

Análise Matemática I

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (SOLUÇÕES)

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

- 2011 -

1. Verifique que:

(a) $y = xe^x$ é solução de $y'' - 2y' + y = 0$

(b) $y = \sin x$ é solução de $y'' + 2y = \sin x$

(c) $y = t \int_0^t \sqrt{1+u^4} du$ é solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} ty' - y = t^2\sqrt{1+t^4}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Determine uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo a que $f(0) = \frac{1}{3}$ e que a recta tangente ao seu gráfico em $(t, f(t))$ tenha declive $2t+3f(t)$. **Solução:** $f(t) = -\frac{2}{3}(t+\frac{1}{3})+\frac{5}{9}e^{3t}$

3. Determine uma solução das equações diferenciais:

(a) $y' + \frac{3}{t}y = t, t > 0$ **Solução:** $y(t) = \frac{t^2}{5}$

(b) $ty' - y = \frac{t^2}{2} \sin t, t > 0$ **Solução:** $y(t) = -\frac{1}{2}t \cos t$

(c) $(t+1)y' = 2y - (1+t)^2, t > -1$ **Solução:** $y(t) = -(t+1)^2 \ln(t+1)$

(d) $y' + ty = 3t, \text{ em } \mathbb{R}$ **Solução:** $y(t) = 3$

(e) $5y' + y = 5e^t, \text{ em } \mathbb{R}$ **Solução:** $y(t) = \frac{5}{6}e^t$

(f) $y' = (t-4)e^{4t} + 2y, \text{ em } \mathbb{R}$. **Solução:** $y(t) = \frac{1}{2}e^{4t}(t - \frac{9}{2})$

4. Resolva as seguintes equações:

(a) $y' = 2(y-1)$ **Solução:** $y = 1 + Ke^{2t}$

(b) $y' = 2(y-1)y$ **Solução:** $(y-1)y \equiv 0 \vee |\frac{y-1}{y}| = e^{2x+K}$

(c) $(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0$ **Solução:** $y \equiv 0 \vee \ln|y| - y = -(\ln|x| + x) + K$

(d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ **Solução:** $y = \frac{K}{x}$

(e) $(1+t)y' - y = 0, t > -1$ **Solução:** $y = K(1+t)$

(f) $y' = \sec y$ **Solução:** $\sin y = x + K$

(g) $y' = \pi(1 + y^2)$ **Solução:** $\arctg y = \pi x + K$

(h) $y' + y^2 = 1$ **Solução:** $1 - y^2 \equiv 0 \vee \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = e^{2x+2K}$

(i) $\cos t \sin y \frac{dy}{dt} = \sin t \cos y$. **Solução:** $\cos y \equiv 0 \vee \ln |\cos y| = \ln |\cos t| + K$

5. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $\begin{cases} t^2 y^2 y' + 1 = y^3, t > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ **Solução:** $\frac{1}{3} \ln(y^3 - 1) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3} \ln 7 + 1$

(b) $\begin{cases} xy + e^{-x^2}(y^2 - 1)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **Solução:** $\frac{y^2}{2} - \ln |y| = -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1$

6. Determine o tempo necessário para um lago perder 10% da sua massa de poluentes existente no início de um dado ano, admitindo que a taxa de decrescimento da concentração de poluentes no lago verifica a equação

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{F}{V}c,$$

onde F designa o volume de água limpa que entra no lago por ano e V o volume do lago. **Solução:** $0.105 \frac{V}{F}$ anos

7. É sabido que para muitas substâncias medicamentosas administradas na corrente sanguínea, a taxa de decrescimento da *concentração* (i.e., da quantidade de substância por unidade de volume, usualmente em mg/l) é proporcional, em cada instante, à concentração. Seja α a constante de proporcionalidade.

