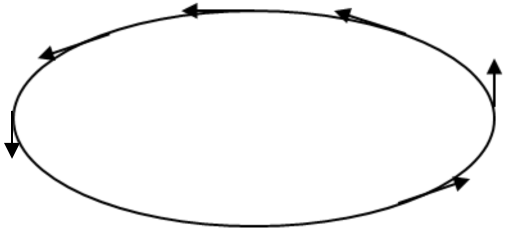
Cinemática

Trajetória: É o lugar geométrico dos pontos sucessivamente ocupados por uma partícula durante o seu movimento.

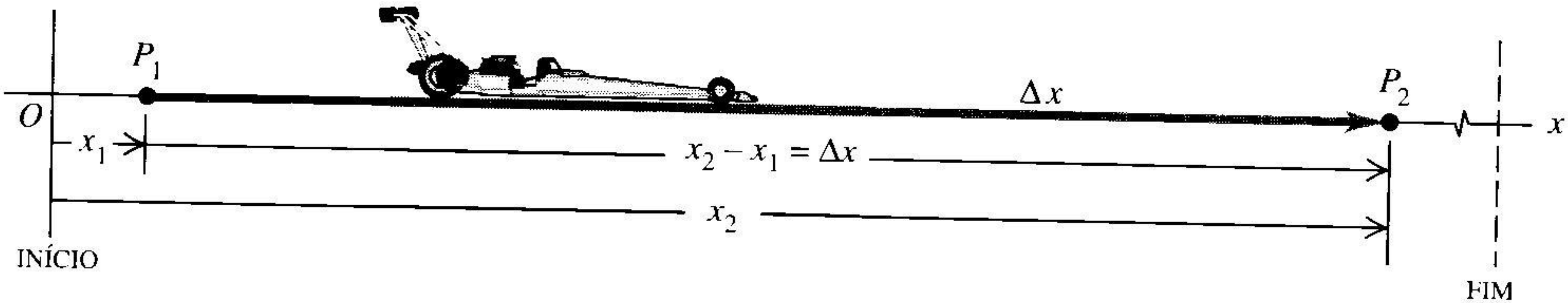
1. No caso do movimento retilíneo a trajetória é uma reta

Velocidade: É um vetor, tangente à trajetória em cada ponto, orientado no sentido do movimento, cujo modulo é a variação do espaço percorrido por unidade de tempo**.**



No caso do movimento retilíneo a direção do vetor é constante e coincide com a trajetória (reta).

Neste movimento, por ser constante a direção do vetor, os problemas podem ser resolvidos através de grandezas escalares, atribuindo um sinal positivo ou negativo ao módulo do vetor conforme a distância da partícula ao ponto de referência- aumenta ou diminui com o tempo.



A trajetória tem a direção de Ox e o sentido é o sentido positivo do eixo (considera-se que o carro é uma partícula que ocupa as posições P_1, P_2, etc..)

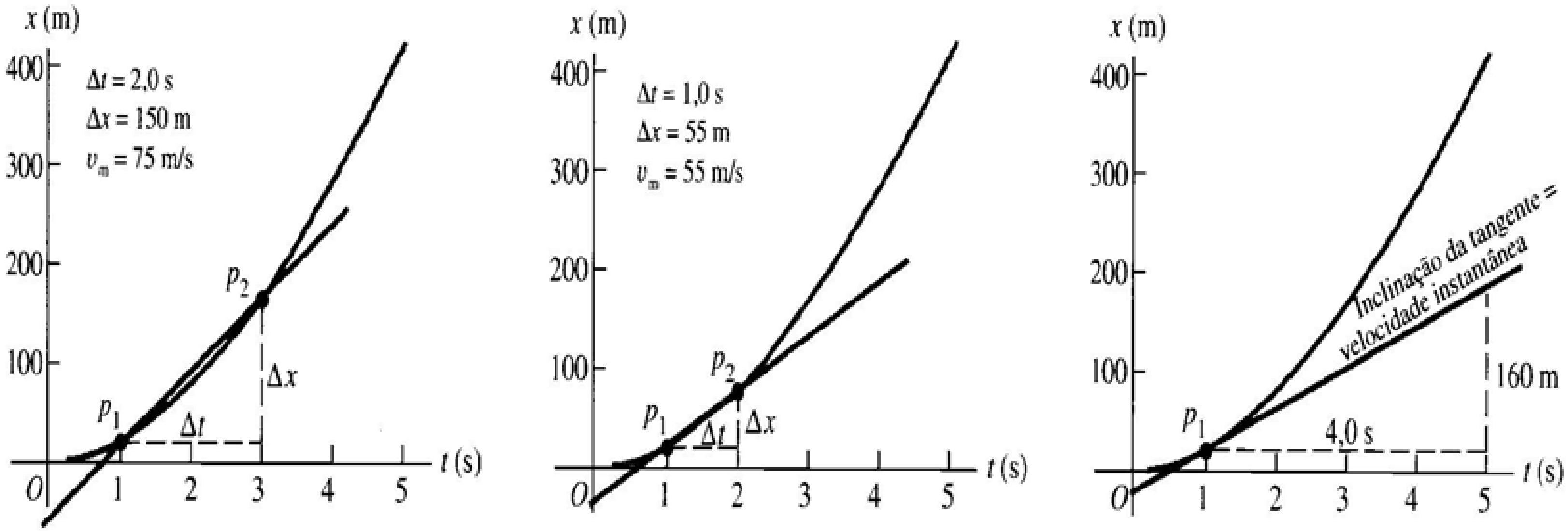
Velocidade média (V_m): É o espaço que em média o carro (partícula) percorre por unidade de tempo. Calcula-se dividindo o espaço percorrido (Δx) pelo tempo de duração do percurso (Δt).

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad V_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Neste exemplo a velocidade média é positiva porque, como o movimento se faz no sentido positivo do eixo, $x_2>x_1$.

