INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA
Universidade de Lisboa

Departamento de Ciências e Engenharia de Biossistemas
Agrupamento de Matemática

Matemática II

Fundamentos de Probabilidade

2013/2014

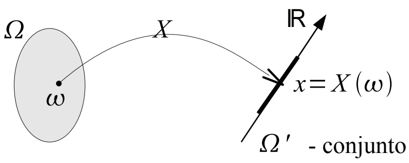
(MJ Martins, F. Valente e M. Mesquita)

Experiência aleatória

- **Experiência aleatória**:
  - O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antes da realização da experiência;
  - tem intervenção do acaso, por isso o resultado (observação - ω) não se conhece antes da realização da experiência.
- **Espaço de resultados** (Ω): o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Variáveis aleatórias

- **Variável aleatória** (v.a.) X **-** é uma função que associa um nº real x a cada resultado ω do espaço de resultados Ω de uma experiência aleatória.



- conjunto de valores possíveis para X (contradomínio)

Variáveis aleatórias

- X é v.a. **discreta** se Ω' é finito ou infinito numerável. Exemplo: nº de crianças que nasce em cada parto, nº de gralhas em cada página de um livro e em geral variáveis de "contagem".
- X é v.a. **contínua** se Ω' é um intervalo ou uma colecção de intervalos da recta real. Exemplo: resultados de "medições" como peso, altura.

Variáveis aleatórias

Exemplo – Variáveis aleatórias

X – v.a. que representa o número da face de cima no lançamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6

$\Omega' = \{1,2,3,4,5,6\}$ v.a. discreta

X – v.a. que representa a soma dos números das faces de cima no lançamento de dois dados

$\Omega' = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ v.a. discreta

X – v.a. que representa o tempo (em centenas de horas) que uma lâmpada leva a fundir

$\Omega' = \mathbb{R}_0^+$ v.a. contínua

Massa de probabilidade de uma v.a. discreta

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{cases}$$

$$p_i = P[X = x_i]$$

$$i)\ p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots$$

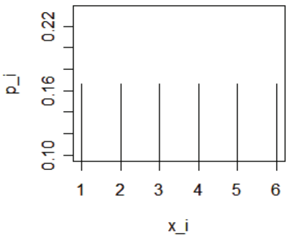
$$ii)\ \sum_{i=1} p_i = 1$$

Massa de probabilidade de uma v.a. discreta

Exemplo (continuação) – função massa de probabilidade

X – v.a. que representa o número da face de cima no lançamento de um dado

$$X=\begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{cases}$$



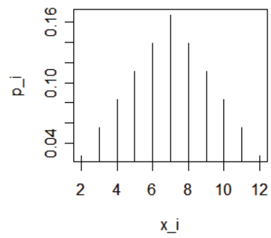
Massa de probabilidade de uma v.a. discreta

X – v.a. que representa a soma dos números das faces de cima no lançamento de dois dados

$$X=\begin{cases} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{cases}$$

dado 1

dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



Função densidade

- No terceiro exemplo, qual é

  $P[X=5.0000984]$? e $P[X=36]$?

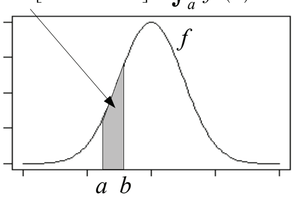
- Se X é uma v.a. contínua, $P[X=x]=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$
- **Função densidade** de uma v.a. contínua,

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$i)\ f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

$$P[a<X<b]=\int_a^b f(t)\,dt$$



Função distribuição cumulativa

- Definição de f.d.c.: $F:\ \mathbb{R}\to[0,1]$

  $x\to F_X(x)=P[X\leq x]$

– X v.a. discreta

$$F_X(x)=P[X\leq x]=\sum_{x_i\leq x} P[X=x_i]$$

– X v.a. contínua

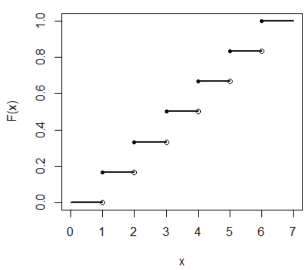
$$F_X(x)=P[X\leq x]=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Função distribuição cumulativa

