Matemática I

Textos de Apoio

Isabel Faria e Pedro C Silva

2011-12

Conteúdo

Capítulo 1

Funções reais de variável real

1.1 Conceitos básicos sobre funções

Uma **função** f é uma correspondência que associa a cada elemento x de um dado conjunto D um único valor y.

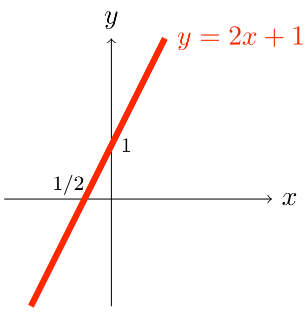
- O elemento x designa-se por *argumento* (ou *variável independente*) e o elemento y por *imagem* de x (ou *variável dependente de* x). Escreve-se usualmente $y = f(x)$.
- D (ou D_f) designa-se por *domínio de* f.
- O conjunto das imagens designa-se por *contra-domínio* ou *conjunto imagem* de f e denota-se por CD_f ou $\mathrm{Im}\, f$.
- Chama-se *gráfico de* f a $G_f = \{(x, y) \; : \; x \in D_f \text{ e } y = f(x)\}$.
- Se D_f e CD_f são subconjuntos de $\mathbb{R}$, f diz-se uma *função real de variável real* e o gráfico de f é, em geral, uma curva em $\mathbb{R}^2$.

São exemplos de funções reais de variável real:

1. A correspondência $f(x) = 2x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$. O gráfico de f é

$$G_f = \{(x, y) \ : \ y = 2x + 1\}$$

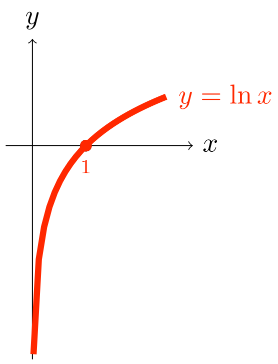
que corresponde à recta de $\mathbb{R}^2$ representada abaixo.



2. A correspondência $x \mapsto ln(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. O domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e gráfico de f é

$$G_f = \{(x, y) \ : \ x > 0 \text{ e } y = \ln x\},$$

que corresponde à curva de $\mathbb{R}^2$ representada abaixo.



3. A correspondência g definida pela seguinte tabela, onde $\mathrm{D}_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

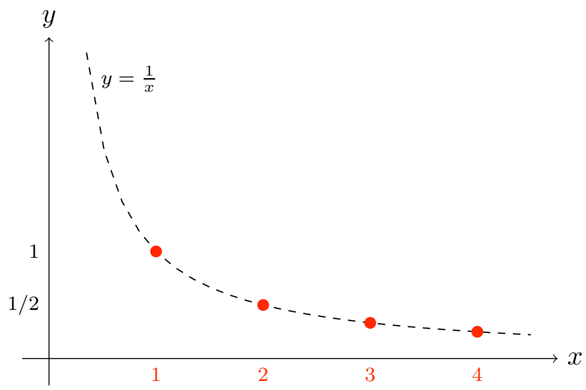
x	g(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

que pode também ser definida como o conjunto de pares ordenados,

$$\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}.$$

4. A sucessão de números reais,

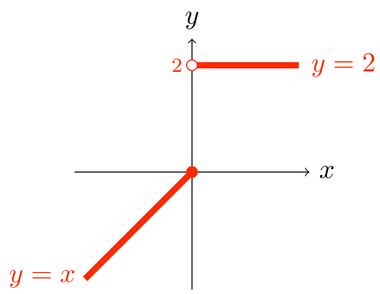
$$n \in \mathbb{N} \mapsto x_n = \frac{1}{n}.$$



5. A correspondência definida por ramos,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

cujo o gráfico se encontra representado na figura abaixo.

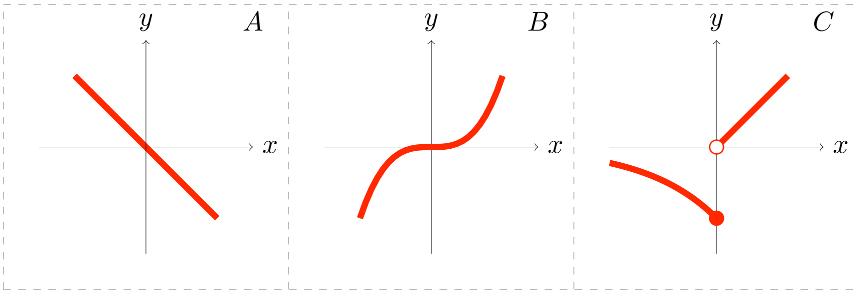


Para uma função real de variável real temos os seguintes conceitos:

- f diz-se *injectiva* se para todos os pontos do domínio $x_1 \neq x_2$ se tem $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f diz-se *crescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f diz-se *estritamente crescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) < f(x_2)$.
- f diz-se *decrescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f diz-se *estritamente decrescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) > f(x_2)$.
- f diz-se *monótona* se é crescente ou decrescente no seu domínio.
- f diz-se *estritamente monótona* se é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio

Uma função estritamente monótona é injectiva mas uma função injectiva não é necessariamente monótona.

Exemplos:



A: f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ logo é injectiva em $\mathbb{R}$;

B: f é estritamente crescente $\mathbb{R}$ logo é injectiva em $\mathbb{R}$;

C: f é injectiva em $\mathbb{R}$ mas não é monótona em $\mathbb{R}$.

Algumas classes importantes de funções reais de variável real

Funções polinomiais

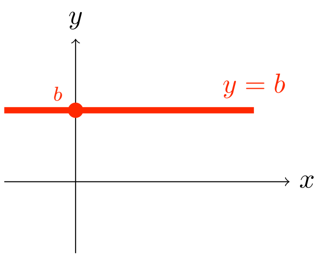
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de domínio $\mathbb{R}$.

- **Função constante** (polinómio de grau 0):

$$f(x) = b \qquad (b \in \mathbb{R})$$

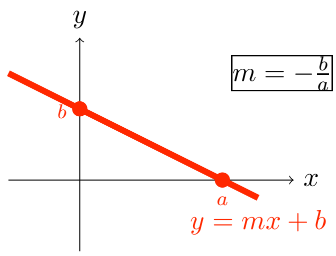
O gráfico de $f(x) = b$ é a recta horizontal $y = b$.



- **Função linear** (polinómio de grau 1):

$$f(x) = mx + b \qquad (m, b \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0)$$

O gráfico de $y = f(x)$ é a recta de declive m que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$. Se (x_1, y_1) e (x_0, y_0) são dois pontos da recta tem-se $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.



- **Funções quadráticas** (polinómio de grau 2):

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0)$$

As raízes (eventualmente complexas) são dadas pela fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o *binómio discriminante*.