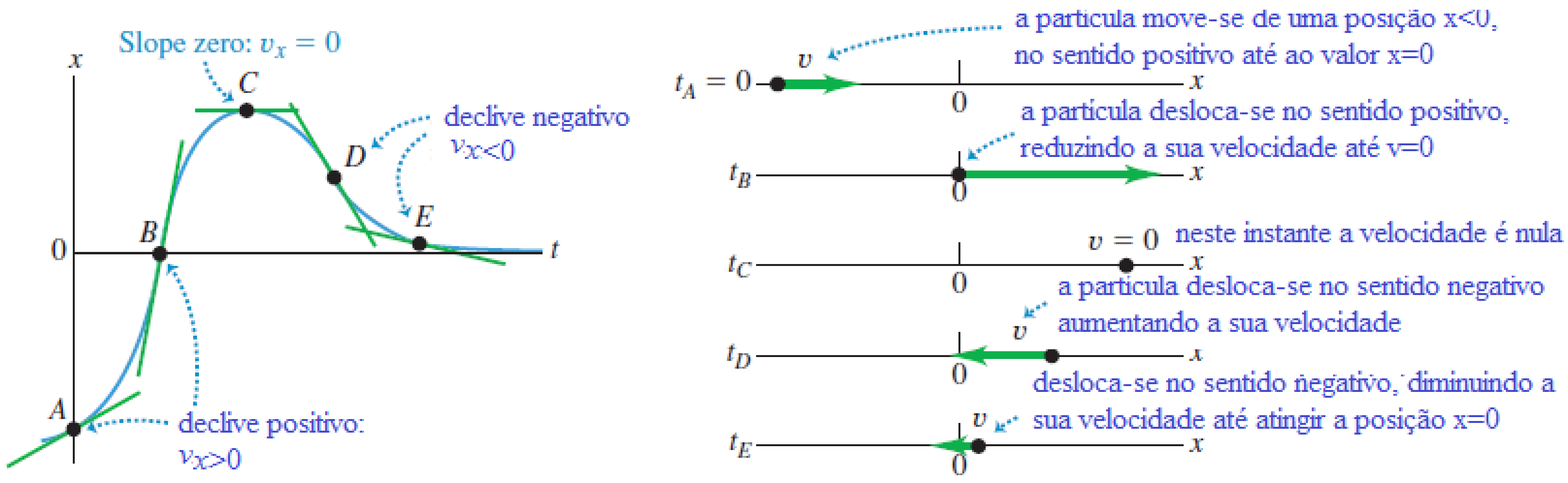
Velocidade instantânea é a velocidade que o carro (partícula) tem em cada instante.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



É fácil perceber que no percurso de uma viatura num circuito urbano a velocidade varia muito ao longo do tempo, dado que há períodos de paragem em que a velocidade é nula, seguindo-se períodos em que o carro vai aumentando gradualmente de velocidade e depois perdendo velocidade até parar de novo. Em cada ponto do percurso o carro terá **diferentes velocidades instantâneas** e no final do percurso se dividir o espaço percorrido pelo tempo que demorou o percurso, obtém-se a **velocidade média**.

No gráfico t-x (tempo *vs.* espaço) representa-se o movimento retilíneo de uma partícula em que a velocidade varia ao longo do tempo

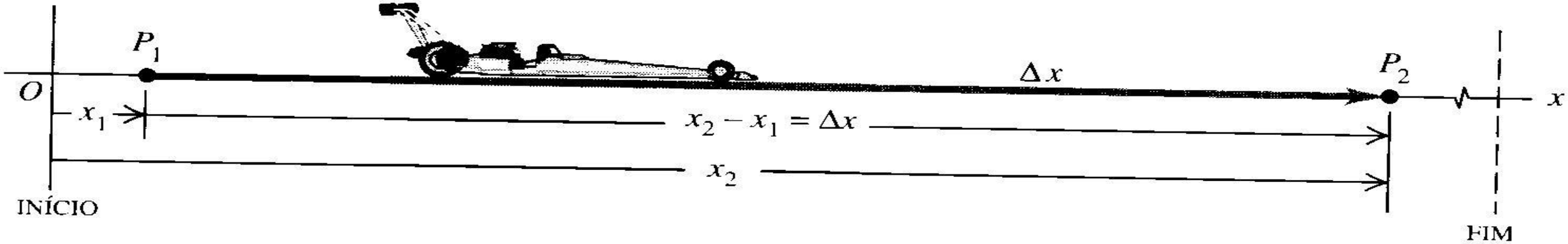


Aceleração média de uma partícula que se move de P_1 para P_2 em movimento retilíneo é um vetor que tem a seguinte componente segundo o eixo Ox

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

A **aceleração instantânea** será então:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$



Quando se carrega no acelerador de um carro a velocidade vai aumentando com o tempo, a aceleração é positiva($\Delta v > 0$), **O MOVIMENTO É ACELERADO**
Quando se carrega no travão, a velocidade vai diminuindo com o tempo, a aceleração é negativa ($\Delta v < 0$), pelo que **O MOVIMENTO É RETARDADO**.

A afirmação anterior é válida quando o movimento se faz no sentido em que o valor de x aumenta. Quando se faz em sentido contrário , isto é, quando o carro está a andar de marcha atrás, com movimento acelerado, as velocidades são negativas porque o valor de x diminui com o tempo, e a variação da velocidade é negativa porque a velocidade diminui com o tempo.
Se por exemplo a velocidade fosse, em valor absoluta, 2 m/s em P_2 e 5 m/s em P_1 (está a acelerar), como as velocidades são negativas ficava: $\Delta v = -5 - (-2) = -3 < 0$ e portanto a<0

De uma forma geral pode-se afirmar que o **MOVIMENTO É ACELERADO quando a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal e é RETARDADO quando a aceleração e a velocidade têm sinais contrários.**

Quando se mantém a mesma aceleração, diz-se que o movimento é **UNIFORMEMENTE ACELERADO** ou **UNIFORMEMENTE RETARDADO ou, mais genericamente, UNIFORMEMENTE VARIADO.**