(a) A administração da 1ª dose de uma dessas substâncias permite obter uma concentração inicial na corrente sanguínea de 30 mg/l. Resolva o problema de valores iniciais que traduz a evolução da concentração dessa substância após a administração da 1ª dose. **Solução:** $C(t) = 30e^{\alpha t}$

(b) A referida substância é eficaz se a sua concentração na corrente sanguínea é superior ou igual a 10 mg/l. Sabe-se que após 8 horas a seguir à administração da 1ª dose a substância deixa de ser eficaz.

i. Determine α . **Solução:** $\alpha = -\frac{\ln 3}{8}$

ii. Determine ao fim de quanto tempo a 3ª dose deve ser administrada.

Solução: 10.1 horas

8. Chama-se *tempo de semi-vida* de um elemento radioactivo ao tempo necessário para a sua massa se reduzir a metade. O Carbono 14 usado em datação de achados arqueológicos tem um tempo de semi-vida de 5730 anos. Determine a percentagem de Carbono 14 que se desintegra em 100 anos. Considere que a taxa de decaimento da massa de um elemento radioactivo num dado instante é proporcional à sua massa nesse instante. **Solução:** 1.20%

9. Se o crescimento de uma planta isolada num dado período é exponencial, a biomassa $W(t)$ tem uma taxa de crescimento semanal relativa constante, igual a $\mu > 0$.

(a) Estabeleça a equação diferencial que exprime o aumento de biomassa W .

Solução: $\frac{W'}{W} = \mu$

(b) Sabendo que a biomassa duplica em cada semana, calcule μ . **Solução:**

$$\mu = \ln 2$$

10. Os comprimentos de dois órgãos de um mesmo organismo verificam entre si uma correlação *alométrica* se existir uma constante de proporcionalidade $K \neq 1$ entre as respectivas taxas de crescimento relativas (verificam correlações alométricas os comprimentos do crânio e da coluna vertebral dos juvenis de muitas espécies de vertebrados). Considere os órgãos A e B cujos comprimentos verificam entre si uma

correlação alométrica e sejam $L_A(t)$ e $L_B(t)$ os comprimentos de A e B no instante t , respectivamente.

- (a) Sejam C_A e C_B os comprimentos dos órgãos A e B , respectivamente, no instante inicial. Indique o problema de valores iniciais que traduz a evolução dos comprimentos de A e B .

$$\text{Solução: } \begin{cases} \frac{L'_A}{L_A} = K \frac{L'_B}{L_B} \\ L_A(0) = C_A \\ L_B(0) = C_B \end{cases}$$

- (b) Mostre que se L_A e L_B satisfazem a equação $L_A = \alpha L_B^k$, com $\alpha > 0$, então L_A e L_B verificam entre si uma correlação alométrica.

11. Segundo uma lei de Newton, a taxa de arrefecimento de um objecto aquecido é proporcional, em cada instante t , à diferença entre a temperatura envolvente, suposta constante, e a temperatura desse objecto no instante t .

- (a) Estabeleça a equação diferencial que exprime a lei de arrefecimento segundo o modelo de Newton acima descrito.

Solução: $T'(t) = K(E - T(t))$, em que E é a temperatura envolvente, $T(t)$ é a temperatura do objecto no instante t e K é a constante de proporcionalidade.

- (b) Sabendo que um café à temperatura de $100^\circ C$, demorou 10min a arrefecer para os $80^\circ C$, numa sala a $20^\circ C$, determine o tempo necessário para o café atingir os $50^\circ C$. **Solução:** 34.09 min

12. A equação diferencial de Bernoulli tem a forma

$$\frac{dy}{dt} + f(t)y = g(t)y^\alpha.$$

- (a) Mostre que a mudança de variável $w = y^{1-\alpha}$, para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, transforma esta equação numa equação diferencial linear de primeira ordem.
- (b) Utilizando a alínea anterior resolva a equação

$$\frac{dy}{dt} + ty = ty^2.$$

Solução: $y = \frac{1}{1 + Ke^{t^2/2}}$ ($K \in \mathbb{R}$)

13. Pretende-se seguir a evolução do número de efectivos $N(t)$ de uma dada população. No instante inicial foram contabilizados 1×10^4 efectivos.

