ANEXO 3 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NORMAL (NOR)

A3.1 Fdp e/ou Fd

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \qquad -\infty < x < +\infty \tag{A3.1}$$

A3.3 Estimativa dos Parâmetros

A3.3.2 Método da Máxima Verosimelhança (MV)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{A3.8}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{A3.9}$$

embora, em rigor, o estimador s_x corresponda à expressão dada pela Eq. (A3.9), com N em vez de N-1.

A3.3 Obtenção dos Quantis

Os quantis são dados por:

$$\hat{x}_F = \bar{x} + s_x z_F \tag{A3.10}$$

em que z_F tem a função de distribuição normal padronizada.

O quantil da normal padronizada, z_F (tabelado), pode ser obtido em *EXCEL* com a função **NORMSINV(*F*)**.

A3.4 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor da função de distribuição, F(x), pode ser obtido considerando que $F(x) = \Phi(z)$, com a normal padronizada z expressa por:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s_x} \tag{A3.14}$$

e em que $\Phi(z)$, a função de distribuição normal padronizada (tabelada) (função **NORMSDIST(*z*)**, em *EXCEL*)

ANEXO 4 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL A 3 PARÂMETROS (LN3)

A4.1 Fdp e/ou Fd

Se $u = \ln(x\text{-}\xi)$ é NOR então *x* é LN3.

$$f(x) = \frac{1}{(x-\xi)\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x-\xi)-\mu_y}{\sigma_y}\right]^2\right\}, \qquad x > \xi \tag{A4.1}$$

A4.3 Estimativa dos Parâmetros

A4.3.3 Método dos Quantis com o Método da Máxima Verosimelhança (QMV)

Os parâmetros são estimados por (Stedinger, 1980):

$$\hat{\xi} = \frac{x_{(N)}x_{(1)} - x_{md}^2}{x_{(N)} + x_{(1)} - 2x_{md}}, \qquad \text{para} \qquad x_{(N)} + x_{(1)} - 2x_{md} > 0 \tag{A4.8}$$

em que $x_{(N)}$ e $x_{(1)}$ representam os valores máximo e mínimo da amostra, respectivamente, e x_{md} o valor mediano.

$$\bar{y} = \overline{\ln(x-\hat{\xi})} \tag{A4.12}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(x_i-\hat{\xi}\right)-\bar{y}\right]^2}{N}} \tag{A4.13}$$

A4.4 Obtenção dos Quantis

Os quantis são dados por:

$$\hat{x}_F = \hat{\xi} + \exp\left(\bar{y} + s_y z_F\right) \tag{A4.26}$$

em que z_F é calculado como indicado para a fd normal (função **NORMSINV(*F*)**, em *EXCEL*).

A4.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor da função de distribuição, *F*(*x*), é obtido considerando que $F(x) = \Phi(z)$, com a normal padronizada *z* expressa por:

$$z = \frac{\ln\left(x-\hat{\xi}\right)-\bar{y}}{s_y} \tag{A4.27}$$

e $\Phi(z)$ calculado como para a função de distribuição normal (função **NORMSDIST(*z*)**, em *EXCEL*).

ANEXO 5 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL A 2 PARÂMETROS (LN2)

A5.1 Fdp e/ou Fd

Esta função constitui um caso particular da LN3, com ξ=0, isto é:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right]^2\right\}, \qquad x > 0 \tag{A5.1}$$

pelo que, se $u = \ln x$ é NOR então x é LN2.