Movimento retilíneo uniforme: caracteriza-se pela **constância da velocidade** instantânea

$$v = const. \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \boxed{x = x_0 + vt}$$

x_0 é o espaço inicial, porque quando t=0 tem-se: $x = x_0$

Movimento retilíneo uniformemente variado: caracteriza-se pela **constância da aceleração**

$$a = const. \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a \Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

v_o É a velocidade inicial (no instante t=0)

A equação que traduz a variação do espaço com o tempo obtém-se integrando a expressão anterior:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a \times t \quad \Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Nalguns problemas poderá interessar utilizar uma equação onde não esteja explicitamente o tempo, mas em que a posição do ponto pode ser calculada conhecendo a sua velocidade e aceleração

Da equação da velocidade

$$v = v_0 + at$$

tira-se que:

$$t = \frac{v - v_o}{a}$$

Substituindo na equação dos espaços fica::

$$x - x_0 = v_o\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x - x_0 = \frac{vv_0}{a} - \frac{{v_0}^2}{a} + \frac{v^2}{2a} - \frac{2vv_0}{2a} + \frac{{v_0}^2}{2a}$$

$$x - x_0 = -\frac{{v_0}^2}{2a} + \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2a}\left(v^2 - {v_0}^2\right)$$

A última equação pode escrever-se sob a forma

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - xo)$$

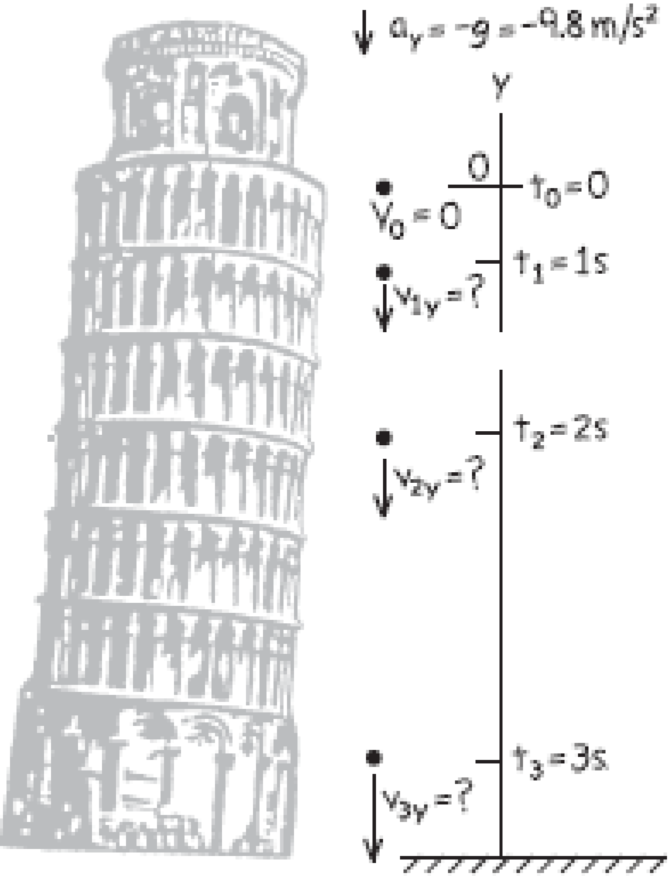
que permite calcular a velocidade que terá um ponto à distância $d=x-x_o$ da posição inicial, conhecendo a aceleração constante do movimento

Ou sob a forma

$$a = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2(x - x_0)}$$

que permite calcular a aceleração do movimento em função da velocidade e da distância percorrida

QUEDA LIVRE DE UM CORPO LANÇADO NO ESPAÇO



Uma moeda é largada na origem do eixo Oy. À medida que o movimento se desenvolve a moeda vai caminhando no sentido negativo daquele eixo.

a) a variação dos espaços tem sinal negativo => v<0

b) a variação da velocidade tem sinal negativo => a<0

As equações do movimento

$$v = v_0 + at \quad e \quad y = y_o + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

serão agora escritas:

$$a = -g \quad \Rightarrow v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \; y_0 - y = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Muitas vezes considera-se uma variável $h = y_0 - y$

$$\boxed{v = v_0 + gt} \quad e \quad \boxed{h = v_0\, t + \frac{1}{2}g\, t^2}$$

Nestas equações foi necessário trocar o sinal à velocidade inicial pelo que, agora, se convenciona que ela é positiva quando está dirigida para baixo, ao contrário das equações em que se utilizava a variável y.

Considerando agora a **velocidade inicial nula**, as equações anteriores simplificam-se

$$\boxed{v = gt} \quad e \quad \boxed{h = \frac{1}{2}gt^2}$$

Explicitando t na 2ª equação e combinando depois com a 1ª fica sucessivamente:

$$t^2 = \frac{2h}{g} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad v = g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Fórmula de Torricelli que fornece diretamente a velocidade com que um corpo chega ao solo, largado, sem velocidade inicial, de uma altura h.

Ou, explicitando h

$$\boxed{h = \frac{v^2}{2g}}$$

Movimento não retilíneo

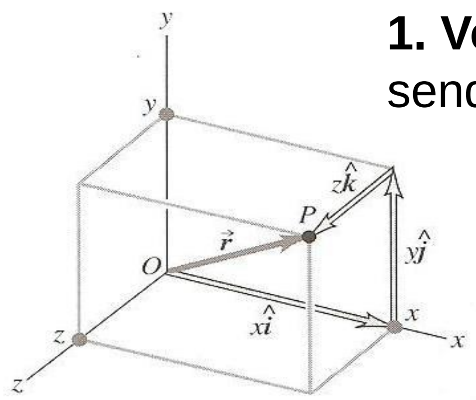


FIGURA 3.1 O vetor posição $\vec{r}$ da origem até o ponto P possui componentes x, y e z.

