

Matemática II

Fundamentos de Probabilidade: Revisões

2013/2014

(MJ Martins, F. Valente e M. Mesquita)

Probabilidade - motivação

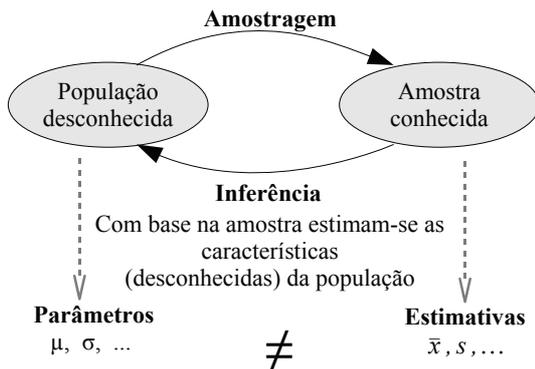
▣ **Objectivo:** caracterizar uma população (através de parâmetros de localização, dispersão, ...)

Não sendo possível estudar todos os elementos da população, recolhe-se uma **amostra aleatória**:

- i. Qualquer elemento da população deve ter igual oportunidade de ser incluído na amostra – **representatividade**.
- ii. A selecção de um elemento não deve influenciar a selecção de outro qualquer elemento - **independência**.

2

Probabilidade - motivação



3

Probabilidade - motivação

▣ O estudo da **probabilidade** permite quantificar a incerteza associada às estimativas, proporcionando ferramentas para desenvolver modelos matemáticos que ajudam a prever o comportamento de fenómenos nos quais interfere o acaso.

4

Experiência aleatória

▣ **Experiência aleatória:**

- O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antes da realização da experiência;
- tem intervenção do acaso, por isso o resultado (observação - ω) não se conhece antes da realização da experiência.

▣ **Espaço de resultados (Ω):** o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

5

Experiência aleatória

▣ **Exemplo:**

\mathcal{A} – lançar um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e observar o número da face voltada para cima

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \#\Omega = 6$$

\mathcal{B} – lançar dois dados (distinguíveis)

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 6)\} \quad \#\Omega = 36$$

\mathcal{C} – ensaiar uma lâmpada e observar o tempo (centenas de horas) que leva a fundir

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} = [0, +\infty[$$

6

Acontecimento

- ▣ **Acontecimento:** é uma colecção de resultados possíveis – é um subconjunto do espaço de resultados.
 - Os acontecimentos são os objectos aos quais se atribui probabilidade
- ▣ O **acontecimento** $A \subset \Omega$ **realiza-se** se o resultado da experiência aleatória for um elemento de A
 - \emptyset é o acontecimento impossível
 - Ω é o acontecimento certo

7

Acontecimentos

Exemplo (continuação) – Acontecimentos:

\mathcal{A} – ocorre face par

$$A = \{2, 4, 6\}$$

\mathcal{B} – ocorre soma par

$$B = \{(1, 1), (1, 3), \dots, (1, 5), \dots, (6, 6)\}$$

\mathcal{C} – lâmpada funde em menos de 2400h

$$C = [0, 24[$$

8

Álgebra de acontecimentos

- ▣ **A subacontecimento de B**, $A \subset B$: a realização de A implica a realização de B .
- ▣ **A união com B**, $A \cup B$: é o acontecimento que se realiza quando pelo menos um deles se realiza.
- ▣ **A intersecção com B**, $A \cap B$: é o acontecimento que se realiza quando ambos se realizam.
- ▣ **Diferença entre A e B**, $A - B$: é o acontecimento que se realiza quando A se realiza sem que se realize B ($A - B = A \cap \bar{B}$).
- ▣ **Complementar de A**, $\bar{A} = \Omega - A$: é o acontecimento que se realiza quando A não se realiza.

9

Álgebra de acontecimentos: Propriedades

- ▣ **Comutativa:** $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- ▣ **Associativa:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- ▣ **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ▣ **Leis de De Morgan:** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

10

Acontecimentos mutuamente exclusivos

- ▣ A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos se e só se a realização de um implica a não realização do outro, isto é,

$$A \cap B = \emptyset$$

- ▣ **Exemplo** (continuação):

\mathcal{A} – ocorre face par, $A_1 = \{2, 4, 6\}$
ocorre face ímpar, $A_2 = \{1, 3, 5\}$

11

Probabilidade

- ▣ Segundo **Laplace** (1812) – se numa experiência aleatória os resultados possíveis são igualmente prováveis, a probabilidade de um acontecimento A é

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados favoráveis a } A}{\text{n}^\circ \text{ de resultados possíveis}}$$

- ▣ **Exemplo** (continuação) – Probabilidade de acontecimentos

\mathcal{A} – ocorre face par $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

12

Probabilidade

B – ocorre soma par $B = \{(1,1), (1,3), \dots, (1,5), \dots, (6,6)\}$

		dado 1					
		1	2	3	4	5	6
dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

C – lâmpada funde em menos de 2400h $C = [0, 24[$
 $P(C) = ?$

13

Probabilidade freqüencista

▣ **Conceito freqüencista** (von Mises, 1919) – a probabilidade de um acontecimento é o limite da sua freqüência relativa num grande número de experiências.

Exemplo (continuação) – Probabilidade de acontecimentos

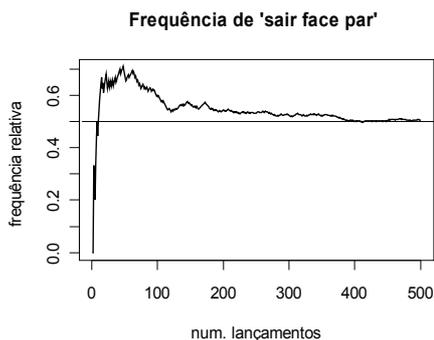
A – ocorre face par $A = \{2, 4, 6\}$ $P(A) = ?$

Lançar o dado “muitas” vezes, contar o número de vezes que ocorre A e calcular a freqüência relativa de A .

