INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1º teste de Matemática 1

6 de Novembro 2013 - Duração 1h30

I (5 valores)

1. Indique o domínio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$. A função f será injetiva em $\mathbb{R}$? Justifique a sua resposta.

3. Indique a expressão para $f \circ f$ onde $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$.

4. Calcule $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arcsin(x)}{1-x}$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\arcsin(x)}{1-x}$.

5. Derive $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$.

6. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^{x^2-1}$ no ponto de abcissa 1.

7. Investigue a existência de derivada de $f(x) = |x| \cos x$ em $x = 0$.

8. Seja $f(x) = \sin x\, \cos x + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Determine c de modo a que $f''(x) + 4f(x) = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

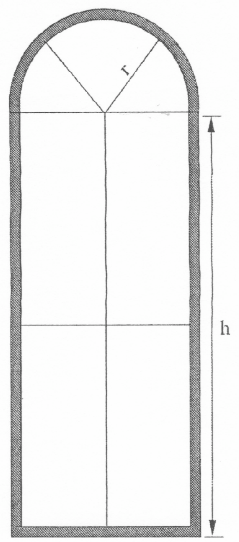
9. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x}$.

10. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}$.

II (5 valores)

1. Construa a aproximação linear da função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ num ponto a do seu domínio.

2. Pretende-se construir uma janela de acordo com a seguinte figura, em que a parte superior é um semi-círculo de raio r e a parte inferior um retângulo de altura h. Quais deverão ser os valores de r e h de modo a maximizar a entrada de luz sabendo que o material disponível só permite construir uma moldura em torno da janela com 10 metros.



3. Estude a função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (domínio e assíntotas, monotonia e extremos, concavidades e pontos de inflexão) e esboce o seu gráfico.

UMA RESOLUÇÃO DO 1º TESTE (6/11/13)

$\boxed{\text{I}}$

(1) $D_f = \{(x,y) : x \neq 0, \frac{1-x}{x} \geq 0\} =]0,1]$ //

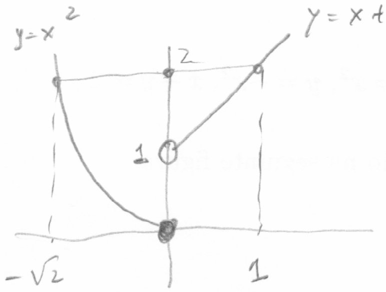
$\boxed{\text{CA}}$ $\left.\begin{array}{l}\frac{1-x}{x} \geq 0 \\ x \neq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow (1-x \geq 0 \wedge x > 0) \vee (1-x \leq 0 \wedge x < 0)$

$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x > 0 \vee \underbrace{x \geq 1 \wedge x < 0}_{\text{Impossível.}}$

$\Updownarrow$

$0 < x \leq 1$

(2)



A função não é injetiva em $\mathbb{R}$!
De facto, considerando por exemplo;

$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2$

$f(1) = 1+1 = 2$

conclui-se q. existem elementos distintos que têm a mesma imagem por f.

(3) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)}\ \ln(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}\ln x}\ \ln(\sqrt{x}\ln x)$ //

(4) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\overset{\nearrow \frac{\pi}{2}}{\arcsin(x)}}{\underset{\searrow 0^+}{1-x}} = +\infty$ $\quad 0^+ \ (x<1 \Rightarrow 1-x>0)$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\overset{\nearrow -\frac{\pi}{2}}{\arcsin(x)}}{\underset{\searrow 2}{1-x}} = -\dfrac{\pi}{4}$ //

(5) $f'(x) = \left(\left(\ln(x^2+1)\right)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)\right)'\left(\ln(x^2+1)\right)^{-1/2}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}$ //

(6) A EQ. DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE f NUM PT $(a, f(a))$
É DADA POR $\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$

NESTE CASO $a = 1$ //

TLM-SB

$$f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$$

$$f'(x) = \left(e^{x^2-1}\right)' = (x^2-1)' e^{x^2-1} = 2x\, e^{x^2-1} \Rightarrow f'(1) = 2 e^0 = 2$$

Logo a equação é $\underline{y = f(1) + f'(1)(x-1)}$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1 + 2(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = 2x-1}$$

(7) $f(x) = |x| \cos x = \begin{cases} x \cos x, & x \geq 0 \\ -x \cos x, & x < 0 \end{cases}$

$\exists f'(0) \Leftrightarrow \exists f'_d(0) = f'_e(0)$

Ora, $f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cancel{x} \cos x - 0}{\cancel{x} - 0}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = \cos(0) = 1$

$f'_e(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\cancel{x} \cos x - 0}{\cancel{x} - 0}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} (-\cos x) = -\cos(0) = -1$

Como $f'_d(0) = 1 \neq f'_e(0) = -1 \Rightarrow \nexists f'(0)$

(8) $f(x) = \sin x \cos x + c, \; c \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (\sin x \cos x + c)' = \cos^2 x - \sin^2 x + 0$

$f''(x) = 2(-\sin x)\cos x - 2 \sin x \cos x = -4 \sin x \cos x$

$f''(x) + 4 f(x) = 0 \Leftrightarrow (-4 \sin x \cos x) + 4(\sin x \cos + c) = 0$

$\Leftrightarrow -4 \cancel{\sin x \cos x} + 4 \cancel{\sin x \cos} + 4c = 0$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \, \operatorname{arctg} x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{R.C}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \, \operatorname{arctg} x + \sin x \frac{1}{1+x^2}}{1} = 0$ //

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{R.C}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ //

$\boxed{II}$

1. Aprox linear à função f em $x = a \in D_f$ é $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$

Se $a \in D_f = \mathbb{R}^+$ Tem-se

$L(a) = f(a) + f'(a)(x-a) = \frac{\ln a}{a} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\ln(a)}{a^2}\right)(x-a)$ //

2. maximizar entrada de luz $\Leftrightarrow$ maximizar a área da janela

Área $= A_{\square} + A_{\frown} = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} \longrightarrow$ MAXIMIZAR

Perímetro $= P_{\sqcup} + P_{\frown} = 2h + 2r + \pi r = 10$

$\Rightarrow 2h = 10 - 2r - \pi r \Rightarrow h = 5 - r - \frac{\pi}{2} r = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) r$

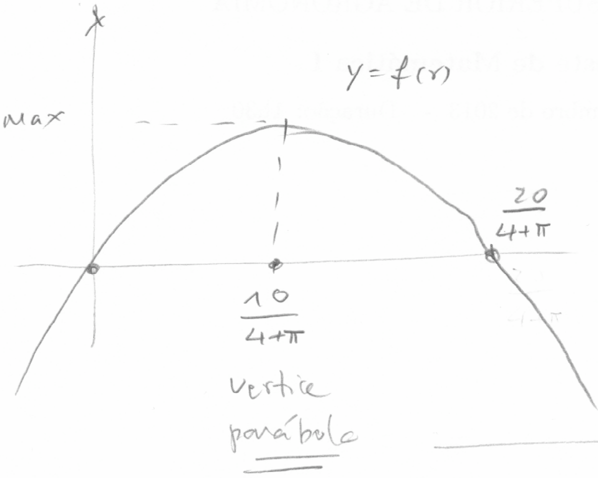
função a maximizar: $f(r) = 2r\underbrace{\left(5 - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)r\right)}_{h} + \frac{\pi}{2} r^2$

$= 10r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi}{2} r^2$

$= 10r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r^2$ c/ $r > 0$

$= r\left(10 - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r\right)$ Parábola c/ concavidade p/ baixo

$$f(r)=0 \Leftrightarrow r=0 \lor r=\frac{20}{4+\pi}$$



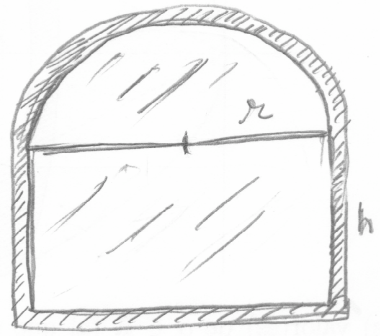
$\longrightarrow$ ou então r: $\underline{f'(r)=0}$

$$\therefore\ r=\frac{10}{4+\pi}\approx\frac{10}{7.14}$$

$$h=5-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)r = 5-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{10}{4+\pi} = 5-\left(\frac{2+\pi}{2}\right)\left(\frac{10}{4+\pi}\right)$$

$$=5-\frac{20+10\pi}{8+2\pi}=\frac{40+\cancel{10\pi}-20-\cancel{10\pi}}{8+2\pi}=\frac{20}{8+2\pi}=\frac{10}{4+\pi}$$

$\therefore$ $\underline{h=r}$



(3) $f(x)=e^{-x^2/2}$ $\qquad f(0)=e^0=1$ $\qquad f(x)=e^{-x^2/2}=0$ Imp.

$D_f=\mathbb{R} \land f$ é cont no ~~seu~~ domínio $\Rightarrow \nexists$ A.V.

A.H.? $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\overbrace{-x^2/2}^{\to-\infty}} = 0 \Rightarrow$ f admite assímptota horizontal $\boxed{y=0}$ à direita e à esquerda

Monotonia & extremos: $f'(x)=\left(e^{-x^2/2}\right)'=\left(-\frac{x^2}{2}\right)'e^{-x^2/2}=-x\underbrace{e^{-x^2/2}}_{>0}$

$$f'(x)=\begin{cases}>0 &, x<0\\ =0 &, x=0\\ <0 &, x>0\end{cases}$$

ASSIM

		0	
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$
f'	$+$	0	$-$

Concavidades & pts de inflexão

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x(-x)\, e^{-x^2/2}$$

$$= (x^2-1)\, e^{-x^2/2}$$

ASSIM

		-1		1	
f	$\cup$	P.I	$\cap$	P.I	$\cup$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

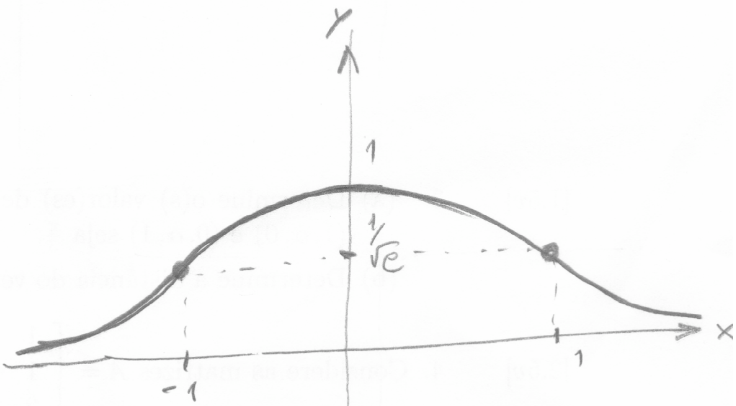
OBS:

$f(1) = f(-1) =$

$= e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Esboço do gráfico:

		-1		0		1	
f	$\nearrow$			MAX			$\searrow$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f	$\cup$	P.I		$\cap$		P.I	$\cup$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$



NOTA: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ é a função densidade de probabilidade da distribuição normal reduzida e vai ser estudada em Matemática II