1. Vector de posição de um ponto P(x,y,z) é o vector (P-O) sendo O(0,0,0) a origem dos eixos coordenados

$$\vec{r} = P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

2. Velocidade

Quando o ponto P se desloca no espaço, o seu vector de posição vai mudando ao longo do tempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Vetor velocidade média

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Vetor velocidade instantânea

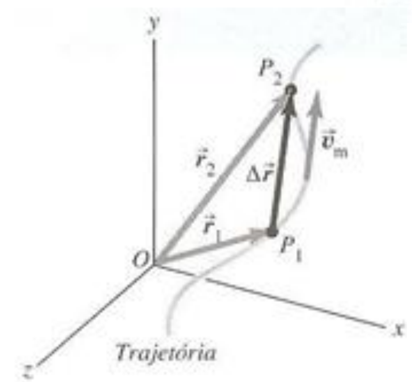


FIGURA 3.2 A velocidade média $\vec{v}_m$ entre os pontos P_1 e P_2 possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$.

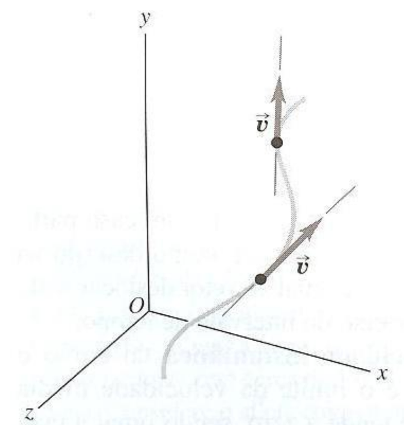
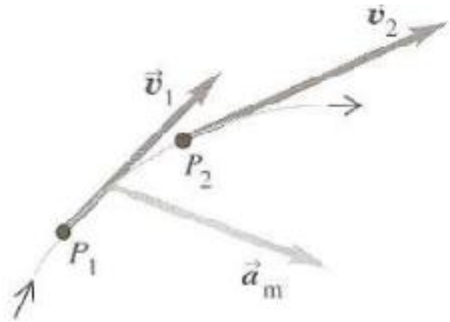


FIGURA 3.3 A velocidade instantânea $\vec{v}$ em cada ponto é tangente à trajetória no referido ponto.

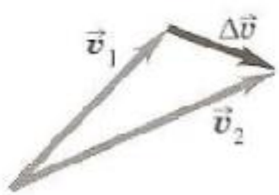
2. Aceleração



(a)

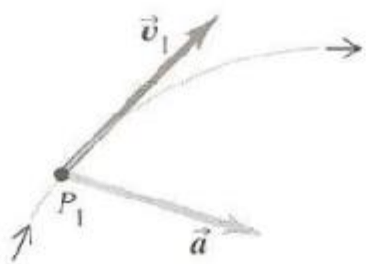
FIGURA 3.6 (a) O vetor $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa a aceleração média entre os pontos P_1 e P_2.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



(b)

(b) Construção para obtermos $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.



(c)

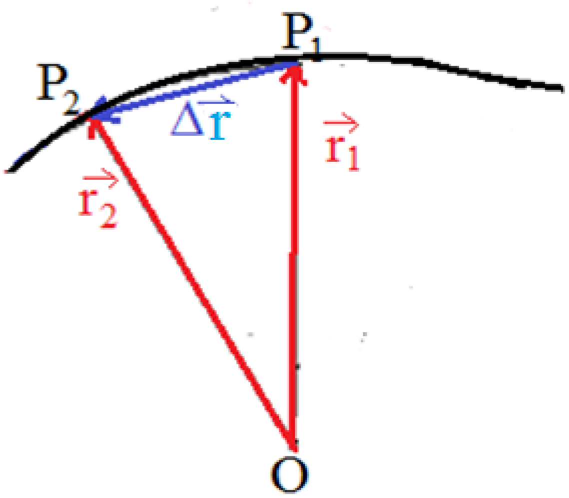
(c) A aceleração instantânea $\vec{a}$ no ponto P_1.

O vetor $\vec{v}$ é tangente à trajetória e o vetor $\vec{a}$ aponta para o lado côncavo da trajetória.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

MOVIMENTO PLANO

Este movimento acontece num plano e pode ser estudado apenas com duas dimensões, utilizando um sistema de referência Oxy. Neste caso é fácil mostrar que o vetor velocidade é tangente à trajetória em cada ponto



Os vetores de posição são os vetores complanares $\vec{r}_1 \; e \; \vec{r}_2$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ tem a direção da secante à curva.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Quando se calcula a velocidade instantânea $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ os pontos tendem aproximar-se e a secante tende para a tangente.

Nos movimentos não retilíneos é usual utilizar a variável *s* para o espaço e não as variáveis x ou y como se fez anteriormente, dado que o movimento não se faz na direção de um eixo coordenado.

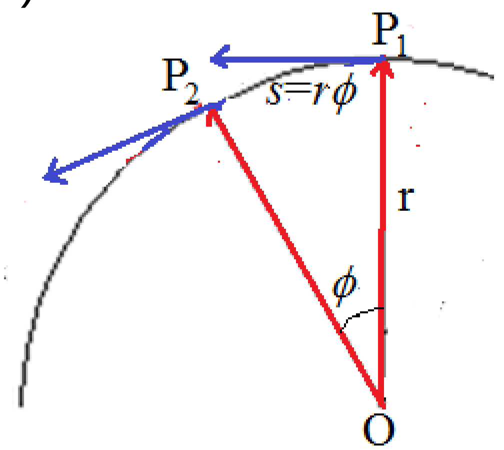
1. **MOVIMENTO CIRCULAR**

$$s = r\phi$$

$$180^{\circ} = \pi \ rad$$

a) **MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME**

Este movimento caracteriza-se por uma velocidade escalar (v) constante. No entanto, o **vetor velocidade é variável** porqu ele muda de direção, mesmo que mantenha o mesmo módu Seja *s* o percurso percorrido pela partícula sobre a circunferência. Tem-se:



$$v = const \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v \Rightarrow \boxed{s = s_0 + vt}$$

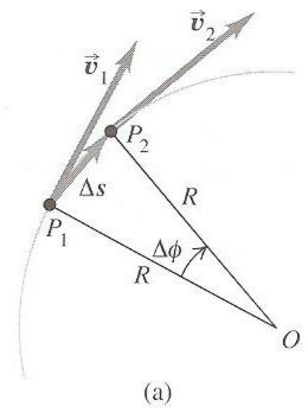
Esta velocidade também se chama *velocidade linear*.