14

Probabilidade freqüencista

res	freq
1	3 0.0000000
2	5 0.0000000
3	4 0.3333333
4	3 0.2500000
5	5 0.2000000
6	6 0.3333333
7	2 0.4285714
8	2 0.5000000
9	3 0.4444444
10	2 0.5000000
50	5 0.6800000
51	5 0.6666667
100	6 0.6000000
101	3 0.5940594



15

Probabilidade: formulação axiomática

▣ Kolmogorov, 1933

▣ **Probabilidade de um acontecimento A , $P(A)$:** é um número real que verifica os axiomas

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B mutuamente exclusivos, i.e. se $A \cap B = \emptyset$

Destes axiomas decorrem as leis da probabilidade.

16

Leis básicas da probabilidade

A, B, C acontecimentos aleatórios

- 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 2) $P(\emptyset) = 0$
- 3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 4) $P(A) \leq 1$
- 5) $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- 6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 7) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

17

Leis básicas da probabilidade (Exemplo)

B – acontecimentos $B_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$B_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

$B_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$

$$P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (1,3)\}$$

$$= 6/36$$

Utilizando a lei 7: $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 3/36$,

$$P(B_1 \cap B_2) = 1/36, P(B_1 \cap B_3) = 2/36, \dots$$

18

Probabilidade condicional

- ▣ Probabilidade condicional de A dado B (ou “sabendo B ” ou “se B ”) é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se $P(B) > 0$.

Exemplo (continuação)

\mathcal{A} – acontecimentos $A_1 = \{2\} \rightarrow P(A_1) = 1/6$

$A_2 = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A_2) = 1/2$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

19

Probabilidade condicional

- ▣ Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{e também} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Portanto:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)} \quad (\text{Teorema de Bayes})$$

(necessita regra de cálculo interessante para denominador)

20

Acontecimentos independentes

- ▣ Pode acontecer que o condicionamento seja irrelevante

Exemplo (continuação)

\mathcal{A} – acontecimentos: $\{4, 5\} \rightarrow P(\{4, 5\}) = 1/3$

sair face par $\rightarrow P(\text{face par}) = 1/2$

sair face ímpar $\rightarrow P(\text{face ímpar}) = 1/2$

$$P(\{4, 5\} | \text{face par}) = \frac{P(\{4\})}{P(\{2, 4, 6\})} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

$$P(\{4, 5\} | \text{face ímpar}) = \frac{P(\{5\})}{P(\{3, 5, 7\})} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

21

Acontecimentos independentes

- ▣ O acontecimento $\{4, 5\}$ é independente de “sair face par” e também de “sair face ímpar”.

A é independente de B se $P(A|B) = P(A)$, $P(B) > 0$,

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(A) \times P(B)$$

mas então $P(B|A) = P(B)$, $P(A) > 0$,

portanto B também é independente de A .

Definição: Os acontecimentos A e B são independentes sse $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

22

Acontecimentos independentes

- ▣ Note-se que dois acontecimentos independentes não podem ser mutuamente exclusivos, a não ser que um deles tenha probabilidade nula (mostrar).

- ▣ A definição de independência pode ser alargada a qualquer conjunto de acontecimentos. Para n acontecimentos serem independentes não basta que sejam independentes 2 a 2.

Definição: Os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 são independentes sse são independentes 2 a 2 e

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$$

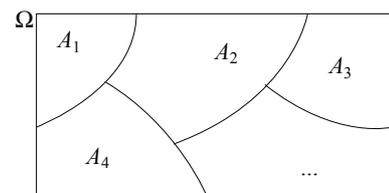
23

Partição

- ▣ **Definição:** A_1, A_2, \dots, A_n constituem uma partição do espaço de resultados Ω sse

– quaisquer dois acontecimentos A_i e A_j são mutuamente exclusivos e

$$- \Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$



24

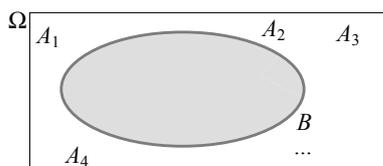
Partição

Seja A_1, A_2, \dots, A_n uma partição do espaço de resultados Ω , com $P(A_k) > 0$ ($k=1, \dots, n$) e B um acontecimento de Ω .

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$



25

Teorema da probabilidade total

Se os acontecimentos A_1, A_2, \dots, A_n constituem uma partição do espaço de resultados Ω , com $P(A_k) > 0$ ($k=1, \dots, n$), então para qualquer acontecimento B de Ω tem-se

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)$$

26

Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é uma consequência (*corolário*) do teorema da probabilidade total.

Teorema de Bayes

Se os acontecimentos A_1, A_2, \dots, A_n constituem uma partição do espaço de resultados Ω , com $P(A_k) > 0$ ($k=1, \dots, n$), então para qualquer acontecimento B tal que $P(B) > 0$, tem-se

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)}, \quad k=1, \dots, n$$

27

Bibliografia

- Murteira, B., Ribeiro, C.S., Silva, J.A. e Pimenta C. (2010). Introdução à Estatística. Escolar Editora.
- Neves, M. (2009) Introdução à Estatística e Probabilidade. Apontamentos de apoio às aulas. – Teoria da Probabilidade: www.isa.utl.pt/dm/estat/estat/seb2.pdf
- Pestana, D.D. e Velosa, S.F. (2002) Introdução à Probabilidade e à Estatística, vol.I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

28