]0, x[$ para $x > 0$ e $c \in]x, 0[$ para $-2 \leq x < 0$

   b) Mostre que o gráfico de f está abaixo da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

7. Utilize a fórmula de Taylor para mostrar que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, para $x \in]0, \pi[$.

8. Seja $f(x) = 5\ln(1+x)$.

   a) Determine a equação de uma parábola que aproxime o gráfico $y = f(x)$ numa vizinhança de $x = 0$. **Solução**: $y = 5x - \dfrac{5}{2}x^2$

b) Justifique que o erro cometido ao aproximar o valor de $f(x)$ no ponto $x = 0.1$ através da parábola obtida na alínea a) é inferior a $\dfrac{5}{3}(0.1)^3$.

9. Considere a função $f(x) = 2\ln(\cos x)$.

   a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau que aproxima $f(x)$ para pontos próximos de 0.

   Solução: $P_2(x) = -x^2$

   b) Prove que o erro cometido pela aproximação definida em a) é inferior a $\frac{4}{3}x^3$ para $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$.

1.3 Complementos sobre estudo de funções

Exercícios 4

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

   a) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$ **Solução**: π

   b) $\text{arctg } 1 - \text{arctg }(-1)$ **Solução**: $\frac{\pi}{2}$

   c) $\arcsin(\sin \frac{5}{6}\pi)$ **Solução**: $\frac{\pi}{6}$

   d) $\cos(\arcsin 0.6)$ **Solução**: $\sqrt{0.64}$

   e) $\sin(2\arcsin 0.6)$ **Solução**: 0.96

   f) $\text{arctg }(\text{tg } \frac{\pi}{7})$ **Solução**: $\frac{\pi}{7}$

   g) $\sin(\arcsin 0.123)$. **Solução**: 0.123

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$:

   a) $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$ **Solução**: $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$

   b) $y = \frac{1}{2}\text{arctg } x^2$ **Solução**: $\frac{x}{1+x^4}$

   c) $y = x(\arcsin x)^2$. **Solução**: $\arcsin^2 x + \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Calcule:

   a) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } x\right)$ **Solução**: 1

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\text{arctg } x}$ **Solução**: 2

   c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{arctg } x}{1-\cos 2x}$ **Solução**: $+\infty$

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{arctg } x}{x^3}$ **Solução**: $\frac{1}{3}$

   e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x}{\sin^2 3x}$ **Solução**: $+\infty$

   f) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$. **Solução**: $\frac{2}{3}$

Exercícios 5

Estude as seguintes funções, indicando para cada uma delas o domínio, assimptotas, intervalos de monotonia e extremos, sentido da concavidade e pontos de inflexão. Esboce o gráfico de cada uma destas funções.

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
2. $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{5x+2}}$
3. $f(x) = x^2|2x-1|$
4. $f(x) = x\ln^2 x$
5. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$
6. $f(x) = x + \ln(x^2-1)$
7. $f(x) = e^{-x^2}$
8. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$
9. $f(x) = x - 2\,\text{arctg}\,(x-1)$
10. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} \text{arctg } \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Capítulo 2

Primitivação

Exercícios 6 Calcule

1. $P\,\dfrac{e^x}{1+e^x}$ **Solução**: $\ln(1+e^x)$
2. $P\,\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ **Solução**: $\operatorname{arctg} e^x$
3. $P\,\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ **Solução**: $2\sqrt{1+e^x}$
4. $P\,\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ **Solução**: $\arcsin e^x$
5. $P\,\dfrac{\cos x}{\sin x}$ **Solução**: $\ln|\sin x|$
6. $P\,\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ **Solução**: $-\operatorname{cosec} x$
7. $P\,\cos x \sin^2 x$ **Solução**: $\frac{1}{3}\sin^3 x$
8. $P\,\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$ **Solução**: $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}$
9. $P\,\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ **Solução**: $\operatorname{arctg}\,\ln x$
10. $P\,\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$. **Solução**: $\ln(1+\ln x)$

Exercícios 7

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. xe^x **Solução**: $e^x(x-1)$
2. $x\ln x$ **Solução**: $\frac{1}{4}(2x^2\ln x - x^2)$
3. $\operatorname{arctg} x$ **Solução**: $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
4. $x^2\sin x$ **Solução**: $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x$
5. $\ln(x^2+1)$. **Solução**: $2\operatorname{arctg} x + x(\ln(x^2+1)-2)$