1. Se $\Delta > 0$ o polinómio admite as duas raízes reais simples,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e tem-se

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

2. Se $\Delta = 0$ o polinómio admite a raíz real dupla,

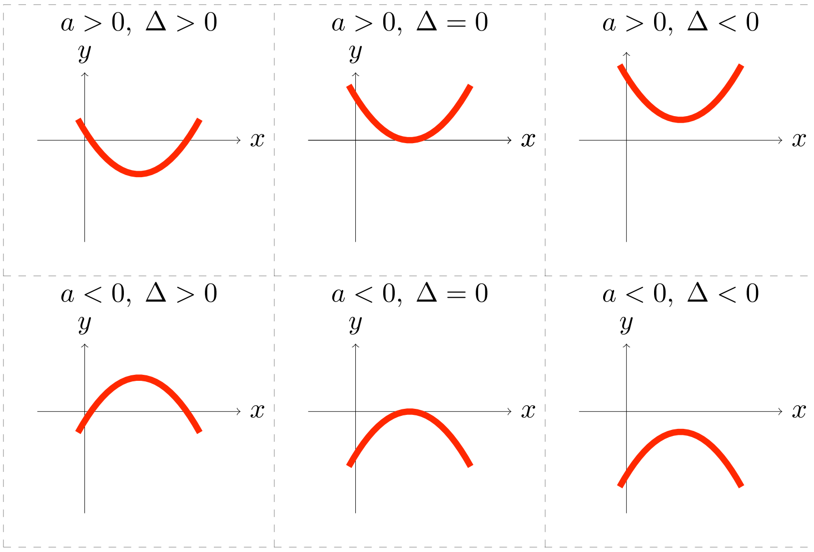
$$\alpha = \frac{-b}{2a},$$

e tem-se

$$f(x) = a(x - \alpha)^2.$$

3. Se $\Delta < 0$ o polinómio não admite raízes reais (polinómio irredutível).

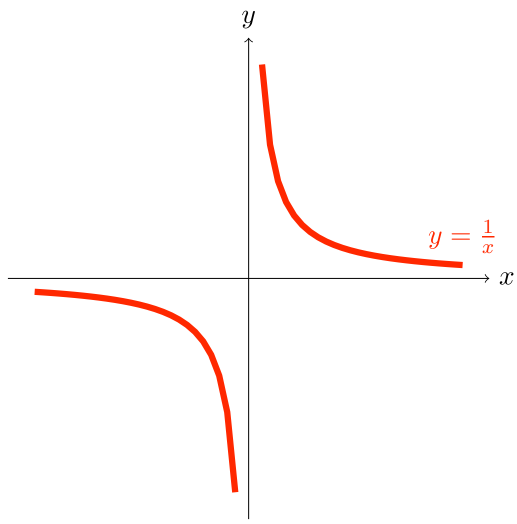
Os gráficos de $f(x)$ são parábolas cuja concavidade está virada para cima (baixo) consoante $a > 0$ ($a < 0$).



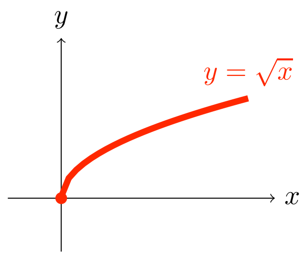
Função potência $f(x) = x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

Alguns exemplos importantes:

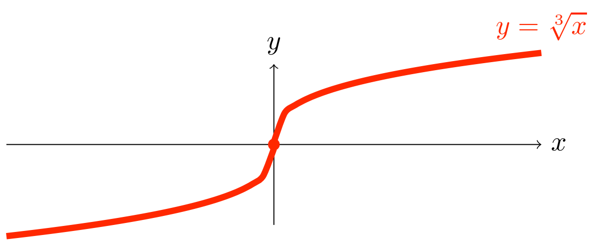
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



- $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R}_0^+$.

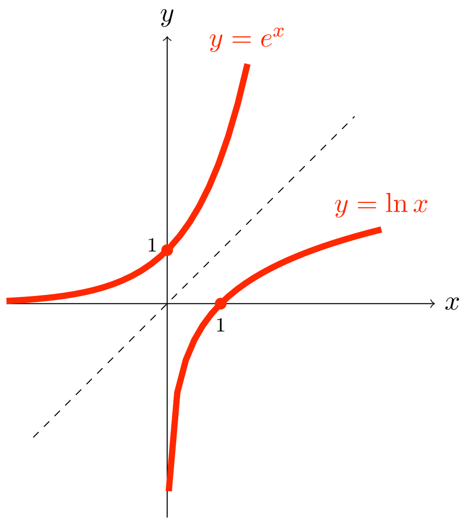


- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R}$.



Função exponencial e função logarítmo

Estritamente crescentes no respectivos domínios ($\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$).



Operações com funções

Soma, produto e quociente de funções

Sejam

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

e $D = D_f \cap D_g$. Define-se:

- **Soma** de f com g,

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para todo o } x \in D.$$

- **Produto** de f e g,

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \quad \text{para todo o } x \in D.$$

- Se $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in D$, define-se ainda o **quociente** de f por g,

$$f/g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad \text{para todo o } x \in D.$$

Exemplo

Consideremos as funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Tem-se:

1. $(f + g)(x) = \ln x + x^2 + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

2. $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1) \ln x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

3. $(f/g)(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Composição de funções

Consideremos as funções

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

Se $\mathrm{CD}_f \subset D_g$, define-se a *composição* de g com f, por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \text{para todo o } x \in D_f.$$

Esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} x \in D_f \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \in D_g \arrow[r, mapsto, "g"] & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemplo

Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$, tem-se:

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{e^x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sqrt{x}}$, para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Função inversa

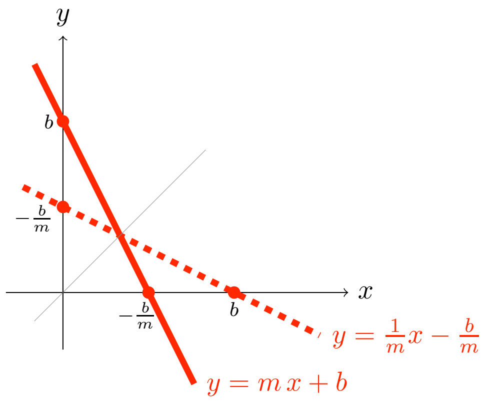
Se f é uma função injectiva num intervalo $I = D_f$ e $J = CD_f$ o respectivo contradomínio, existe uma função $g : J \to I$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo o $x \in I$. A função g é única e chama-se *inversa* de f (em I) que se denota por f^{-1}.