- (a) Indique o problema de valores iniciais que traduz a dinâmica desta população, admitindo que a respectiva taxa de crescimento *per capita*, r , se mantém constante ao longo do tempo. **Solução:** $\begin{cases} \frac{N'(t)}{N(t)} = r \\ N(0) = 1 \times 10^4 \end{cases}$

- (b) Sabendo que a população passou de 1×10^4 para 3.5×10^4 efectivos em 5 anos determine um valor aproximado (às duas casas decimais) para r . **Solução:** $r = 0.25$

- (c) Ajuste o problema de valores iniciais anterior admitindo que a população segue um crescimento logístico com a capacidade de sustentação do meio 3×10^5 .

Solução: $\begin{cases} \frac{1}{N(t)}N'(t) = r(1 - \frac{N(t)}{3 \times 10^5}) \\ N(0) = 1 \times 10^4 \end{cases}$

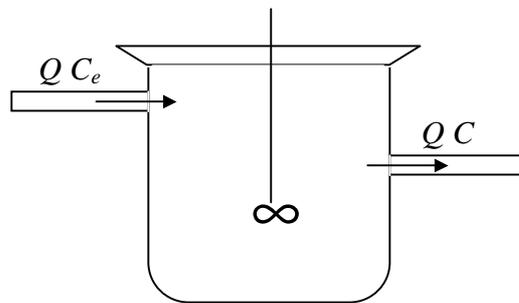
- (d) Determine a lei de crescimento da população $N(t)$. O que sucede à população quando $t \rightarrow +\infty$? **Solução:** $N(t) = \frac{3 \times 10^5}{1 + 29e^{-0.27t}}$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 3 \times 10^5 =$ capacidade de sustentação do meio.

14. Considere o problema $\frac{dy}{dt} = t - y$, com a condição inicial $y(-1) = 4$.

- (a) Resolva o problema analiticamente e represente graficamente a solução para t entre -1 e 4. **Solução:** $y = t - 1 + \frac{6}{e}e^{-t}$

(b) Resolva o problema numericamente, utilizando o método de Euler com passos 0.5, 0.25 e 0.1 e represente no mesmo gráfico da alínea anterior as soluções aproximadas. Compare os resultados obtidos. **Solução:** ver Anexo

15. Um tanque perfeitamente agitado é alimentado com uma corrente de caudal constante, Q . Esta consiste numa solução com concentração conhecida, C_e , num dado componente. O volume de líquido no tanque (V) é constante (o caudal de saída é igual ao de alimentação). Por se tratar de um tanque perfeitamente agitado, a concentração desse componente na corrente de saída, C , é igual à concentração em qualquer ponto do interior do tanque. A situação está ilustrada na figura



O balanço de massa ao tanque determina a igualdade entre a taxa de variação da quantidade do componente no interior do tanque ($V \frac{dC}{dt}$) e a diferença entre as respectivas taxas de entrada (QC_e) e de saída (QC). Obtém-se então a seguinte equação, cuja solução permite obter a evolução, ao longo do tempo t , da concentração à saída do tanque

$$V \frac{dC}{dt} = QC_e - QC.$$

Seja C_0 a concentração inicial (para $t = 0$) no interior do tanque.