- **Exemplo** (continuação) – f.d.c. v.a. discreta

X – v.a. que representa o número da face de cima

$$F(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x<1 \\ \frac{1}{6} & se \quad 1\leq x<2 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6} & se \quad 2\leq x<3 \\ \vdots & \\ 6\times\frac{1}{6}=1 & se \quad x\geq 6 \end{cases}$$



Função distribuição cumulativa

- **Exemplo** (continuação) – v.a. contínua

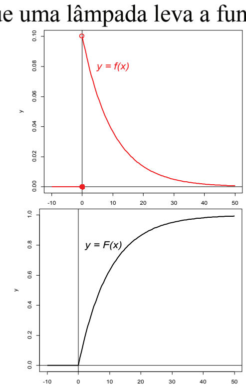
X – tempo (em centenas de horas) que uma lâmpada leva a fundir

função densidade

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\leq 0 \\ 0.1\,e^{-0.1x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

função distribuição cumulativa

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\leq 0 \\ 1-e^{-0.1x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$



Função distribuição cumulativa

- Propriedades da f.d.c.:
  - é crescente
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
  - é contínua à direita
  - se X é v.a. discreta, F_X é uma função com descontinuidades e em escada
  - se X é v.a. contínua, F_X é uma função contínua
- Exemplos de cálculos de probabilidades a partir de F:

$P[X \le a] = F(a)$ $\qquad$ $P[X > a] = 1 - F(a)$

$P[X < a] = F(a^-) = \lim_{x \to a^-} F(x)$ $\qquad$ $P[X = a] = F(a) - F(a^-)$

$P[a < X \le b] = P[X \le b] - P[X \le a] = F(b) - F(a)$

$P[a < X < b] = P[X < b] - P[X \le a] = F(b^-) - F(a)$

Parâmetros de uma variável aleatória

- **Valor médio** ou **valor esperado** de X – é o ponto de equilíbrio dos valores possíveis para X

<u>X v.a. discreta</u>

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1} x_i\, p_i$$

(média ponderada dos valores de X)

<u>X v.a. contínua</u>

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

- **Valor médio** ou **valor esperado** de uma função de X, $\phi(X)$

<u>X v.a. discreta</u>

$$E[\phi(X)] = \sum_{i=1} \phi(x_i)\, p_i$$

<u>X v.a. contínua</u>

$$E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, f(x)\, dx$$

Propriedades do valor médio

- Sejam a e b constantes e φ e ψ duas funções,

1) $E[a] = a$

2) $E[a + bX] = a + bE[X]$

3) $E[\varphi(X) + \psi(X)] = E[\varphi(X)] + E[\psi(X)]$

4) Se $X \ge 0$ então $E[X] \ge 0$

Parâmetros de uma variável aleatória

- **Variância** de X – mede a dispersão dos valores de X em torno do valor esperado

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$$

- **Desvio padrão** de X

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

- **Quantil de ordem *p*** de X $(0 < p < 1)$, χ_p

é o menor valor de x tal que $F(x) \ge p$.

  - Se $p = 0.5$, $\chi_{0.5}$ é a **mediana** de X.
  - Em distribuições contínuas, χ_p é o menor valor de x que verifica $F(x) = p$.

Propriedades da variância e do desvio padrão

- Sejam a e b constantes,

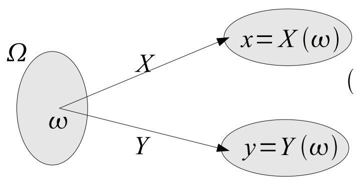
1) $Var[X] \ge 0$

2) $Var[a + bX] = b^2\, Var[X]$

3) $\sigma_{a+bX} = |b|\, \sigma_X$

Pares aleatórios

- Permite estudar relações entre duas características numéricas associadas a cada elemento do espaço de resultados de uma experiência aleatória.