Observações:

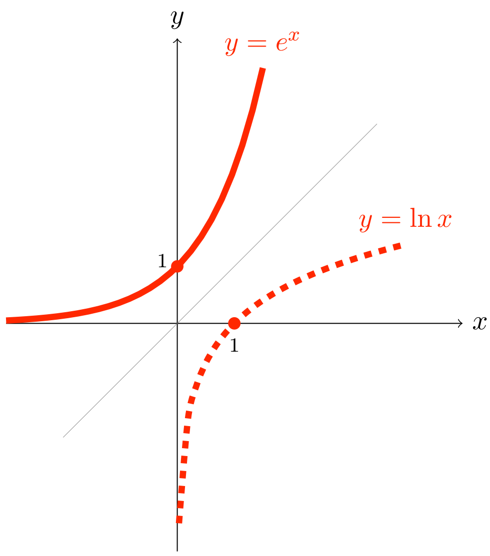
1. - $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo o $x \in D_f$.
   - $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo o $x \in D_{f^{-1}}$.
2. Se $f : D_f \to \mathrm{CD}_f$ então $f^{-1} : D_{f^{-1}} = \mathrm{CD}_f \to \mathrm{CD}_{f^{-1}} = D_f$.
3. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à recta $y = x$.

Exemplos

1. A inversa da função linear $f(x) = mx + b$, com $m \neq 0$, é a função linear $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$.

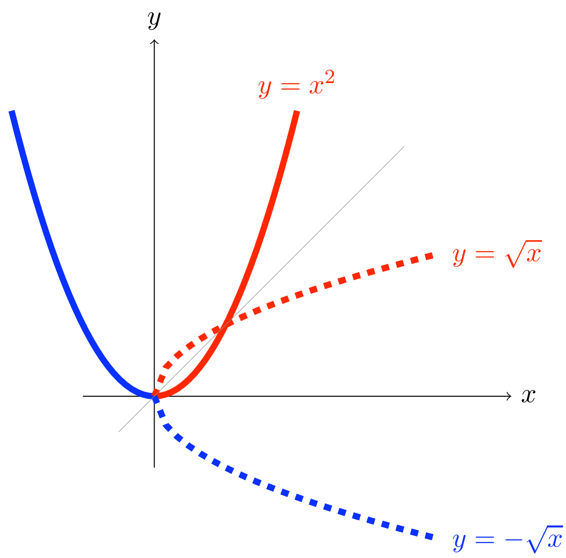


2. Se $f(x) = e^x$ então $f^{-1}(x) = \ln x$, tendo-se $e^{\ln x} = x$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$ e $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



3. A função $f(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$ e com contradomínio $\mathbb{R}_0^+$, é injectiva (estritamente monótona) nos intervalos $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$, tendo-se:

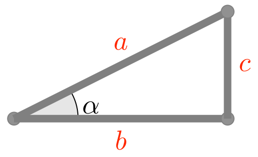
- $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tem inversa $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- $f :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$ tem inversa $f^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$, definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Funções trignométricas e respectivas inversas

Relações trignométricas

Considere o triângulo rectângulo



Relações trignométricas envolvendo os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b}.$$

Valores "notáveis":

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

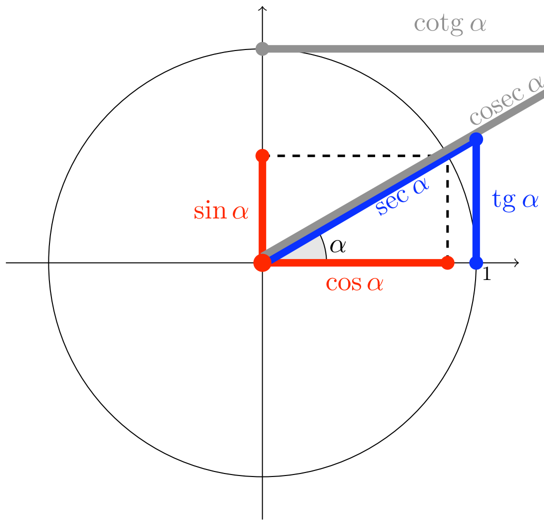
Definem-se ainda

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c}.$$

Têm-se as seguintes relações trignométricas fundamentais:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha, \qquad \operatorname{cotg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Representação das relações trignométricas no círculo trignométrico:



Funções seno e arco seno

A função *seno* é uma função periódica em $\mathbb{R}$ (de período 2π) e toma valores em $[-1,1]$, sendo injectiva nos intervalos da forma $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ com $k \in \mathbb{Z}$. O intervalo *standard* de invertibilidade é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Neste intervalo,

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1],$$

é estritamente crescente e tem inversa estritamente crescente,

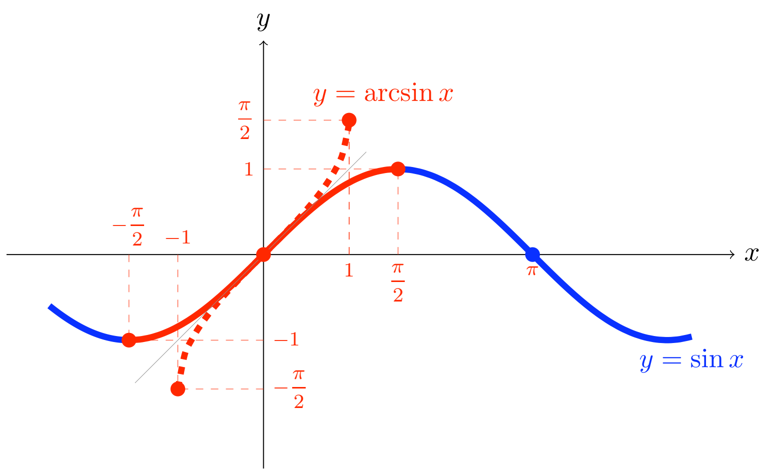
$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

que se designa por *arco seno*, tendo-se,

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in [-1,1],$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Representação dos gráficos das funções seno e arco seno.



Funções cosseno e arco cosseno

A função *cosseno* é uma função periódica em $\mathbb{R}$ (de período 2π) e toma valores em $[-1,1]$, sendo injectiva nos intervalos da forma $[k\pi,(k+1)\pi]$ com $k \in \mathbb{Z}$. O intervalo *standard* de invertibilidade é $[0,\pi]$. Neste intervalo,

$$\cos : \ [0,\pi] \to [-1,1],$$

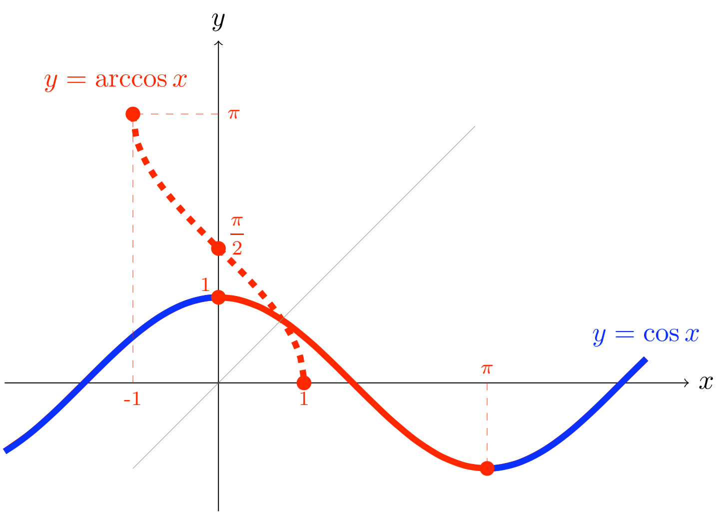
é estritamente decrescente e tem inversa estritamente decrescente,

$$\arccos \ : \ [-1,1] \to [0,\pi]\,,$$

que se designa por *arco cosseno*, tendo-se,

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x, \qquad \text{para todo o } x \in [-1,1], \\ \arccos(\cos x) &= x, \qquad \text{para todo o } x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Representação dos gráficos das funções cosseno e arco cosseno.