A5.3 Estimativa dos Parâmetros

A5.3.2 Método da Máxima Verosimelhança (MV)

Os parâmetro são estimados por (Stedinger, 1980):

$$\bar{y} = \overline{\ln x} \tag{A5.6}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\ln x_i - \bar{y}\right)^2}{N}} \tag{A5.7}$$

A5.4 Obtenção dos Quantis

Os quantis são dados pela Eq. (A4.26), com $\hat{\xi} = 0$, e em que z_F é calculado como indicado para a fd normal (função **NORMSINV(*F*)**, em *EXCEL*), isto é:

$$\hat{x}_F = \exp\left(\bar{y} + s_y z_F\right) \tag{A5.8}$$

A5.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor da função de distribuição, $F(x)$, é obtido considerando que $F(x) = \Phi(z)$, com a normal padronizada z expressa pela Eq. (A4.27), com $\hat{\xi} = 0$, e Φ(z) calculado como para a função de distribuição normal (função **NORMSDIST(*z*)**, em *EXCEL*).

ANEXO 6 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO PEARSON TIPO 3 (PR3)

A6.1 Fdp e/ou Fd

$$f(x) = \frac{1}{|\alpha|\Gamma(\beta)}\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right), \qquad \beta > 0 \tag{A6.1}$$

em que $\Gamma(u)$ representa a função gama (função **EXP(GAMMALN(*u*))**, em *EXCEL*).

A variável padronizada *y* é definida por:

$$y = \frac{x-\xi}{\alpha} \tag{A6.2}$$

sendo uma variável aleatória com fd gama, com parâmetro de forma β. As respectivas fdp e fd são dadas por:

$$f(y) = \frac{y^{\beta-1}e^{-y}}{\Gamma(\beta)} \tag{A6.3}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= F(y), & \alpha > 0, \quad x > \xi \\ &= 1 - F(y), & \alpha < 0, \quad x < \xi \end{aligned} \tag{A6.4}$$

A6.3 Estimativa dos Parâmetros

A6.3.2 Método dos Momentos (MM)

Os parâmetros são estimados por (Bobée e Robitaille, 1977):

$$\hat{\beta} = \frac{4}{\hat{\gamma}_c^2} \tag{A6.13}$$

$$\hat{\alpha} = sign(\hat{\gamma}_c)\frac{s_x}{\sqrt{\hat{\beta}}} \tag{A6.14}$$

em que sign(•) representa o sinal do respectivo argumento.

$$\hat{\xi} = \bar{x} - \hat{\alpha}\hat{\beta} \tag{A6.15}$$

$$\hat{\gamma}_c = \hat{\gamma}_{sb}\left[\left(1 + \frac{6.51}{N} + \frac{20.2}{N^2}\right) + \left(\frac{1.48}{N} + \frac{6.77}{N^2}\right)\hat{\gamma}_{sb}^2\right] \tag{A6.16}$$

$$\hat{\gamma}_{sb} = \frac{M_3}{M_2^{3/2}} \tag{A6.17}$$

em que M_i representa o momento centrado da amostra, de ordem *i*.

A6.4 Obtenção dos Quantis

Os quantis podem ser obtidos através das expressões equivalentes:

$$\hat{x}_F = \hat{\xi} + \hat{\alpha} y_F\left(\hat{\beta}\right) \tag{A6.26}$$

ou

$$\hat{x}_F = \hat{\mu}_x + \hat{\sigma}_x K_F\left(\gamma_{P3}\right) \tag{A6.27}$$

em que K_F, designado de factor de frequência, é uma v.a. com fd Pearson 3, com $\mu_K = 0$, $\sigma_K = 1$ e coeficiente de assimetria $\hat{\gamma}_{P3}$ (estimando os parâmetros com o método dos momentos: $\hat{\gamma}_{P3} = \hat{\gamma}_c$). À medida que o coeficiente de assimetria tende para zero, o parâmetro de forma β tende para infinito, e a fd de Pearson converge para a fd Normal. Os valores $\hat{\mu}_x$ e $\hat{\sigma}_x$ apenas correspondem à média e desvio padrão amostrais se o método de estimativa de parâmetros tiver sido o método dos momentos.

A Eq. (A6.26) é utilizada para valores de $\hat{\gamma}_{P3}$ não muito próximos de zero e a Eq. (A6.27) no caso contrário.