- (a) Sabendo que a concentração à entrada do tanque é constante, determine a solução analítica do problema. **Solução:** $C(t) = C_e + (C_0 - C_e)e^{-\frac{Q}{V}t}$

Se $C_e = 50$ mg/l, $Q = 5$ l/min, $V = 100$ l e $C_0 = 10$ mg/l, represente graficamente a evolução da concentração à saída do tanque ao longo da primeira

hora. **Solução:** ver Anexo

- (b) Sabendo que a concentração à entrada do tanque varia sinusoidalmente com o tempo, de acordo com

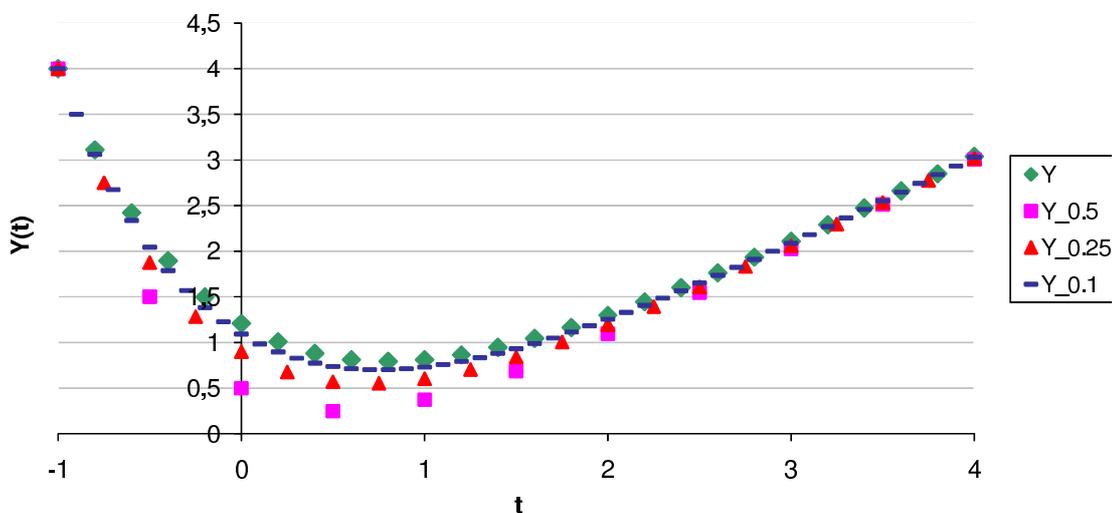
$$C_e = 50 + 20 \sin \frac{\pi t}{30},$$

utilize o método de Euler para determinar a evolução da concentração à saída do tanque ao longo das primeiras 4 horas de operação, mantendo-se as condições de Q , V e C_0 idênticas às da alínea anterior. **Solução:** ver Anexo

Anexo

t	Y(t)	t	Y0.5	t	Y0.25	t	Y0.1
-1	4	-1	4	-1	4	-1	4
-0,8	3,11238452	-0,5	1,5	-0,75	2,75	-0,9	3,5
-0,6	2,42192028	0	0,5	-0,5	1,875	-0,8	3,06
-0,4	1,89286982	0,5	0,25	-0,25	1,28125	-0,7	2,674
-0,2	1,49597378	1	0,375	0	0,898438	-0,6	2,3366
0	1,20727665	1,5	0,6875	0,25	0,673828	-0,5	2,04294
0,2	1,00716527	2	1,09375	0,5	0,567871	-0,4	1,788646
0,4	0,87958178	2,5	1,546875	0,75	0,550903	-0,3	1,569781
0,6	0,81137911	3	2,023438	1	0,600677	-0,2	1,382803
0,8	0,79179333	3,5	2,511719	1,25	0,700508	-0,1	1,224523
1	0,8120117	4	3,005859	1,5	0,837881	0	1,092071
1,2	0,86481895			1,75	1,003411	0,1	0,982864
1,4	0,94430772			2	1,190058	0,2	0,894577
1,6	1,04564147			2,25	1,392544	0,3	0,825119
1,8	1,16486038			2,5	1,606908	0,4	0,772608
2	1,29872241			2,75	1,830181	0,5	0,735347
2,2	1,44457322			3	2,060136	0,6	0,711812
2,4	1,60023962			3,25	2,295102	0,7	0,700631
2,6	1,76394233			3,5	2,533826	0,8	0,700568