Exercícios 8

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}^3}$ **Solução**: $2\text{arctg}\sqrt{x}$
2. $\sin(\ln x)$ **Solução**: $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$
3. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ **Solução**: $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})$
4. $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ **Solução**: $e^x - \ln(1+e^x)$
5. $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **Solução**: $-\sqrt{1-e^{2x}}$

Exercícios 9

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções racionais:

1. $\dfrac{1}{(x-4)^5}$ **Solução**: $-\frac{1}{4(x-4)^4}$
2. $\dfrac{x+16}{(x-1)^2}$ **Solução**: $\frac{17}{1-x} + \ln|x-1|$
3. $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$ **Solução**: $\frac{2}{1-x} + \ln|x|$
4. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$ **Solução**: $\frac{1}{x} + x + 2\ln|x-1| - \ln|x|$

Exercícios 10

1. Mostre que

a) $P \text{ arctg } x = x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

b) $P\ -\dfrac{x}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}} = \ln(\sqrt{4-x^2}+1)$

c) $P\,\dfrac{x}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b},$ com $a, b \in \mathbb{R}$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ **Solução**: $2e^{\sqrt{x}}$

b) $e^x \sin e^x$ **Solução**: $-\cos e^x$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ **Solução**: $\frac{1}{2}\arcsin x^2$

d) $\ln(\cos x)\ \operatorname{tg} x$ **Solução**: $-\frac{1}{2}\ln^2\cos x$

e) $x\sqrt{1-x^2}$ **Solução**: $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

f) $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ **Solução**: $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}$

g) $\dfrac{\sin x}{3-2\cos x}$ **Solução**: $\frac{1}{2}\ln|3-2\cos x|$

h) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ **Solução**: $\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$

i) $\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ **Solução**: $\operatorname{tg} x + \sec x$

j) $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ **Solução**: $\ln(e^x+1)$

k) $\dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$ **Solução**: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x}$

l) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ **Solução**: $2\sqrt{\ln x}$

m) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ **Solução**: $\frac{1}{2}\arcsin^2 x$

n) $(e^x+2)^2$ **Solução**: $\frac{1}{2}e^{2x}+4e^x+4x$

o) $\dfrac{x}{e^x}$ **Solução**: $-e^{-x}(x+1)$

p) $x\sec^2 x$ **Solução**: $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$

q) $\sqrt{x}\ln x$ **Solução**: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\ln x - \frac{2}{3})$

r) xe^{2x} **Solução**: $\frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2})$

s) $x \sin \frac{x}{2}$ **Solução**: $-2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}$

t) $\ln(x^3)$ **Solução**: $3x(\ln x - 1)$

u) $x\text{arctg } x$ **Solução**: $\frac{1}{2}x^2 \text{ arctg } x(x^2+1) - \frac{x}{2}$

v) $\cos(\ln x)$ **Solução**: $\frac{1}{2}x(\cos\ln x + \sin\ln x)$

x) $\dfrac{x^4}{1-x}$ **Solução**: $-(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x) - \ln|1-x|$

y) $\dfrac{1}{x^2+3x-10}$ **Solução**: $\frac{1}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{7}\ln|x+5|$

w) $\dfrac{x-3}{x^3+x^2}$ **Solução**: $\frac{3}{x} + 4\ln|x| - 4\ln|x+1|$

I) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$ **Solução**: $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$

II) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$ **Solução**: $3(\frac{x}{2}^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + \ln|x^{\frac{1}{3}}+1|)$

III) $\dfrac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}$ **Solução**: $-3e^x - e^{2x} + 3\ln|1-e^x|$

IV) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$ **Solução**: $\dfrac{\ln(\sqrt{e^x+1}-1)}{\ln(\sqrt{e^x+1}+1)}$

V) $\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}$ **Solução**: $\frac{2}{15}\sqrt{1+e^x}(8-4e^x+3e^{2x})$

VI) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **Solução**: $2\sqrt{x} + x + 2\ln|\sqrt{x}-1|$

VII) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ **Solução**: $2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|1+x^{\frac{1}{6}}|$

3. Determine a função f duas vezes derivável em $\mathbb{R}^+$ e que verifica as seguintes condições:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x}, \qquad f'(1) = -1 \qquad \text{e} \qquad \text{f}(1) = \frac{2}{\text{e}}.$$

Solução: $f(x) = -\ln|x| + e^{-x} + \frac{1}{e}x$

4. Uma população de bactérias cresce à taxa de $N'(t) = 2^t$ milhões de bactérias por hora, onde $N(t)$ denota o número de bactérias ao fim de t horas. Se $N(0)$=14 (milhões), determine uma expressão para $N(t)$ e calcule a dimensão da população ao fim de 2 horas.