Se $\left|\hat{\gamma}_{P3}\right| > 0.1$, calcula-se

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x), \qquad se \quad \alpha > 0 \\ &= 1 - F(x), \quad se \quad \alpha < 0 \end{aligned} \tag{A6.29}$$

seguido de $y_F = F^{-1}(y)$ (função **GAMMAINV(F(*y*); $\hat{\beta}$; 1)**, em *EXCEL*). Finalmente, o quantil pretendido obtém-se por aplicação da Eq. (A6.26).

Se $\left|\hat{\gamma}_{P3}\right| < 0.1$, o processo acima descrito não pode ser utilizado, pois a função **GAMMAINV** perde rigor para valores daquele coeficiente perto do zero e não tem solução quando este é nulo. Neste caso, a aproximação para o factor de frequência apresentada por Wilson-Hilferty (Henriques, 1990), fornece bons resultados para aquele intervalo de variação do coeficiente de assimetria (Chowdhury e Stedinger, 1991):

$$K_F = \frac{2}{\hat{\gamma}_{P3}}\left\{\left[\left(z_F - \frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6}\right)\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6} + 1\right]^3 - 1\right\} \tag{A6.30}$$

em que z_F é valor da normal padronizada correspondente à probabilidade pretendida, obtida como explicado para a função de distribuição normal (função **NORMSINV(*F*)**, em *EXCEL*). No entanto, como a Eq. (A6.30) é indeterminada para $\hat{\gamma}_{P3} = 0$, é preferível utilizá-la expandindo a potência do membro direito, o que conduz a (Chowdhury e Stedinger, 1991):

$$K_F = z_F + \left(z_F^2 - 1\right)\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6} + \frac{1}{3}\left(z_F^3 - 6z_F\right)\left(\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6}\right)^2 - \left(z_F^2 - 1\right)\left(\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6}\right)^3 + z_F\left(\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6}\right)^5 \tag{A6.30b}$$

Finalmente, o quantil pretendido é estimado por aplicação da Eq. (A6.27).

A6.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

Se $\left|\hat{\gamma}_{P3}\right| > 0.1$, obtém-se *y* por aplicação da Eq. (A6.2), com as estimativas $\hat{\alpha}$ e $\hat{\xi}$. Seguidamente, em *EXCEL*, o valor de *F*(*y*) é obtido através da função **GAMMADIST(*y*; $\hat{\beta}$; 1; TRUE)**. Finalmente, o valor de *F*(*x*) é obtido por aplicação da Eq. (A6.4).

Se $|\hat{\gamma}_{P3}| < 0.1$, obtém-se o valor de K a partir da expressão:

$$K = \frac{x - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x} \qquad \text{(A6.32)}$$

Em seguida a Eq. (A6.30) é resolvida em ordem a z_F, o que conduz a:

$$z = \frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6} + \frac{6}{\hat{\gamma}_{P3}}\left[\left(\frac{\hat{\gamma}_{P3}}{2}K + 1\right)^3 - 1\right] \qquad \text{(A6.35)}$$

Como a Eq. (A6.35) é indeterminada para $\hat{\gamma}_{P3} = 0$, é preferível utilizá-la expandindo a potência do membro direito, o que conduz a:

$$z = \frac{\hat{\gamma}_{P3}}{6} + 18\left(\frac{K}{2}\right) + 18\hat{\gamma}_{P3}\left(\frac{K}{2}\right)^2 + 6\hat{\gamma}_{P3}^2\left(\frac{K}{2}\right)^3 \qquad \text{(A6.35b)}$$

Finalmente, $F(x) = \Phi(z)$, com Φ(z) calculado como para a função de distribuição normal (função **NORMSDIST(*z*)**, em *EXCEL*).