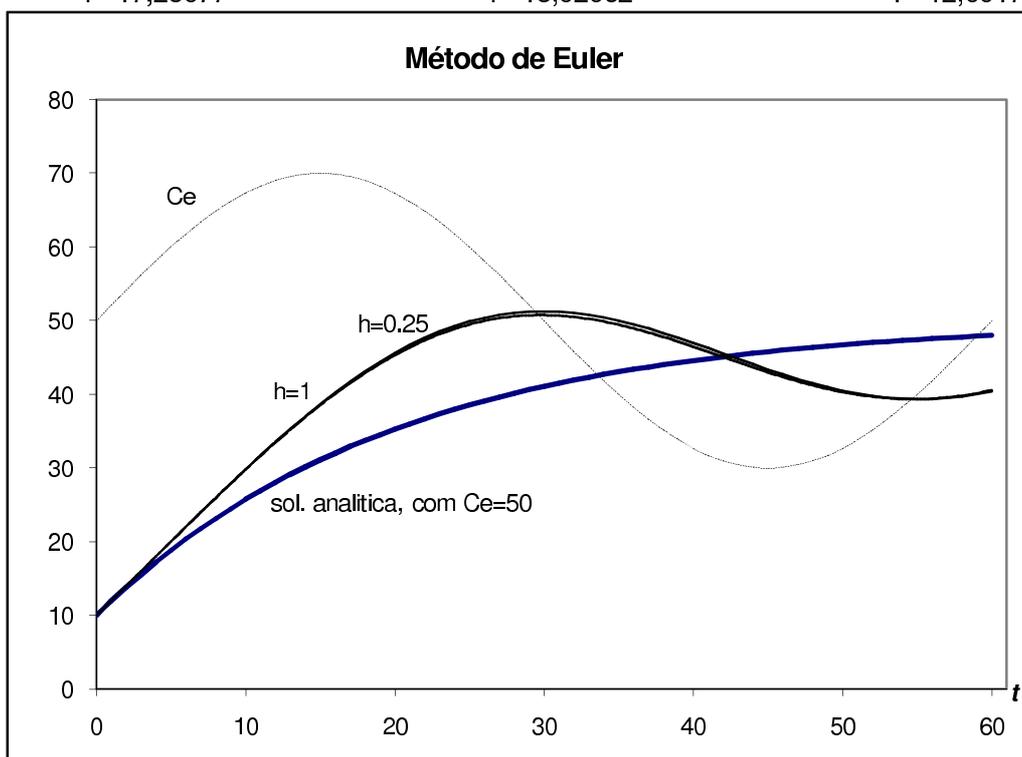
Exercícios 1, 14) Y e Y pelo método de Euler



						3,1	2,179817
						3,2	2,271835
						3,3	2,364652
						3,4	2,458186
						3,5	2,552368
						3,6	2,647131
						3,7	2,742418
						3,8	2,838176
						3,9	2,934359
						4	3,030923

Exercícios 1, 15. (a) e (b)

t	analítica	t	h=1	t	h=0.25
0	10	0	10	0	10
1	11,95082	1	12	0,25	10,5
2	13,8065	2	14,00453	0,5	11,00029
3	15,57168	3	16,01221	0,75	11,50087
4	17,25077	4	18,02062	1	12,00173



28	40,13612	28	51,05063	7	24,00161
29	40,61719	29	51,20601	7,25	24,49387
30	41,07479	30	51,25024	7,5	24,98478
31	41,51008	31	51,18773	7,75	25,47425
32	41,92414	32	51,02381	8	25,96217
33	42,318	33	50,76471	8,25	26,44843
34	42,69266	34	50,41746	8,5	26,93292
35	43,04904	35	49,98985	8,75	27,41555
36	43,38804	36	49,49036	9	27,89619
37	43,71051	37	48,92805	9,25	28,37474
38	44,01726	38	48,31252	9,5	28,85109
39	44,30904	39	47,65375	9,75	29,32512