   Solução: $N(t) = \dfrac{2^t}{\ln 2} + 14 - \dfrac{1}{\ln 2}$; 18328085 bactérias.

5. Após uma substância estranha ser introduzida no sangue de um dado animal, são produzidos anticorpos à taxa $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ milhares de anticorpos por minuto. Determine o número de anticorpos no sangue ao fim de 4 minutos, sabendo que no instante $t = 0$ não há anticorpos.

   Solução: 1417 anticorpos

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1 Integral definido

Exercícios 11 Calcule os seguintes integrais.

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{1}{2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$, com $\alpha \geq 0$. **Solução**: $\frac{1}{\alpha+1}$

3. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 - x^2\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{8}{3}\sqrt{2}$

4. $\displaystyle\int_1^2 (2x^5 - \frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{41}{2}$

5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2 - \pi)\,\mathrm{d}x$ **Solução**: 0

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 25}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{1}{2}(\ln 16 - \ln 21)$

7. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: 2

8. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, com $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x+4}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ **Solução**: $\frac{49}{12}$

9. $\displaystyle\int_0^1 x2^x\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}$

10. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{3}{2} + \pi$

11. $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{arctg}(e^x)\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $e \operatorname{arctg} e - \frac{1}{2}\ln(1+e^2) + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+4}\,\mathrm{d}x.$ **Solução**: $4\ln 5 - 4\ln(e+4) + e - 1$

Exercícios 12

1. Calcule a área das seguintes regiões:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2, \quad -x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ **Solução**: $\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$

   b) Determine a área da região definida pelos gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$.

      Solução: $2 + \frac{\pi^2}{4}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 1, \quad x^2 - 1 \le y \le \arccos x\}$ **Solução**: $\pi + \frac{4}{3}$

   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y \le 2, \quad y \ge x^2 - 4\}$ **Solução**: $\frac{44}{3}$

   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\sin x| \le y \le e^x, \quad 0 \le x \le 2\pi\}$. **Solução**: $e^{2\pi} - 5$

   f) Determine a área da região definida por $\{(x,y) : |\cos x| \le y \le x+1, x \le \pi\}$.

      Solução: $\frac{\pi^2}{2} + \pi - 2$

2. Calcule a área da região contida no semi-plano $x \ge 1$ e delimitada pelas curvas $y = x^2$, $x = y^2$ e $y = 4$.

Solução: $\frac{49}{3}$

3. Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ e pelas rectas $x = 0$ e $x = 2\pi$.

   Solução: $4\sqrt{2}$

4. Considere a região $A = \{(x, y) : \ y \geq x^2 \wedge y \leq 1\}$. Determine o número real K tal que a recta $y = K$ divida A em duas regiões de área igual.

   Solução: $K = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

Exercícios 13

1. Um insecto voa (num período limitado de tempo) com a velocidade $v(t) = 10+8t-t^2$ metros por segundo.

   a) Trace o gráfico de $v(t)$ e identifique geometricamente a distância percorrida pelo insecto durante os primeiros cinco segundos.

   b) Calcule essa distância.

      Solução: $\frac{325}{3}$ m

2. A taxa de variação diária da quantidade de água numa planta (em gramas por hora) é dada por $V'(t) = -0.041667t(24-t)+4$, em que t é o tempo em horas ($0 \leq t \leq 24$). Será que ao fim do dia a planta perdeu ou ganhou água?

   Solução: Perdeu (7.68×10^{-4} g de água em relação ao instante inicial).

3. O perfil de um dado solo revelou que a concentração de azoto (em g/m^3) é dada por $y = 673.8 - 34.7x$, em que $x \in [0, 10]$ é a profundidade do solo (em m). Calcule a concentração média de azoto no solo.

   Solução: 500.3 g/m^3

4. A população P (em milhões de pessoas) de um dado país é dada por $P = 67.38(1.026)^t$, em que t é o tempo em anos desde 1980. Qual é a população média entre 1980 e 1990?