ANEXO 7 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO GAMA A 2 PARÂMETROS (GAM)

A7.1 Fdp e/ou Fd

Esta função constitui um caso particular da PR3, com $\xi = 0$, isto é:

$$f(x) = \frac{1}{|\alpha|\Gamma(\beta)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right), \qquad \beta > 0 \tag{A7.1}$$

Sendo a variável padronizada *y* definida por:

$$y = \frac{x}{\alpha} \tag{A7.2}$$

e as respectivas fdp e fd dadas por:

$$f(y) = \frac{y^{\beta-1}e^{-y}}{\Gamma(\beta)} \tag{A7.3}$$

e

$$\begin{aligned} F(x) &= F(y), \qquad \alpha > 0, \quad x > 0 \\ &= 1 - F(y), \quad \alpha < 0, \quad x < 0 \end{aligned} \tag{A7.4}$$

No entanto, para as séries a considerar, esta função só tem interesse quando $\alpha > 0$, já que não há caudais negativos.

A7.3 Estimativa dos Parâmetros

A7.3.3 Método da Máxima Verosimelhança (MV)

Os parâmetros são estimados por (Kite, 1980):

$$C = \ln \bar{x} - \overline{\ln x} \tag{A7.13}$$

para $0 \le C \le 0.5772$ (erro inferior a 0.0088%):

$$\hat{\beta} = \frac{0.5000876 + 0.1648852C - 0.054427C^2}{C} \tag{A7.14}$$

para $0.5772 < C \le 17$ (erro inferior a 0.00554%):

$$\hat{\beta} = \frac{8.898919 + 9.05995C + 0.9775373C^2}{C\left(17.79728 + 11.968477C + C^2\right)} \tag{A7.15}$$

e, finalmente:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\hat{\beta}} \tag{A7.16}$$

A7.4 Obtenção dos Quantis

Os quantis podem ser obtidos através das expressões equivalentes, correspondentes às Eqs. (A6.26), com $\hat{\xi} = 0$, e (A6.27), isto é:

$$\hat{x}_F = \hat{\alpha} y_F\left(\hat{\beta}\right) \quad \text{(A7.17)}$$

ou

$$\hat{x}_F = \hat{\mu}_x + \hat{\sigma}_x K_F\left(\gamma_{GAM}\right) \quad \text{(A7.18)}$$

Primeiro, γ_{GAM} é estimado com (Henriques, 1990):

$$\gamma_{GAM} = sign(\hat{\alpha})\frac{2}{\sqrt{\hat{\beta}}} \quad \text{(A7.18b)}$$

Se $\gamma_{GAM} > 0.1$, calcula-se *F*(*y*) com a Eq. (A6.29), $y_F = F^{-1}(y)$ com a função **GAMMAINV(F(*y*); $\hat{\beta}$; 1)** do *EXCEL* e o quantil pretendido com a Eq. (A7.17).

Se $0 < \gamma_{GAM} < 0.1$, calcula-se primeiro o valor do factor de frequência, com a Eq. (A6.30b). Estima-se:

$$\hat{\mu}_x = \hat{\alpha}\hat{\beta} \quad \text{(A7.18c)}$$

e

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\alpha}\sqrt{\hat{\beta}} \quad \text{(A7.18d)}$$

e, de seguida, estima-se o quantil pretendido por aplicação da Eq. (A7.18).

A7.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor do coeficiente de assimetria é obtido por aplicação da Eq. (A7.18b).

Se $\gamma_{GAM} > 0.1$, obtém-se *y* por aplicação da Eq. (A7.2), com o valor estimado $\hat{\alpha}$, e o valor de *F*(*y*) é obtido através da função **GAMMADIST(*y*; $\hat{\beta}$; 1; true)** do *EXCEL*. Finalmente, o valor de *F*(*x*) é obtido por aplicação da Eq. (A7.4).