Derivando em ordem ao tempo a equação $s = r\phi$ obtém-se:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt}$$

$\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$ representa a variação do ângulo ao centro ϕ com o tempo e denomina-se **velocidade angular** e exprime-se, no SI, em rad/s.

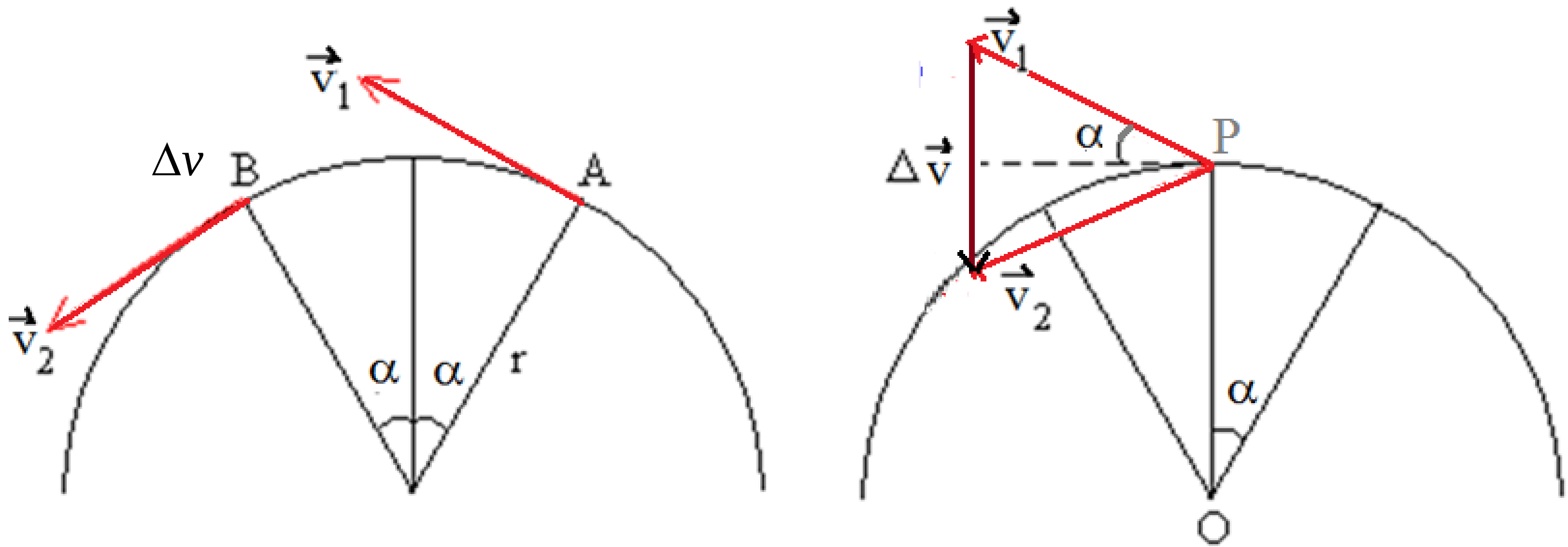
$\boxed{v = r\omega}$ É a expressão que relaciona a **velocidade angular** com a **velocidade linear**



O vetor aceleração $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ não é nulo porque agora $\Delta \vec{v} \neq 0$

(o vector velocidade embora tenha o mesmo módulo muda de direção e sentido)

Para deduzir a expressão da aceleração, considere uma partícula que se desloca no sentido AB com velocidade v numa circunferência de raio r.



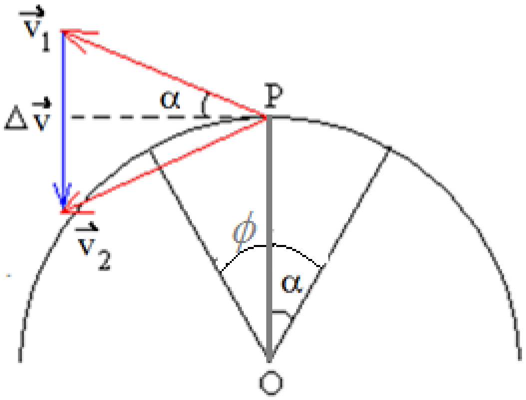
Adaptado de: http://www.fisica.ufs.br/CorpoDocente/egsantana/cinematica/circular3/circular3.htm

O ponto encontra-se em A no instante t-Δt/2 com velocidade $\vec{v}_1$ e em B no instante t+Δt/2, com velocidade $\vec{v}_2$.

Se a velocidade for uniforme os dois vetores têm o mesmo módulo, v. A variação do vetor velocidade pode ser calculada graficamente colocando os dois vetores com origem no ponto médio P.

Como o triângulo é isósceles, porque os módulos são iguais, tem-se:

$$\Delta v = 2 \times v \times sen(\alpha)$$



O ângulo ao centro descrito no intervalo de tempo Δt é:

$$\phi = 2 \times \alpha$$

O espaço percorrido pelo corpo no mesmo intervalo de tempo:

$$\Delta s = r \times \phi = 2 \times r \times \alpha$$

O intervalo de tempo Δt pode ser expresso em função da velocidade

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{2 \times r \times \alpha}{v}$$

A intensidade do vetor aceleração média que traduz a variação da velocidade no intervalo de tempo Δt, pode escrever-se:

$$a_{média} = \frac{(\Delta v)_n}{\Delta t} = \frac{2 \times v \times sen(\alpha)}{\frac{2 \times r \times \alpha}{v}} = \frac{v^2}{r} \times \frac{sen(\alpha)}{\alpha}$$

: $$a_{média} = \frac{(\Delta v)_n}{\Delta t} = \frac{2 \times v \times sen(\alpha)}{\frac{2 \times r \times \alpha}{v}} = \frac{v^2}{r} \times \frac{sen(\alpha)}{\alpha}$$

Para determinar o valor da aceleração instantânea calcula-se $a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta v)_n}{\Delta t}$

Quando $\Delta t \to 0; \alpha \to 0 \Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{\alpha} \to 1$ porque para ângulos muito pequenos o valor do seno é igual ao ângulo

Será então:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta v)_n}{\Delta t} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

Esta expressão permite calcular a aceleração normal ou centrípeta em função da velocidade escalar e do raio da circunferência.

