Exercícios variados de Matemática I

1. Considere as funções,

$$f(x) = \sqrt{-\ln(4-x)}, \qquad g(x) = 4 - e^x.$$

   (a) Indique o domínio de f.
   (b) Calcule f' indicando o respectivo domínio.
   (c) Calcule a expressão de $f \circ g$.
   (d) Justifique que g é invertível em $\mathbb{R}$ e indique a sua inversa.
   (e) Calcule $\lim\limits_{x\to 4^-} ((x-4)f(x))$.

2. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

   (a) Determine o(s) ponto(s) do gráfico de f onde a reta tangente é perpendicular à reta de equação $x + 2y = 0$ e escreva a equação da reta tangente nesse(s) ponto(s).
   (b) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ de modo a que $f(x)$ e $g(x) = (x-a)^2 + b$ tenham a mesma reta tangente no ponto de abcissa $x = 1$, e indique uma equação dessa reta.

3. Utilize uma aproximação linear conveniente para calcular um valor aproximado para $\sin(0.1)$ e converta o resultado para graus.

4. Estude a derivabilidade de f no ponto de abcissa $x = 1$ onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x^2, & x > 1 \\ \operatorname{arctg} x, & x \leq 1. \end{cases}$$

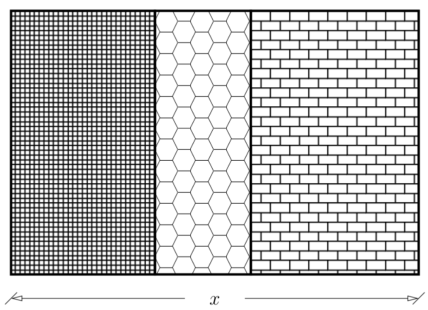
5. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) \neq 0$ para todo o $x \neq 0$, e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = g(a) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

   Mostre que $f'(a) = g'(a)$.

6. 2 lâmpadas de 5 e 40 Watts estão afastadas 6m. Sabendo que a intensidade de iluminação que cada lâmpada produz é diretamente proporcional à sua potência e inversamente proporcional ao quadrado da distância da lâmpada, e que a intensidade de iluminação num dado ponto é a soma das intensidades das iluminações produzidas pelas 2 lâmpadas, determine o ponto menos iluminado entre as 2 lâmpadas.

7. Determine o raio r e a altura h de um cilíndro com volume 16π que minimizam a àrea lateral do cilíndro.

8. Pretende-se cercar 3 canteiros para 3 tipos distintos de flores como na figura abaixo.



Dispõe-se de 40 m de vedação. Quais as dimensões x e y que maximizam a área total?

9. Calcule as seguintes derivadas.

   (a) $\sin^3 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3(x)\cos^3(x)$.
   (b) $\sin(\cos x)$; $\cos(\sin x)$.
   (c) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.
   (d) $\ln(\cos x)$; $\ln(\sin x)$.
   (e) $\sqrt{e^{x^2-1}}$; $\sqrt{(e^x)^2 - 1}$.
   (f) $\ln(\ln x)$.
   (g) $e^{\cos^2 x}$; $e^{sin^2 x}$; $e^{\cos^2 x}e^{\sin^2 x}$.
   (h) $\operatorname{arctg}(x^2)$; $\operatorname{arctg}(\sin x)$; $\operatorname{arctg}(e^x)$.
   (i) $\arcsin(x^2)$; $\arcsin(\cos x)$; $\arcsin(e^x)$.
   (j) $\left(e^x \sin^2 x\right)^2$.
   (k) $\left(e^{\sin x} \ln x\right)^2$.

10. Calcule as seguintes primitivas.

   (a) $P\,(5x^9 - 12x^4 - 4x^3 + 1)$.
   (b) $P\,\frac{3}{\sqrt[6]{x^5}}$.
   (c) $P\left(3\sin x - \frac{\cos x}{6}\right)$.
   (d) $P\left(\sqrt[7]{x^6} - x^3\right)$.
   (e) $P\,(1+2x)^3$
   (f) $P\,\frac{2x-5}{x^3}$.

(g) $P\,\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

11. Justifique que f é primitivável em $\mathbb{R}$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ \cos x, & x > 0, \end{cases}$$

e indique uma primitiva de f.

12. Resolva o PVI, $F''(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $F'(1) = 1$ e $F'(1) = -3$.