Se $0 < \gamma_{P3} < 0.1$, então obtém-se o valor de *K* a partir das Eqs. (A6.32), (A7.18c) e (A.7.18d), *z* a partir da Eq. (A6.35b) e, finalmente, $F(x) = \Phi(z)$, com $\Phi(z)$ calculado como para a função de distribuição normal (função **NORMSDIST(*z*)**, em *EXCEL*).

ANEXO 8 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO LOG-PEARSON TIPO 3 (LP3)

A8.1 Fdp e/ou Fd

Se $u = \ln x$ é PR3 então x é LP3.

$$f(x) = \frac{1}{x|\alpha|\Gamma(\beta)}\left(\frac{\ln x - \xi}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{\ln x - \xi}{\alpha}\right)\right] \tag{A8.1}$$

em que ξ, α e β são os parâmetros de localização, escala e forma, respectivamente, da variável transformada *u*, ou seja, ξ é um parâmetro de escala e α e β são parâmetros de forma no espaço da variável x.

Se $\gamma_x < CV_x^3 + 3CV_x$, então $\alpha < 0$, $0 < x \le \exp(\xi)$, γ_u<0 e existem todos os momentos;

se $\gamma_x = 0$ a fd é a Log-Normal;

se $\gamma_x > CV_x^3 + 3CV_x$, então α>0, $\exp(\xi) \le x < +\infty$, γ_u pode ser positivo ou negativo e só há momentos de ordem inferior a $1/\alpha$.

Podemos definir a variável padronizada:

$$y = \frac{\ln x - \xi}{\alpha} \tag{A8.2}$$

e as respectivas fdp e fd:

$$f(y) = \frac{y^{\beta-1}e^{-y}}{\Gamma(\beta)} \tag{A8.3}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= F(y), \qquad \alpha > 0 \\ &= 1 - F(y), \quad \alpha < 0 \end{aligned} \tag{A8.4}$$

A8.3 Estimativa dos Parâmetros

A8.3.1 Método dos Momentos, no Espaço Real (MM)

A relação entre os 3 primeiros momentos em relação à origem e α é dada por (Arora e Singh, 1989):

$$\underbrace{\frac{\ln\mu_3' - 3\ln\mu_x}{\ln\mu_2' - 2\ln\mu_x}}_{B} = \frac{3\ln(1-\alpha) - \ln(1-3\alpha)}{2\ln(1-\alpha) - \ln(1-2\alpha)} \tag{A8.5}$$

donde se pode deduzir:

$$\begin{cases} \alpha = 1/3 & \Rightarrow \quad B \to +\infty \\ \alpha = 0 & \Rightarrow \quad B = 3 \\ \alpha \to -\infty & \Rightarrow \quad B = 2 \end{cases} \tag{A8.6}$$

O valor de B é estimado por substituição dos momentos em relação à origem, μ_x, μ_2' e μ_3', pelos respectivos momentos amostrais, $\bar{x}$, M_2' e M_3', no membro esquerdo da Eq. (A8.5). A estimativa de α (resolução da Eq. A8.5) efectua-se numericamente de diferentes formas, consoante o valor obtido para B ($\hat{B}$), não se considerando valores de $\hat{B} < 2.03784$ a que já correspodem valores de $\hat{\alpha} < -4000$, nem de $\hat{B} > 6$ a que já correspondem valores de $\hat{\alpha} > 0.3$.

Para $2.03784 \le \hat{B} \le 2.944$ ($\hat{\alpha} > 0$) o valor de $\hat{\alpha}$ tem de se obter por interpolação linear a partir dos valores apresentados no Quadro A8.1 (Arora e Singh, 1989);

Quadro A8.1 Valores de α e B para utilizar no método directo dos momentos aplicado à LP3