Considerando a velocidade angular

$$\boxed{v = r \times \omega}$$

$$a_n = \frac{(r\omega)^2}{r} \Rightarrow a_n = r\omega^2$$

$$\boxed{a_n = r \times \omega^2}$$

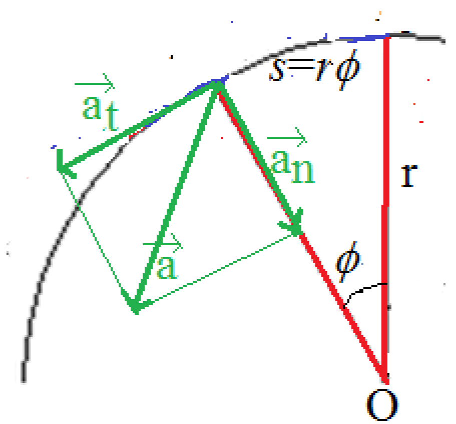
b) **MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO**

No movimento circular uniformemente variado existe, em cada ponto da curva, uma componente normal da aceleração devido à curvatura. Há também uma componente tangencial que é constante e que se define como a variação da velocidade linear com o tempo.

$$a_t = const \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a_t \Rightarrow v = v_0 + a_t t$$

A equação dos espaços deduz-se de forma idêntica à do movimento retilíneo e fica:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a_t t^2$$



O vetor aceleração calcula-se com o a soma das suas duas componentes:

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n} \qquad a = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}}$$

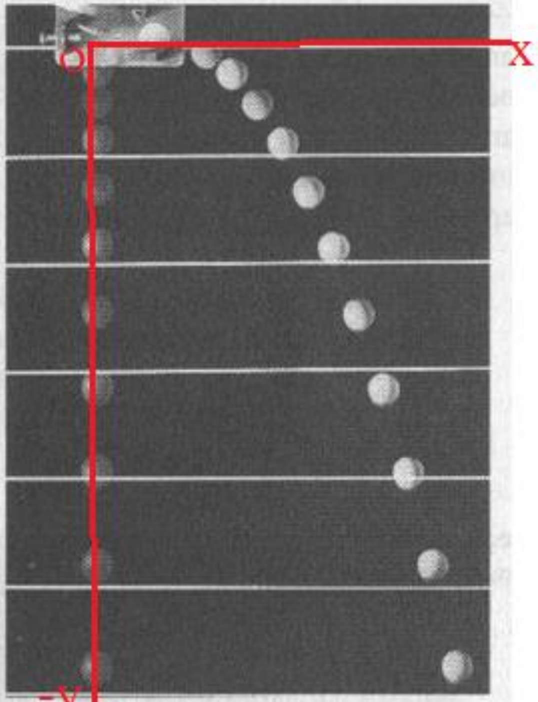


FIGURA 3.14 Independência entre o movimento na vertical e na horizontal. A bola da esquerda é largada verticalmente sem velocidade inicial. Simultaneamente, a bola da direita é lançada horizontalmente do mesmo ponto; as imagens sucessivas desta fotografia estroboscópica são registradas em intervalos de tempo iguais. Para cada intervalo de tempo as duas bolas possuem os mesmos componentes y da posição, da velocidade e da aceleração, embora os componentes x da posição e da velocidade sejam diferentes.

2. MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL

A figura mostra dois projéteis com diferentes movimentos no eixo Ox, mas idênticos movimentos no eixo Oy; um corresponde ao movimento de uma bola largada no espaço sem velocidade inicial e o outro de uma bola lançada na horizontal com velocidade inicial v0.

Em ambos os movimentos as bolas caem verticalmente à mesma distância em intervalos de tempo iguais. Esta observação permite-nos concluir que, no 2º movimento, a posição P(x,y) da bola num instante t, pode ser determinada calculando separadamente as suas coordenadas.

a) Movimento segundo Ox (uniforme)

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$x = v_{0x} t \qquad v_x = v_{0x}$$