Funções tangente e arco tangente

A função *tangente* encontra-se definida em $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ e toma valores em $\mathbb{R}$. Tem período π, sendo injectiva (estritamente crescente) nos intervalos da forma $\left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$ com $k \in \mathbb{Z}$. O intervalo *standard* de invertibilidade é $\left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$, Neste intervalo,

$$\mathrm{tg} : \ \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to \mathbb{R},$$

é estritamente crescente e tem inversa estritamente crescente,

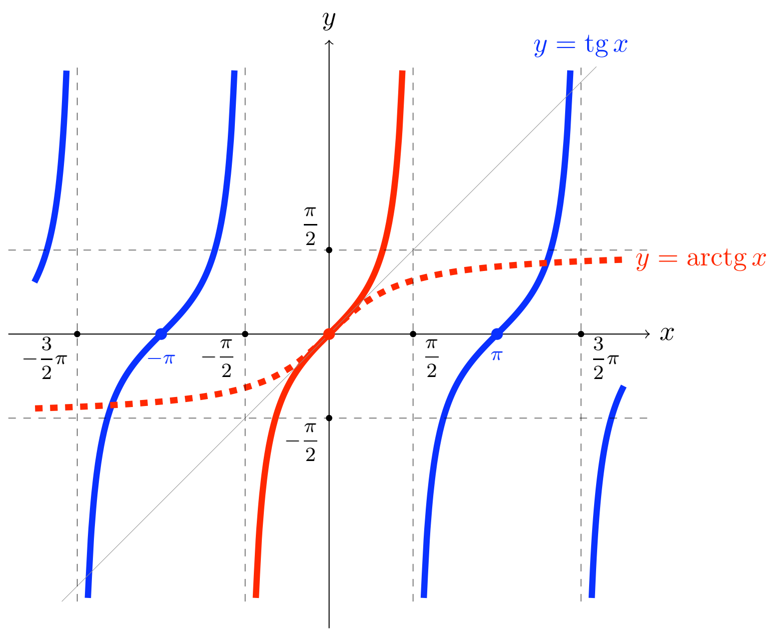
$$\mathrm{arctg} \ : \ \mathbb{R} \to \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

que se designa por função *arco tangente*, tendo-se,

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

Representação dos gráficos das funções tangente e arco tangente.



1.2 Limites e continuidade

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que f está definida à esquerda e/ou à direita de a (a não tem que ser necessariamente um ponto de D_f).

Diz-se que f *converge para* $b \in \mathbb{R}$ *quando* x *tende para* a e escreve-se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

se os valores de f estão arbitrariamente próximos de b para os pontos de D_f que estão suficientemente próximos (e são distintos) de a.

Notas:

- Também se define a noção de limite quando a (ou b) é infinito.
- Se f apenas está definida à direita [esquerda] de a, escrevemos

  $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b \qquad \left[\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b\right].$$

  Os limites anteriores designam-se por *limites laterais.* Quando f está definida à esquerda e à direita do ponto $x = a$, tem-se

  $$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b.$$

Exemplo

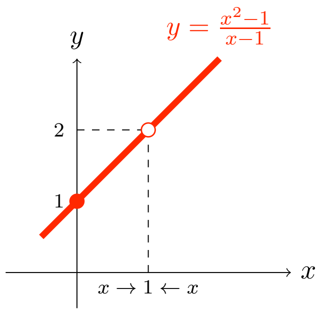
Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ e $a = 1$. Observando a tabela podemos constatar que os valores de $f(x)$ se aproximam de 2 à medida que x se aproxima 1,

x	⋯	.97	.98	.99	1	1.01	1.02	1.03	⋯
f(x)	⋯	1.97	1.98	1.99	ND	2.01	2.02	2.03	⋯

De facto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

O gráfico de $f(x)$ corresponde ao gráfico da função linear $y=x+1$, com o ponto $(1,2)$ removido, pois f não está definida no ponto $a=1$.



Uma função f diz-se *contínua em* $a\in D_f$ se existe o limite de $f(x)$ quando x tende para a e o seu valor é igual a $f(a)$, isto é,

$$f \text{ contínua em } a\in D_f \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Notas:

- As funções polinomiais, potência, exponencial, logarítmo e funções trignométricas e respectivas inversas, são contínuas nos seus domínios.

- As funções que se podem obter como somas, produtos, quocientes e composições de funções contínuas (ou das suas inversas), ainda são contínuas nos seus domínios. Para estas funções o cálculo do limite num ponto do domínio faz-se substituindo o valor da função nesse ponto.

Por exemplo, considerando $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ e $a = 0 \in D_f$, tem-se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} = \frac{\ln(1)}{2} = 0.$$

- Se f apenas está definida à direita [esquerda] de a, incluindo o ponto a, f diz-se contínua em a se

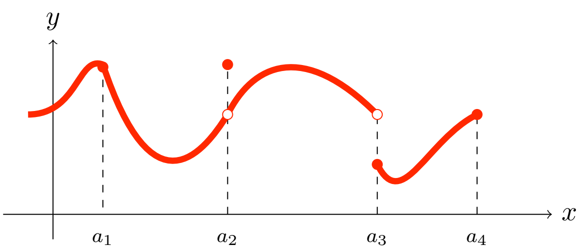
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \left[\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right].$$

Quando f está definida à esquerda e à direita do ponto $x = a$, tem-se

$$f \text{ contínua em } a \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Exemplo

Consideremos a função $y = f(x)$ representada no gráfico abaixo.



- Existe $\lim_{x\to a_1} f(x) = f(a_1)$ pelo que f é contínua em a_1.

- Existe $\lim_{x\to a_2} f(x)$ pois existem e são iguais $\lim_{x\to a_2^-} f(x) = \lim_{x\to a_2^+} f(x)$, mas f não é contínua em a_2 pois $\lim_{x\to a_2} f(x) \neq f(a_2)$.

- Não existe $\lim_{x\to a_3} f(x)$ pois $\lim_{x\to a_3^-} f(x) \neq \lim_{x\to a_3^+} f(x)$, pelo que f também não é contínua em a_3.