□	B
-4000.00000	2.03784
-3000.00000	2.03932
-2000.00000	2.04162
-1000.00000	2.04623
-500.00000	2.05195
-250.00000	2.05923
-200.00000	2.06201
-125.00000	2.06873
-100.00000	2.07242
-50.00000	2.08654
-25.00000	2.10634
-12.50000	2.13498
-10.00000	2.14684
-5.00000	2.19521
-2.50000	2.26716
-2.00000	2.29663
-1.25000	2.36969
-1.00000	2.40942
-0.50000	2.54794
-0.40000	2.59470
-0.33333	2.63252
-0.25000	2.69009
-0.20000	2.73193
-0.12500	2.80904
-0.10000	2.83972
-0.06667	2.88561
-0.05000	2.91106
-0.04000	2.92725
-0.03333	2.93845
-0.02500	2.95293

$$B = \left[3\ln(1-\alpha) - \ln(1-3\alpha)\right] / \left[2\ln(1-\alpha) - \ln(1-2\alpha)\right]$$

Fonte: Arora e Singh (1989)

para $2.944 < \hat{B} < 3.065$ $\left(|\hat{\alpha}| < 0.03\right)$ vem (Bobée e Robitaille, 1975, em Henriques, 1990):

$$\hat{\alpha} = \frac{\left(\hat{B} - 3\right)}{\left[1 + \sqrt{5\hat{B} - 14}\right]} \tag{A8.7}$$

para $3.065 \le \hat{B} \le 6$ vem (Kite, 1988):

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{A + 3} \tag{A8.8}$$

com:

$$A = -0.47157 + 1.99955C, \quad \text{para} \quad 3.065 \leq \hat{B} \leq 3.5$$
$$A = -0.23019 + 1.65262C + 0.20911C^2 - 0.0457C^3, \quad \text{para} \quad 3.5 < \hat{B} \leq 6 \qquad \text{(A8.9)}$$

$$C = \frac{1}{\hat{B} - 3} \qquad \text{(A8.10)}$$

Finalmente, uma vez obtido $\hat{\alpha}$, os restantes parâmetros são estimados com:

$$\hat{\beta} = \frac{\ln M_2^{'} - 2\ln \bar{x}}{\ln(1-\hat{\alpha})^2 - \ln(1-2\hat{\alpha})} \qquad \text{(A8.11)}$$

$$\hat{\xi} = \ln \bar{x} + \hat{\beta}\ln(1-\hat{\alpha}) \qquad \text{(A8.12)}$$

A8.4 Obtenção dos Quantis

Os logarítmos dos quantis podem ser obtidos através das expressões equivalentes:

$$\ln \hat{x}_F = \hat{\xi} + \hat{\alpha} y_F\left(\hat{\beta}\right) \qquad \text{(A8.22)}$$

ou

$$\ln \hat{x}_F = \hat{\mu}_u + \hat{\sigma}_u K_F\left(\gamma_u\right) \qquad \text{(A8.23)}$$

Primeiro, γ_u é estimado com:

$$\hat{\gamma}_u = sign\left(\hat{\alpha}\right)\frac{2}{\sqrt{\hat{\beta}}} \qquad \text{(A8.24)}$$

Se $\left|\gamma_u\right| > 0.1$, calcula-se:

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x), \quad & se \quad \alpha > 0 \\ &= 1 - F(x), \quad & se \quad \alpha < 0 \end{aligned} \qquad \text{(A8.25)}$$

sendo $y_F = F^{-1}(y)$ obtido a partir da função **GAMMAINV(F(*y*); $\hat{\beta}$; 1)** do *EXCEL*. Finalmente, o quantil pretendido é:

$$\hat{x}_F = \exp\left[\hat{\xi} + \hat{\alpha} y_F\left(\hat{\beta}\right)\right] \qquad \text{(A8.26)}$$

Se $\left|\gamma_u\right| < 0.1$, o factor de frequência é calculado com a Eq. (A6.30b), com $\hat{\gamma}_u$ no lugar de $\hat{\gamma}_{P3}$. Estima-se (Arora e Singh, 1989):

$$\hat{\mu}_u = \hat{\xi} + \hat{\alpha}\hat{\beta} \qquad \text{(A8.26b)}$$

e

$$\hat{\sigma}_u = \left|\hat{\alpha}\right|\sqrt{\hat{\beta}} \qquad \text{(A8.26c)}$$

e, de seguida, estima-se o quantil pretendido por aplicação sucessiva das Eqs. (A8.23) e (A8.26).