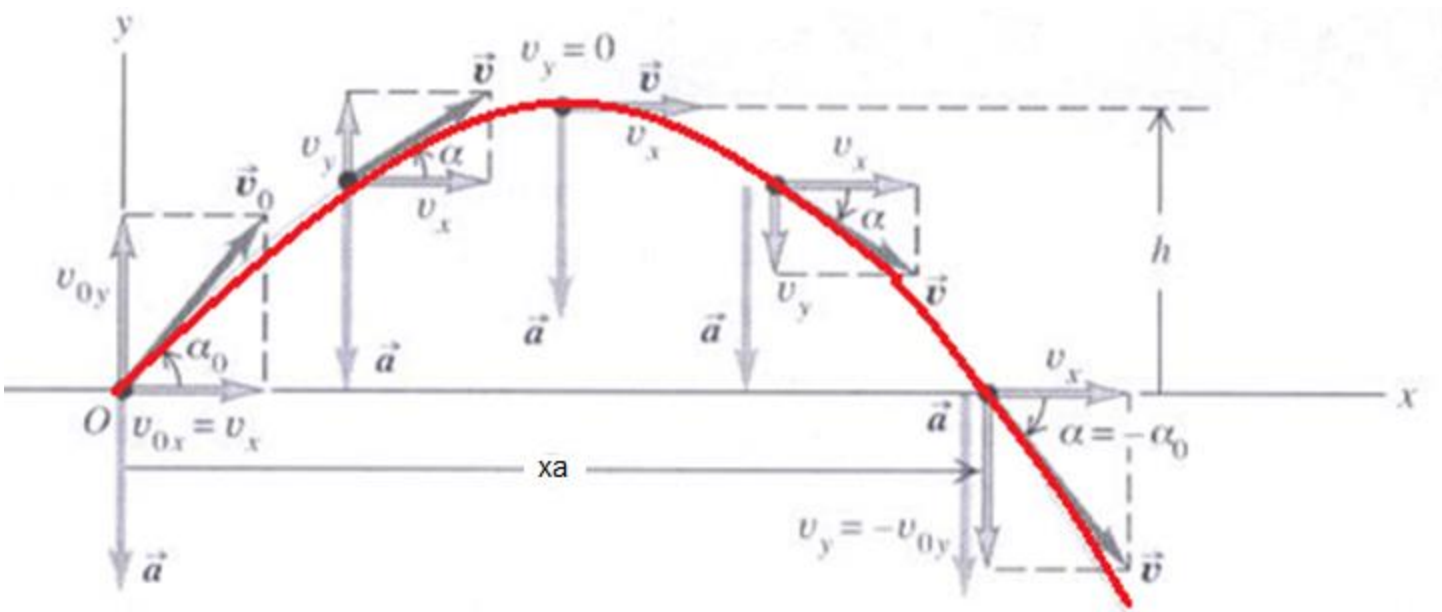
b) Movimento segundo Oy (uniformemente acelerado)

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v_y = v_{0y} - gt$$

No caso presente a velocidade inicial do movimento vertical é nula e o ponto parte da origem dos eixos, fica:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \qquad v_y = -gt$$

Quando o projétil é lançado na atmosfera numa direção que faz um ângulo α_0 com a horizontal.



$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad v_{0x} = v_0 \cos(\alpha_0); \quad v_{0y} = v_0 sen(\alpha_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha_0)t \\ y = v_0 sen(\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} v_x = v_o \cos(\alpha_0) \\ v_y = v_0 sen(\alpha_0) - gt \end{cases}} \qquad \boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

O módulo do vetor velocidade é: $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

O vetor velocidade é, em cada posição, tangente à trajetória. A sua direção e o sentido podem ser identificados pelo angulo α que o vetor faz com Ox.

$$\alpha = atg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

No ponto em que a trajetória interseta o eixo Ox é $\alpha = \alpha_0$, *como se pode observar na figura*

A **equação da trajetória** y=f(x) obtém-se eliminando t entre as duas equações que fornecem os valores de x e y respetivamente.

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha_0) t \\ y = v_0 sen(\alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Da 1ª equação tira-se que

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)}$$

Substituindo este valor na 2ª equação tem-se:

$$y = v_0 sen(\alpha_0)\left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = tg(\alpha_0)\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2}$$

È a equação de uma parábola do tipo $y = a\,x - b x^2$

ALCANCE (x_a) é o valor de x na posição em que a trajetória cruza o eixo Ox.

Considerando a equação da trajetória, faz-se y=0

$$y = tg(\alpha_0)\, x_a - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_a^2 = 0 \Rightarrow x_a\left(tg(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_a\right) = 0$$

$$tg(\alpha_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_a = 0 \Rightarrow \frac{sen(\alpha_0)}{\cos(\alpha_0)} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_a = 0$$

$$x_a = \frac{sen(\alpha_0)\, 2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha_0) g}$$

$$xa = \frac{2v_0^2 sen(a_0)\cos(\alpha_o)}{g}$$

ALCANCE MÁXIMO

O alcance máximo calcula-se encontrando o valor de α que torna máximo a função $x_a=f(\alpha)$

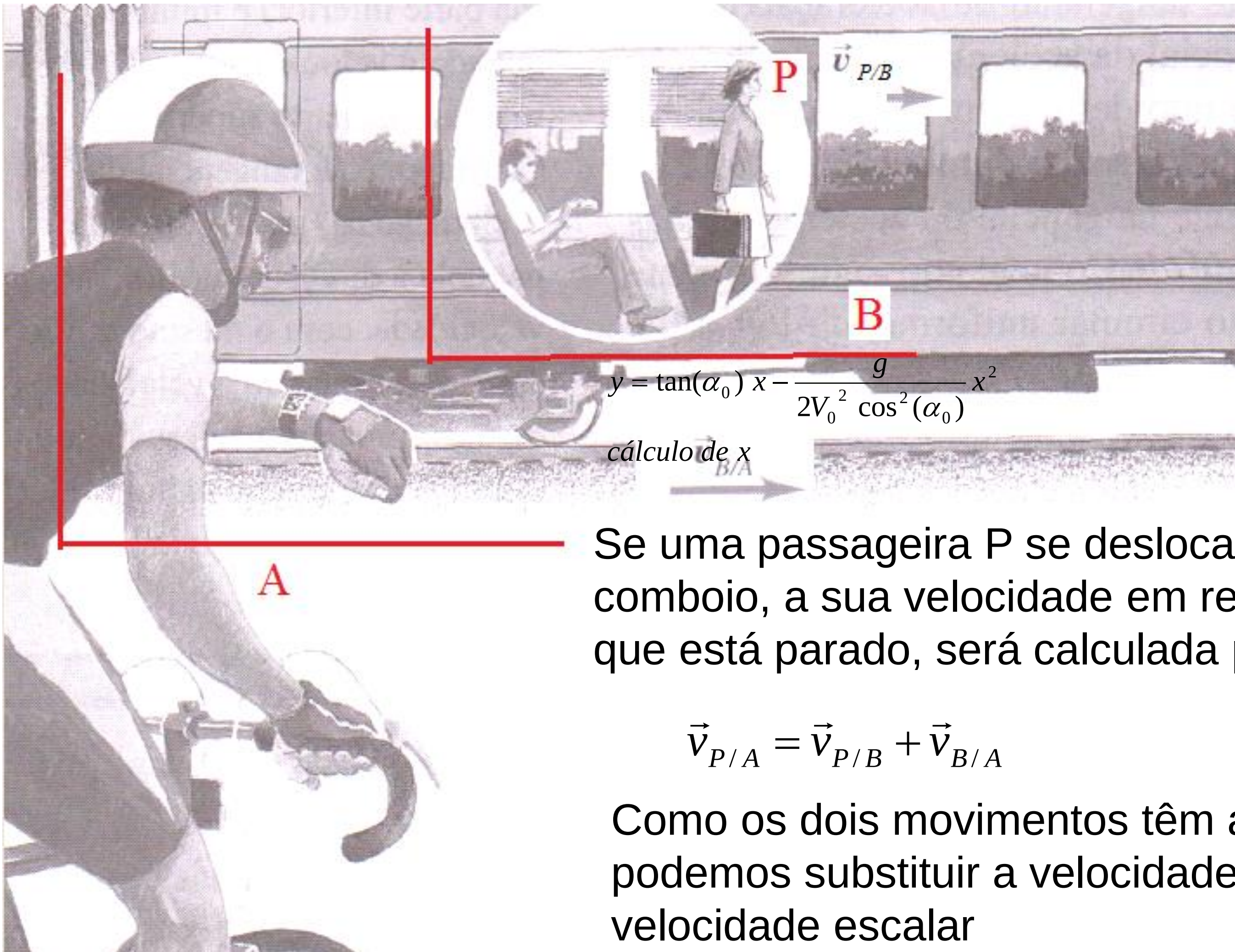
$$\frac{d(xa)}{d(\alpha_0)} = 0 \Rightarrow \frac{2V_0{}^2}{g}\left(\cos^2(\alpha_0) - sen^2(\alpha_0)\right) = 0 \Rightarrow \frac{2V_0{}^2}{g}\cos(2\alpha_0) = 0$$