- Existe $\lim\limits_{x\to a_4} f(x) = \lim\limits_{x\to a_4^-} f(x) = f(a_4)$, pelo que f é contínua em a_4.

Propriedades operatórias dos limites

Consideremos funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

onde a, b e c podem ser reais ou $\pm\infty$. Tem-se:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c,$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = b\, c,$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c},$

admitindo a extensão das operações aritméticas indicada simbolicamente na seguinte tabela, onde $k \in \mathbb{R}$:

$k \pm \infty = \pm\infty$	$\infty + \infty = \infty$	$\infty - \infty$ indeterm.
$k \times \infty = \infty \quad (k \neq 0)$	$\infty \times \infty = \infty$	$0 \times \infty$ indeterm.
$\frac{\infty}{k} = \infty$; $\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{k}{0} = \infty$; $\frac{0}{k} = 0 \quad (k \neq 0)$	$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ indeterm.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) \overset{0+\infty}{=\!=} +\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{e^x} \overset{\frac{\infty}{0}}{=\!=} \infty.$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \sin x\right)$ é uma indeterminação do tipo $\infty \times 0$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ geradas por funções polinomiais

Seja

$$P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Pondo em evidência o monómio de maior grau mostra-se que

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_m x^m.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ geradas por funções racionais

Considere os polinómios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0, \\ Q(x) &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

de graus m e n, respectivamente. Atendendo ao que foi dito atrás, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & m = n, \\ 0, & m < n, \\ \pm\infty, & m > n, \end{cases}$$

onde o sinal do limite quando $m > n$ depende do sinal de $\dfrac{a_m}{b_n}$. Temos um resultado do mesmo tipo quando $x \to -\infty$.

Exemplos

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-5x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+1}{-x^5-8x^3+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(5+\frac{1}{x^2}\right)}{x^5\left(-1-\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^4+x^3-x}{7x^3-5x^2+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4\left(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(7-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^3}\right)} = -\infty.$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3+x-4}{5x^2-5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(-1+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(5-\frac{5}{x}\right)} = +\infty.$

Nota

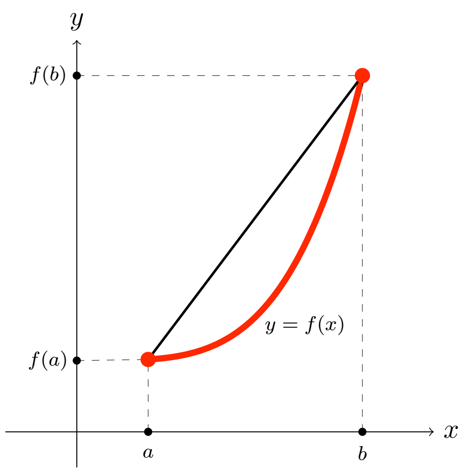
As indeterminações do tipo $\infty-\infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ geradas por outros tipos de funções, serão consideradas posteriormente.

1.3 Derivadas

Consideremos uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Chamamos *taxa de variação média* de f em $[a,b]$ à razão,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometricamente a taxa de variação média corresponde ao declive da secante que une os pontos do gráfico de f, $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.



Chamamos *taxa de variação instantânea* ou *derivada* de f no ponto de abcissa $a \in D_f$ ao limite (quando existe)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Nesse caso a a função f diz-se *derivável em* a e denota-se a derivada de f nesse ponto por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

A taxa de variação média [instântanea] também se designa por *velocidade média* [*instântanea*] ou *taxa de crescimento média* [*instântanea*], consoante o contexto em que se aplica.

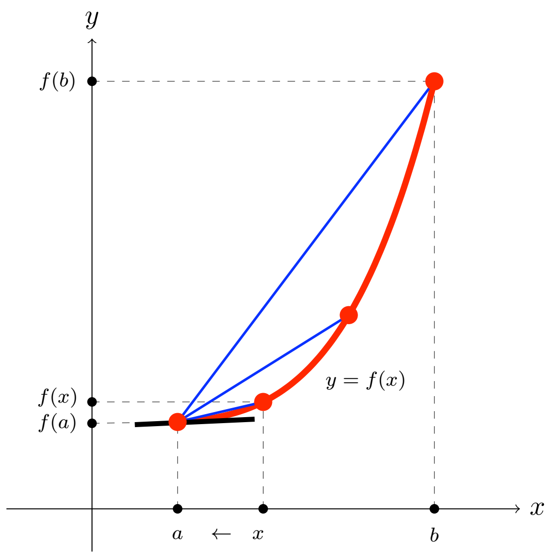
Dizemos que uma função é *derivável* (num intervalo) se for derivável em todos os pontos desse intervalo.

Tomando $h = x - a$ concluímos imediatamente que a definição de $f'(a)$ também pode ser apresentada como o limite, quando existe, de

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

o que pode ser útil nalguns cálculos.

Geometricamente, derivada de f em a corresponde ao declive da *recta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(a, f(a))$, recta essa cujo declive é o limite dos declives das secantes que unem os pontos do gráfico de f, $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, quando x tende para a.



Tem-se que f é derivável em a se e só se admitir recta tangente ao seu gráfico no ponto $(a, f(a))$.

Para determinarmos uma equação para esta recta tangente, comecemos por recordar que uma equação da recta com declive m que passa no ponto (x_0, y_0) é dada por,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

No caso da recta tangente tem-se $x_0 = a$, $y_0 = f(a)$ e $m = f'(a)$. Portanto uma equação da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemplos

1. A taxa de variação média de $f(x) = 5x^2 + 2x$ no intervalo $[0, 1]$ é

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 7.$$

A taxa de variação instantânea de f em 0, é

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0}(5x + 2) = 2.$$

A taxa de variação instantânea de f em a, i.e., a derivada de f em a, é

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5(a+h)^2 + 2(a+h) - (5a^2 + 2a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5(a^2 + h^2 + 2ah) + 2(a+h) - (5a^2 + 2a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5h^2 + 10ah + 2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(5h + 10a + 2) = 10a + 2.
\end{aligned}$$

2. A derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $x \neq 0$ é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Para funções definidas por ramos a existência de derivada tem que ser estudada considerando os limites,

$$f'_e(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad f'_d(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

que se designam, respectivamente por, *derivada lateral esquerda* e *derivada lateral direita* de f em $x = a$.

A existência de derivada em a é equivalente à existência e igualdade de derivadas laterais nesse ponto.

Exemplos

1. Consideremos a função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

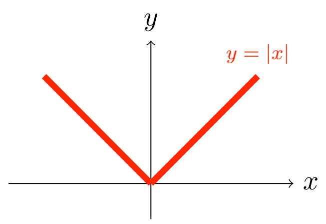
Tem-se

$$f'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1,$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ não existe derivada de f em 0.



2. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1. \end{cases}$$

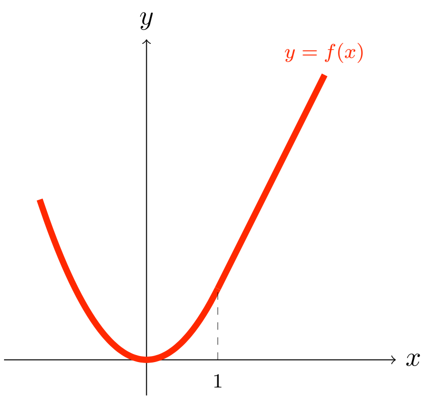
Tem-se

$$f'_d(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2(h+1)-1)-1}{h} = 2,$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+2) = 2.$$

Como $f'_e(1) = f'_d(1) = 2$, existe $f'(1) = 2$.



Teorema Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num ponto $a \in D_f$, f é contínua em a.

Notas:

- Se f não é contínua num ponto então não é derivável nesse ponto.
- Se f é contínua num ponto, f pode ou não ser não derivável nesse ponto, como se viu nos exemplos anteriores.

Exemplo

Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

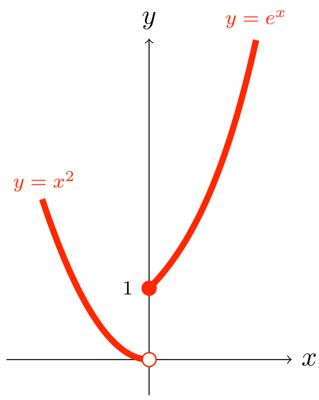
Tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0.$$

Como os limites laterais em 0 são distintos, f não é contínua em $x = 0$, pelo que também não é derivável nesse ponto.



Derivadas de algumas funções elementares

Usando a definição de derivada e procedendo de modo análogo ao que fizémos para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ podemos determinar expressões para as derivadas das funções elementares mais conhecidas, que se resumem na seguinte tabela.

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	- $\sin x$	
tg x	$\sec^2 x$	
arcsin x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
arccos x	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
arctg x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Regras de derivação

Teorema

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, onde $D = D_f \cap D_g$. São válidas as seguintes propriedades.

- **(Derivada da soma)** $f + g : D \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad \forall x \in D.$$

- **(Derivada do produto)** $fg : D \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \forall x \in D.$$

Em particular, se $k \in \mathbb{R}$, $k\, f$ é derivável tendo-se $(k\, f)' = k\, f'$.

- **(Derivada do quociente)** Se além disso $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in D$, então $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \forall x \in D.$$

Exemplos

1. $(\ln x + \sin x)' = (\ln x)' + (\sin x)' = \dfrac{1}{x} + \cos x.$
2. $(\ln x \sin x)' = (\ln x)' \sin x + \ln x (\sin x)' = \dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cos x.$
3. $(4 \sin x)' = 4(\sin x)' = 4 \cos x.$
4. $\left(\dfrac{\ln x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' \sin x - \ln x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cos x}{\sin^2 x}.$
5. $\left(\dfrac{\ln x}{4}\right)' = \dfrac{1}{4}(\ln x)' = \dfrac{1}{4 \ln x}.$

Teorema (Derivada da função composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $\mathrm{CD}_f \subset D_g$. Então $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x), \qquad \forall x \in D_f.$$

Exemplos

1. Seja $f(x) = 2x$ e $g(x) = e^x$. Então $(g \circ f)(x) = e^{2x}$, tendo-se,

$$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}(2x)' = 2\, e^{2x}.$$

2. Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$. Então $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$, tendo-se,

$$\left(\sin(x^2)\right)' = \sin'(x^2)\,(x^2)' = \cos(x^2) 2x.$$

3. Seja $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$. Então $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$, tendo-se,

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

Usando a regra de derivação da função composta e a tabela de derivadas de funções elementares dada anteriormente, obtemos a seguinte tabela, onde f denota uma função derivável que pode entrar na composição:

$$\begin{array}{rcll}
(f^\alpha)' & = & \alpha f^{\alpha-1} f' & (\alpha \in \mathbb{R}) \\
(e^f)' & = & e^f f' & \\
(\ln f)' & = & \dfrac{f'}{f} & \\
(\sin f)' & = & \cos(f)\, f' & \\
(\cos f)' & = & -\sin(f)\, f' & \\
(\operatorname{tg} f)' & = & \sec^2(f)\, f' & \\
(\arcsin f)' & = & \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} & \\
(\arccos f)' & = & -\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} & \\
(\operatorname{arctg} f)' & = & \dfrac{f'}{1+f^2} &
\end{array}$$

Aproximação linear a uma função

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$. Recordemos que uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

À função linear

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

chama-se a *linearização de f em a* e corresponde à melhor aproximação linear de f na vizinhança do ponto $x = a$.

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^2$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se $f'(x) = 2x$ pelo que uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y = a^2 + 2a(x - a).$$

A aproximação linear de f na vizinhança de a é dada pela função

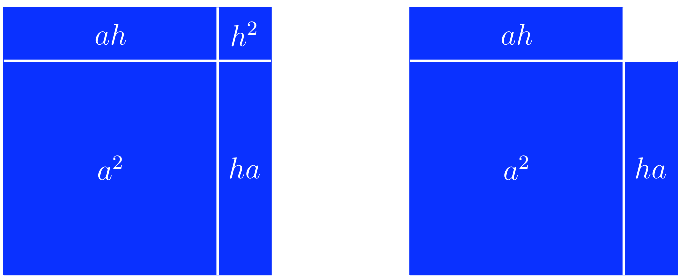
$$L(x) = a^2 + 2a(x - a).$$

Para $x = a + h$ perto de a, isto é, para valores pequenos de $|h|$, tem-se

$$f(a + h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 \approx L(x) = a^2 + 2ah.$$

O erro da aproximação anterior é $|f(a + h) - L(a + h)| = h^2$.

Se $a, h > 0$, podemos interpretar geometricamente $f(a + h)$ e $L(a + h)$ como as áreas das regiões representadas (a azul) na figura abaixo.



O erro da aproximação corresponde à área do quadrado de lado h que falta na segunda região.

1.4 Regra de Cauchy

O seguinte resultado permite levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Regra de Cauchy)

Sejam f e g duas funções deriváveis num intervalo I aberto, a extremidade de I ($a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$). Suponhamos ainda que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$ e que

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (ou ∞),

(ii) existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ (finito ou infinito).

Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{1} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\cos x}{2} = -\dfrac{1}{2}.$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty.$

Para além das indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, indeterminações de outros tipos podem também ser levantadas pela regra de Cauchy, transformando-as em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Indeterminações do tipo $\infty \times 0$

As indeterminações do tipo $\infty \times 0$ são geradas pelo produto de duas funções f e g, em que uma converge para 0 e a outra para infinito. Estas indeterminações podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ considerando, respectivamente,

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} \qquad \text{ou} \qquad f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}.$$

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x \overset{0\times\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\, e^x \overset{\infty\times 0}{=\!=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{-e^x} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x \overset{0\times\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{\cos x}{\sin x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$
   $- \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2 x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} - \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Estas indeterminações podem frequentemente serem transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, efectuando uma das seguintes operações:

1. Reduzir a expressão ao mesmo denominador;

2. Pôr em evidência uma das parcelas da expressão;

3. Multiplicar e dividir pelo “conjugado” da expressão.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sec x - \operatorname{tg} x) \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1-\sin x}{\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$
   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos x}{-\sin x} = -0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x) \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$
   (C.A.: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$)

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$

Notas:

- No levantamento de indeterminações do tipo $0\times\infty$, não é indiferente (em geral) a escolha da função que se passa para o denominador. Por exemplo, a escolha da função a passar para o denominador no limite

  $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \overset{0\times\infty}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{-1}{x\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x,$$

  não simplificou o cálculo desse limite, enquanto que transformando a indeterminação $0\times\infty$ em $\frac{\infty}{\infty}$, se tem

  $$\lim x\ln x \overset{0\times\infty}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

- Existem outros tipos de indeterminações, tais como 0^0, ∞^0 e 1^∞, que podem também ser transformadas num dos tipos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Um exemplo importante de um limite do tipo 1^∞ é

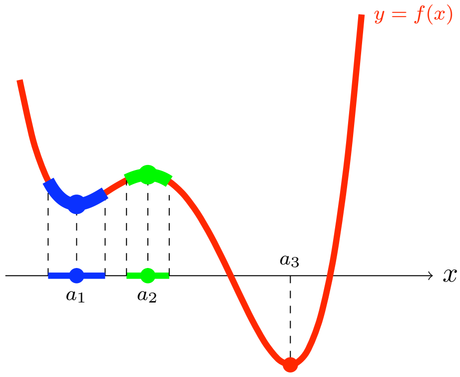
  $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

  Estas indeterminações não serão consideradas no âmbito deste curso.

1.5 Estudo de funções

Definição Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D_f$. Diz-se que:

- f atinge o *máximo* absoluto em a se $f(x) \leq f(a)$ para todo o $x \in D_f$;
- f atinge o *mínimo* absoluto em a se $f(x) \geq f(a)$ para todo o $x \in D_f$;
- f atinge um *máximo* (relativo ou local) em a se $f(x) \leq f(a)$ para os pontos do domínio contidos nalgum intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$;
- f atinge um *mínimo* (relativo ou local) em a se $f(x) \geq f(a)$ para os pontos do domínio contidos nalgum intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ $(\delta > 0)$;



No intervalo $]a_1-\delta, a_1+\delta[$ (a azul), $f(x) \geq f(a_1)$ pelo que f tem um mínimo (relativo) em a_1 de valor $f(a_1)$. Como $f(x) \geq f(a_3)$ para todo o $x \in D_f$, f tem um mínimo absoluto em a_3 de valor $f(a_3)$.

No intervalo $]a_2-\varepsilon, a_2+\varepsilon[$ (a verde), $f(x) \leq f(a_2)$ pelo que f tem um máximo (relativo) em a_2 de valor $f(a_2)$.

No estudo da monotonia e extremos (relativos) de uma função, isto é, respectivos máximos e mínimos (locais), a derivada vai desempenhar um papel fundamental, como veremos.

Teorema Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo aberto I. Tem-se que:

1. Se $f' > 0$ $[f' < 0]$ em I, f é estritamente crescente [decrescente] em I.
2. Se $f' \geq 0$ $[f' \leq 0]$ em I, f é crescente [decrescente] em I.

Corolário Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo aberto I tal que $f' > 0$ ou $f' < 0$ em I, f é injectiva em I. Em particular f é invertível no intervalo I.

Exemplo

Consideremos $f(x) = x + \ln x$ cujo domínio é $\mathbb{R}^+$. Tem-se

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, e portanto é invertível em $\mathbb{R}^+$.

Corolário Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo aberto I e $a \in I$. Tem-se que:

1. Se $f' > 0$ à esquerda de $x = a$ e $f' < 0$ à direita de $x = a$ então f tem um máximo relativo em $x = a$;

2. Se $f' < 0$ à esquerda de $x = a$ e $f' > 0$ à direita de $x = a$ então f tem um mínimo relativo em $x = a$.

		a	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$	max.	$\searrow$

		a	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	min.	$\nearrow$

Teorema Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo aberto I e $a \in I$ um extremo relativo de f. Então tem-se $f'(a) = 0$.

Definição Um ponto $a \in D_f$ diz-se um *ponto crítico* (ou de *estacionaridade*) de f se $f'(a) = 0$.

Notas:

- O teorema anterior significa que os extremos relativos de uma função derivável num intervalo aberto se encontram entre os pontos críticos dessa função.
- A recíproca do teorema anterior é no entanto falsa, isto é, existem pontos críticos que não são extremos relativos.

O estudo da concavidade de uma função faz-se com recurso à $2^{\underline{a}}$ derivada.

Teorema Seja f uma função com $2^{\underline{a}}$ derivada no intervalo I.

1. Se $f'' > 0$ em I, f tem concavidade "virada para cima";
2. Se $f'' < 0$ em I, f tem concavidade "virada para baixo".

Definição Um ponto $a \in D_f$ diz-se um *ponto de inflexão* se em a ocorrer uma mudança do sentido da concavidade de f.

Teorema Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável num intervalo aberto I e $a \in I$. Se f tem um ponto de inflexão em a, então $f''(a) = 0$.

Vamos ilustrar os conceitos anteriores através do estudo de duas funções.

Estudo da função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$**.**

1. *Domínio e assímptotas verticais.*

   Tem-se $D_f = \mathbb{R}$ (porquê?) pelo que f não admite assímptotas verticais.

2. *Assímptotas não verticais.*

   Tem-se $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$, pelo que f admite a assímptota horizontal $y = 0$ à esquerda e à direita.

3. *Intersecção com os eixos coordenados*

   Tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pelo que o único ponto de intersecção é a origem do referencial.

4. *Monotonia e extremos.*

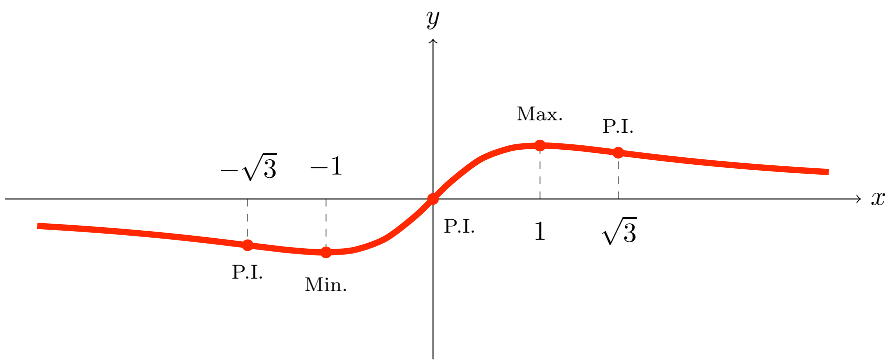
   Tem-se $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$, pelo que f tem pontos críticos $x = 1$ e $x = -1$. Além disso, como $(1+x^2)^2 > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ tem o mesmo sinal de que $1 - x^2 >$, pelo que f' toma valores positivos em $]-1, 1[$ e negativos em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (ver o quadro de sinais).