A8.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor do coeficiente de assimetria dos logaritmos de *x* é obtido por aplicação da Eq. (A8.24).

Se $|\gamma_u| > 0.1$, obtém-se *y* por aplicação da Eq. (A8.2), utilizando as estimativas $\hat{\alpha}$ e $\hat{\xi}$. O valor de *F*(*y*) é obtido através da função **GAMMADIST(*y*; $\hat{\beta}$; 1; true)** do *EXCEL*. Finalmente, o valor de *F*(*x*) é obtido por aplicação da Eq. (A8.4).

Se $|\gamma_u| < 0.1$, então obtém-se o valor de *K* a partir da expressão:

$$K = \frac{\ln x - \hat{\mu}_u}{\hat{\sigma}_u} \tag{A8.27}$$

em que o valor médio e desvio padrão dos logaritmos de *x* é dado pelas Eqs. (A8.26b) e (A8.26c). De seguida, *z* é obtido através da Eq. (A6.35b), com $\hat{\gamma}_u$ no lugar de $\hat{\gamma}_{P3}$, e finalmente, $F(x) = \Phi(z)$, com $\Phi(z)$ calculado como para a função de distribuição normal (função **NORMSDIST(*z*)**, em *EXCEL*).

ANEXO 9 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO GERAL DE EXTREMOS (GEV)

A9.1 Fdp e/ou Fd

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1 - \frac{\kappa(x-\xi)}{\alpha}\right]^{1/\kappa}\right\} \qquad \kappa \neq 0 \qquad \text{(A9.1)}$$

em que ξ, α e κ são os parâmetros de localização, escala e forma, respectivamente.

Se $\kappa > 0$ então $x < \left(\xi + \frac{\alpha}{\kappa}\right)$: esta função é utilizada em Hidrologia sobretudo na caracterização de caudais mínimos, sendo conhecida como a **função de extremos tipo III** (relacionada com a conhecida função de Weibull).

Se $\kappa < 0$ então $x > \left(\xi + \frac{\alpha}{\kappa}\right)$: conhecida como **função de extremos tipo II (**ou Fréchet ou Log-Gumbel).

A9.3 Estimativa dos Parâmetros

A9.3.1 Método dos Momentos Lineares (Momentos-L)

Os parâmetros são estimados por (Stedinger *et al*., 1993):

$$\hat{\kappa} = 7.859\hat{c} + 2.9554\hat{c}^2 \qquad \text{(A9.2)}$$

com:

$$\hat{c} = \frac{2}{3+\hat{\tau}_3} - \frac{\ln 2}{\ln 3} \qquad \text{(A9.3)}$$

e em que $\hat{\tau}_3$ representa a estimativa da 3ª razão entre momentos-L τ_3. Seguidamente:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\kappa}\hat{\lambda}_2}{\Gamma(1+\hat{\kappa})\left(1-2^{-\hat{\kappa}}\right)}, \qquad \text{(A9.4)}$$

em que $\hat{\lambda}_2$ é estimativa do 2º momento linear λ_2 e $\Gamma(u)$ representa a função gama (função **EXP(GAMMALN(*u*))**, em *EXCEL*). Finalmente:

$$\hat{\xi} = \bar{x} + \frac{\hat{\alpha}\left[\Gamma(1+\hat{\kappa})-1\right]}{\hat{\kappa}} \qquad \text{(A9.5)}$$

A9.4 Obtenção dos Quantis

A resolução da Eq. (A9.1) em ordem a *x* conduz a:

$$\hat{x}_F = \hat{\xi} + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\kappa}}\left[1-(-\ln F)^{\hat{\kappa}}\right] \qquad \text{(A9.6)}$$