(X, Y) é um par aleatório

Exemplo: altura e diâmetro (a 1.3m do solo) das árvores de uma região.

Pares aleatórios discretos

- Pares aleatórios discretos – **distribuição de probabilidade conjunta**

$$p_{ij}=P[X=x_i, Y=y_j] \quad i=1,2,\cdots \quad j=1,2,\cdots$$

tal que $\quad p_{ij}\geq 0 \quad e \quad \sum_{i=1}\sum_{j=1} p_{ij}=1$

- Distribuições **marginais**:

$$p_{i.}=P[X=x_i]=\sum_{j=1} p_{ij}$$

$$p_{.j}=P[Y=y_j]=\sum_{i=1} p_{ij}$$

Pares aleatórios discretos: independência

- Seja (X, Y) um par aleatório discreto. As v.a.s X e Y são **independentes** se e só se

$$p_{ij}=p_{i.}\ \ p_{.j}, \quad \forall i, j$$

- Exemplos:

$X \backslash Y$	3	4	$p_{i.}$
1	0.2	0.2	0.4
2	0.3	0.3	0.6
$p_{.j}$	0.5	0.5	1.0

X e Y são v.a. independentes

$X \backslash Y$	3	4	$p_{i.}$
1	0.1	0.3	0.4
2	0.4	0.2	0.6
$p_{.j}$	0.5	0.5	1.0

X e Y não são v.a. independentes

Parâmetros de um par aleatório (discreto ou contínuo)

- **Valor médio** ou **valor esperado** de uma **função** de X e de Y, $\psi(X,Y)$:

  – (X,Y) par aleatório discreto $\quad E[\psi(X,Y)]=\sum_{i=1}\sum_{j=1}\psi(x_i,y_j)\,p_{ij}$

  – (X,Y) par aleatório contínuo
  (o cálculo do valor deste parâmetro sai fora do âmbito desta UC)

$$E[\psi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

em que $f(x,y)$ é a função densidade conjunta do par.

- Propriedades:
  - $E[X\pm Y]=E[X]\pm E[Y]$
  - Se X e Y são v.a. **independentes** então
    $E[XY]=E[X]E[Y]$

Parâmetros de um par aleatório

- **Covariância** de X e Y

$$Cov(X,Y)=\sigma_{X,Y}=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[XY]-\mu_X\mu_Y$$

- Propriedades:
  - $Cov(a+bX, c+dY)=bd\,Cov(X,Y)$
  - $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2\,Cov(X,Y)$
  - Se X e Y são v.a. **independentes** então
    $Cov(X,Y)=0$
    $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$

Nota: $Cov(X,Y)=0$ **não implica** que X e Y são v.a. independentes.

Parâmetros de um par aleatório

- **Coeficiente de Correlação entre** X e Y

$$\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}, \quad \sigma_X\neq 0, \quad \sigma_Y\neq 0$$

- Propriedades:
  - $-1\leq\rho_{X,Y}\leq 1$
  - $\rho_{a+bX,c+dY}=\begin{cases}\rho_{X,Y} & \text{se } bd>0\\ -\rho_{X,Y} & \text{se } bd<0\end{cases}$
  - Se X e Y são v.a. **independentes** então $\rho_{X,Y}=0$

Bibliografia

- Murteira, B., Ribeiro, C.S., Silva, J.A. e Pimenta C. (2010). Introdução à Estatística. Escolar Editora.
- Neves, M. (2009) Introdução à Estatística e Probabilidade. Apontamentos de apoio às aulas.
  – Teoria da Probabilidade: *www.isa.utl.pt/dm/estat/estat/seb2.pdf*
- Pestana, D.D. e Velosa, S.F. (2002) Introdução à Probabilidade e à Estatística, vol.I, Fundação Caloustre Gulbenkian, Lisboa.