   Solução: 76.817 milhões

5. Suponha que X mede o tempo (em horas) que um estudante demora a concluir uma prova de exame cuja duração é de duas horas, e que a função densidade de X é

$$f(x) = \frac{x^3}{4}, \ x \in [0, 2].$$

   a) Qual é a probabilidade de um estudante demorar entre 1.5 h e 2h a fazer o exame?

      Solução: 0.684

   b) Determine a tal que $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.5$. Interprete o parâmetro a no contexto do problema.

      Solução: $a = 1.6818$ horas; metade dos alunos concluiem o exame em $a = 1.6818$ ou menos horas.

6. Seja $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ para $x \geq 0$, a função densidade do tempo de espera (em minutos) de uma pessoa numa paragem de autocarros.

a) Qual é a probabilidade de o tempo de espera não exceder 5 min?

Solução: 0.212

b) Qual é a percentagem de pessoas que espera mais de 1/2 h?

Solução: 4.98%

7. Uma bola de ferro é atraída por um íman com um força $F = \frac{15}{x^2}$ N quando a bola está a x metros do íman.

   a) Calcule o trabalho realizado pela força quando a bola sofre um deslocamento de 4 m na mesma direcção e em sentido contrário aos da força, supondo que a bola e o íman se encontravam à distância de 2 m.

   Solução: -5 J

   b) Calcule a força média aplicada na bola na situação descrita em a).

   Solução: $\frac{5}{4}$

3.2 Integral indefinido

Exercícios 14

1. Determine uma expressão para $\displaystyle\int_0^x (te^t - te)\,\mathrm{d}t$ onde não figure o símbolo do integral.
   Solução: $1-\frac{e}{2}x^2 + e^x(x-1)+1$

2. Considere $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$. Represente graficamente a função $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

com $x \in [0,4]$.

3. Escreva a função $\displaystyle\int_{-2}^{x} t|t-1|\,\mathrm{d}t$ sem recurso ao símbolo do integral.

   Solução: $\displaystyle\int_{-2}^{x} t|t-1|\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{14}{3}, & x<1 \\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{13}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$

4. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} (3-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$.

   a) Mostre que F é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

   b) Indique uma equação da recta tangente ao gráfico de F em $x=0$.

   Solução: $y = 3x$

5. Considere $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, com $x>0$. Estude a monotonia de F e o sentido da concavidade do gráfico de F em $\mathbb{R}^+$.

   Solução: Estritamente crescente e concavidade virada para baixo em $\mathbb{R}^+$

6. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \int_{0}^{x} e^{-t}\,\mathrm{d}t}{e^{x^3}-1}$.

   Solução: 1

7. Seja T o tempo (em dias) ao fim do qual um animal doente se restabelece depois de ter sido submetido a um tratamento. A função densidade de probabilidade de T é

$$f(t) = ce^{-ct} \text{ com } t \geq 0, \text{e em que } c \text{ é uma constante positiva.}$$

   Considere $F(t) = \displaystyle\int_{0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \;\; t \geq 0$.

   a) Interprete F no contexto do problema. **Solução**: $F(t)$ é a probabilidade de um animal se restabelecer ao fim de t ou menos dias.

   b) Determine uma expressão para F em que não figure o símbolo do integral.
   Solução: $F(t) = 1 - e^{-ct}$

c) Calcule a probabilidade de um animal se restabelecer ao fim de dois a quatro dias após o tratamento. **Solução**: $1 - e^{-4c}$

3.3 Integral impróprio

Exercício 15 Prove a Proposição 3.11.

Exercícios 16 Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e, em caso de covergência, indique o seu valor.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{\pi}{4}$
2. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
3. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{\ln 2}{2}$
4. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
5. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2}$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{\pi}{2}$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{1}{2}$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: 2
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x.$ **Solução**: divergente

Exercício 17 Calcule a área da região ilimitada do 1º quadrante compreendida entre a curva $y = xe^{-x^2}$ e a sua assintota. **Solução**: $\frac{1}{2}$

Exercício 18 A taxa à qual as aves de uma dada região adoecem durante uma epidemia de gripe (em número de aves por dia) é dada por $R(t) = 1000te^{-0.5t}$, em que t é medido em dias desde o início da epidemia. Traduza através do integral impróprio o número total de aves atingidas e calcule o seu valor. **Solução**: $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1000te^{-0.5t}\,\mathrm{d}t = 4000$ aves