Note-se que a Eq. (A9.6) pode ser escrita como:

$$\hat{x}_F = \hat{\xi} + \hat{\alpha} y_F \qquad \text{(A9.6b)}$$

em que y é a variável padronizada GEV, dada por:

$$y_F = \frac{1}{\hat{\kappa}}\left[1-\left(-\ln F\right)^{\hat{\kappa}}\right] \qquad \text{(A9.6c)}$$

A9.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor da função de distribuição é dado pela Eq. (A9.1).

ANEXO 10 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE EXTREMOS TIPO I (Gumbel)

A10.1 Fdp e/ou Fd

Esta função corresponde à que se obtém quando na GEV $\kappa = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\exp\left[-\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right)\right] \qquad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \alpha > 0 \tag{A10.1}$$

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right)\right] \tag{A10.2}$$

A variável padronizada y é definida como:

$$y = \frac{x-\xi}{\alpha} \tag{A10.2b}$$

sendo as respectivas fdp e fd dadas por:

$$g(y) = e^{-y-e^{-y}} \tag{A10.2c}$$

e

$$G(y) = e^{-e^{-y}} \tag{A10.2d}$$

Dada uma probabilidade $p = G(y_p)$, o valor y_p obtém-se por solução da Eq. (A10.2c) em ordem a y, isto é:

$$y_p = -\ln(-\ln p) \tag{A10.2e}$$

Note-se que $p = F(x_p) = G(y_p)$.

A10.3 Estimativa dos Parâmetros

A10.3.1 Método dos Momentos Lineares (Momentos-L)

Os parâmetros são estimados por (Stedinger *et al.*, 1993):

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\lambda}_2}{\ln 2} \tag{A10.9}$$

$$\hat{\xi} = \bar{x} - 0.5772\hat{\alpha} \tag{A10.10}$$

em que $\hat{\lambda}_2$ é estimativa do 2º momento linear λ_2

A10.4 Obtenção dos Quantis

Os quantis obtêm-se por:

$$\hat{x}_F = \hat{\xi} + \hat{\alpha}[-\ln(-\ln F)] \tag{A10.19}$$

A10.5 Obtenção do Valor da Função de Distribuição

O valor da função de distribuição obtém-se por aplicação da Eq. (A10.2).

ATENÇÃO: Estas fórmulas são para máximos. No caso de mínimos podem ser utilizadas desde que se trabalhe com $-x_i$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arora, K. e V.P. Singh (1989). A Comparative Evaluation of the Estimators of the Log Pearson Type (LP) 3 Distributions, *J. Hydrol*., 105:19-37.

Bobée, B. e R. Robitaille (1977). The Use of the Pearson Type 3 and Log Pearson Type 3 Distributions Revisited, *Water Resour. Res*.,13(2):427-442.

Chowdhury, J.U. e J.R. Stedinger (1991). Confidence Interval for Design Floods with Estimated Skew Coefficient, *J.Hydraul. Eng*., 117(7):811-831.

Haan, C.T. (1977). *Statistical Methods in Hydrology*, Iowa State University Press, Ames, Iowa.

Henriques, A.G. (1990). *Modelos de Distribuição de Frequência de Caudais de Cheia*, Dissertação apresentada ao Instituto Superior Técnico para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil.

Kite, G.W. (1988). *Frequency and Risk Analysis in Hydrology*, Water Resources Publications, U.S.A.

Stedinger, J.R. (1980). Fitting Log Normal Distributions to Hydrologic Data, *Water Resour. Res*., 16(3):481-490.

Stedinger, J.R., R.M. Vogel e E. Foufoula-Georgiou (1993). Frequency Analysis of Extreme Events, em: *Handbook of Hydrology*, D.R. Maidment (Editor), McGraw-Hill, Inc.