$$\cos(2\alpha_0) = 0 \Rightarrow 2\alpha_0 = a\cos(0) \Rightarrow 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

Para a mesma velocidade inicial, o alcance máximo atinge-se com uma ângulo de 45º

VELOCIDADE RELATIVA

a) Dois movimentos retilíneos com a mesma direção e o mesmo sentido



$$y = \tan(\alpha_0)\, x - \frac{g}{2V_0^{\,2}\ \cos^2(\alpha_0)} x^2$$

cálculo de x

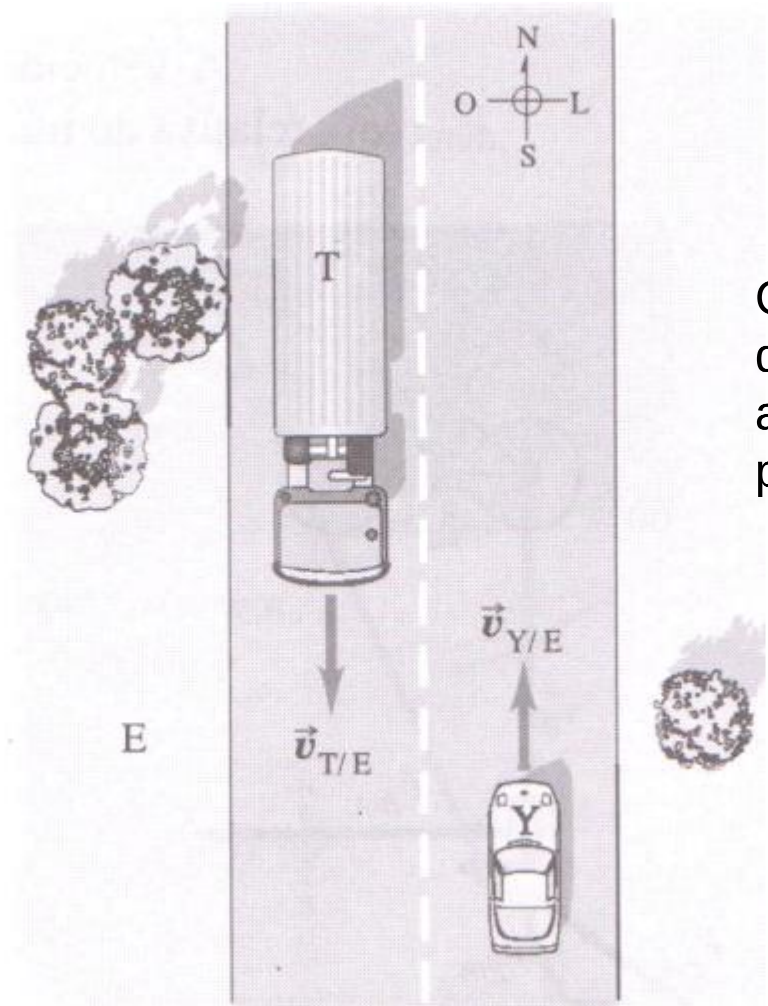
Se uma passageira P se deslocar no corredor de um comboio, a sua velocidade em relação a um ciclista, que está parado, será calculada pela expressão:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

Como os dois movimentos têm a mesma direção podemos substituir a velocidade vetorial pela velocidade escalar

$$\boxed{v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A}}$$

b) Dois movimentos retilíneos com a mesma direção e sentidos contrários



$$\vec{v}_{T/E} = \vec{v}_{T/Y} + \vec{v}_{Y/E}$$
$$\vec{v}_{T/Y} = \vec{v}_{T/E} - \vec{v}_{Y/E}$$

Como os vetores velocidade têm a mesma direção mas sinais contrários, podemos tomar as velocidades escalares considerando positivo o sentido da deslocação de T

$$\boxed{v_{T/Y} = v_{T/E} + v_{Y/E}}$$

c) Dois movimentos retilíneos com direções diferentes

Como se pode observar na figuram a passageira desloca-se agora perpendicularmente ao corredor, emdireção ao seu lugar