Exercícios 19 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: convergente
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+4}{e^x}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: convergente
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-|\sin x|}}{x}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
5. $\displaystyle\int_0^{1} \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: convergente
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
7. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: divergente
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(2-x)}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: convergente
9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x.$ **Solução**: divergente

Exercícios 20

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: $\frac{2}{15}$

b) $\displaystyle\int_1^3 |2-x|\,\mathrm{d}x$ **Solução**: 1

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ **Solução**: 1

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{1-e^{-x^2}}$ **Solução**: 1

2. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões.

   a) $\{(x,y): y \geq e^x, y \geq e^{-x}, y \leq 2\}$ **Solução**: $4\ln 2 - 2$

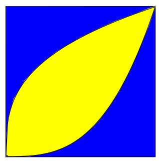
   b) $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, -e^x \leq y \leq x^2\}$ **Solução**: $e - \frac{2}{3}$

   c) $\{(x,y): y \geq (x-1)^2, y \leq 1-x^2\}$ **Solução**: $\frac{1}{3}$

   d) $\{(x,y): \ln x \leq y \leq e^x, y \geq -x+1, x \leq e\}$ **Solução**: $e^e - \frac{5}{2}$

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = x^3$, pela recta $y = 1$ e pela recta com declive -2 e que passa no ponto (-1,-1). **Solução**: 3

4. Um industrial de cerâmica pretende fabricar azulejos quadrados com duas cores, azul e amarelo, com o padrão ilustrado na figura ao lado. A região amarela é delimitada pelos gráficos das funções x^α e $x^{\frac{1}{\alpha}}$, com $\alpha > 1$. Determine α de forma que as duas cores ocupem áreas iguais.

   Solução: $\alpha = 3$

5. Determine uma expressão para a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \leq 0 \\ e^t - 1 & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

onde não figure o símbolo do integral.

Solução: $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ e^x - x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

6. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t+1}} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

a) Determine uma expressão para a função φ que não utilize o símbolo do integral.

Solução: $\varphi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

b) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. **Solução**: $2\sqrt{2} - 2 + \frac{\pi}{4}$

7. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ **Solução**: convergente

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$. **Solução**: convergente

8. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais impróprios.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x$ **Solução**: 4

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$. **Solução**: 1

9. Determine β que satisfaz $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-5|x|}\,\mathrm{d}x = 1$. **Solução**: $\beta = \dfrac{5}{2}$

10. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{se } t < 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

a) Calcule $F(1)$. **Solução**: $2 - e + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^2$

b) Determine $F'(x)$. **Solução**: $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

c) Para $g(x) = x^2$, identifique $(F(g(x)))'$.

Solução: $(F(g(x)))' = \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{1+x^4} 2x$

d) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) + c$. **Solução**: $\frac{3\pi^2}{32}$

11. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$. **Solução**: 1

b) Indique uma expressão para $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$, em que não figure o símbolo do integral.

Solução: $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \mathrm{arctg} x + 1 - \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

c) Calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$. **Solução**: $\frac{\pi}{4}$

d) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

$$\text{existe um par } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+, \text{ com } x_1 < x_2, \text{ tal que } \int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{dt} > \int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{dt}.$$

Solução: A função f é não negativa e, por isso, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$ é crescente. Assim, a afirmação é falsa.

12. Considere as funções $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $F(1)$ e $F'(1)$. **Solução**: $F(1) = \ln 2 + \frac{3}{2}$; $F'(1) = \frac{1}{2}$

b) Indique, justificando, a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$. **Solução**: *divergente*

c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

$$\text{existe um par } x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } F(x_1) = F(x_2).$$

Solução: A função f é contínua e, por isso, $F'(x) = f(x)$. Como f é positiva, F é estritamente crescente. Assim, a afirmação é falsa.

13. Considere a função $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$. **Solução**: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$. **Solução**: $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Prove que não existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

14. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_0^x |2-t|\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$.

a) Determine a expressão analítica de f.

Solução: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) Determine f'. **Solução**: $f'(x) = |2-x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$

c) Estude o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} |2-t|\,\mathrm{dt}$. **Solução**: Divergente

15. Considere a função $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{dt}$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Estude a monotonia e a variação de sinal da função G em $\mathbb{R}$.

Solução: G é estritamente crescente. $G(x) < 0$, para $x < 0$ e $G(x) > 0$, para $x > 0$.

b) Utilizando a fórmula de MacLaurin, mostre que $G(x) \geq \dfrac{x^3}{3} + x,\ \forall x > 0$.