5. *Pontos de inflexão e concavidades.*

Tem-se $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0$, pelo que f tem pontos de inflexão $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ (ver o quadro de sinais).

		$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	
f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f	↘		Min	↗	Max		↘
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

6. *Esboço do gráfico.*



Estudo da função $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$**.**

1. *Domínio e assímptotas verticais.*

   Tem-se $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ (porquê?).

   Tem-se $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\log x} = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\log x} = +\infty$ pelo que f admite assímptota vertical $x = 1$, em $-\infty$ à esquerda de $x = 1$ e em $+\infty$ à direita de $x = 1$.

2. *Assímptotas não verticais.*

   Tem-se

   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\log x} = \lim_{x\to+\infty\infty} \frac{1}{\log x} = 0,$$

   e

   $$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty,$$

   pelo que f não admite assímptotas não verticais.

3. *Intersecção com os eixos coordenados*

   Não há intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

4. *Monotonia e extremos.*

   Tem-se $f'(x) = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2} = 0 \Leftrightarrow \log x = 1$, pelo que o único ponto crítico de f é $x = e$. Além disso, $f'(x) < 0$ para $x < e$, e $f'(x) > 0$ para $x > e$. Logo f é decrescente em $]0,1[\cup]1,e[$ e crescente em $]e,+\infty[$, tendo um mínimo em $x = e$.

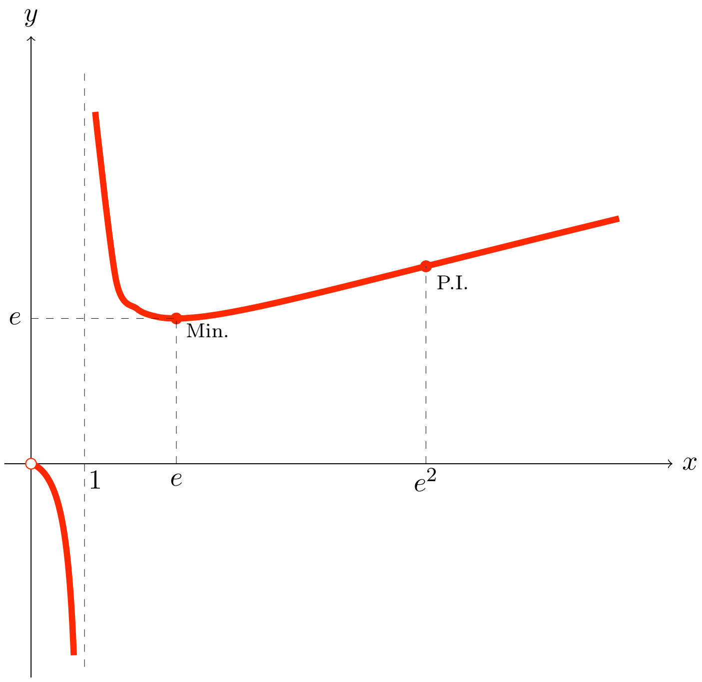
5. *Pontos de inflexão e concavidades.*

Tem-se $f''(x) = \dfrac{2 - \log x}{x(\log x)^3} = 0 \Leftrightarrow \log x = 2$, pelo que f tem um ponto de inflexão $x = e^2$. Além disso, tem-se

- $2 - \log x > 0$ para $x < e^2$, e $2 - \log x < 0$ para $x > e^2$.
- $(\log x)^3 > 0$ para $x > 1$ e $(\log x)^3 < 0$ para $x < 1$.

Logo $f'' < 0$ em $]0, 1[\cup]e^2, +\infty[$ (onde f tem concavidade virada para baixo) e $f'' > 0$ em $]1, e^2[$ (onde f tem concavidade virada para cima).

6. *Esboço do gráfico.*



1.6 Primitivas

Nesta secção vamos considerar as funções definidas num intervalo aberto I.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo I. Chamamos **primitiva de** f (em I) a uma função derivável $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo o $x \in I$. Denotamos,

$$F = \mathrm{P}\, f = \int f.$$

Exemplos

1. $\mathrm{P}\, 1 = x$.

2. $\mathrm{P}\, k = kx$ $(k \in \mathbb{R})$.

3. $\mathrm{P}\, x = \dfrac{x^2}{2}$.

4. $\mathrm{P}\, x^2 = \dfrac{x^3}{3}$.

5. $\mathrm{P}\, x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

6. $\mathrm{P}\, \dfrac{1}{x} = \ln x$ (em $\mathbb{R}^+$).

Notas:

- Todas as funções contínuas definidas em I são primitiváveis em I.

- Duas primitivas de uma função num intervalo diferem de uma constante, isto é, se F e G são duas primitivas de uma mesma função f num intervalo I, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $G = F + k$ em I. Por outras palavras, a família de funções,

$$F + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

constitui a família de todas as primitivas de f (em I).

- Se f é primitivável num intervalo I, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única função F definida em I tal que $F = \mathrm{P}\, f$, e $F(x_0) = y_0$.

Exemplo

A família de funções,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

constitui a família de todas as primitivas de $f(x) = x$ em $\mathbb{R}$. No entanto, a única primitiva de f que verifica a condição $F(2) = 4$ é

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2.$$

De facto, $F(2) = \dfrac{x^2}{2} + k = 4 \Rightarrow k = 2$.

Primitivas imediatas

A partir da tabela de derivadas dada anteriormente obtemos as seguinte tabela de primitivas:

$\mathrm{P}\, k = kx$	
$\mathrm{P}\, x^\alpha = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathrm{P}\, f' f^\alpha = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathrm{P}\, \dfrac{1}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\mathrm{P}\, \dfrac{f'}{f} = \ln\lvert f\rvert$
$\mathrm{P}\, e^x = e^x$	$\mathrm{P}\, f' e^f = e^f$
$\mathrm{P}\, \sin x = -\cos x$	$\mathrm{P}\, f' \sin f = -\cos f$
$\mathrm{P}\, \cos x = \sin x$	$\mathrm{P}\, f' \cos f = \sin f$
$\mathrm{P}\, \mathrm{tg}\, x = -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathrm{P}\, f' \mathrm{tg}\, f = -\ln\lvert\cos f\rvert$
$\mathrm{P}\, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$	$\mathrm{P}\, \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} = \arcsin f$
$\mathrm{P}\, \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$	$\mathrm{P}\, \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} = \arccos f$
$\mathrm{P}\, \dfrac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x$	$\mathrm{P}\, \dfrac{f'}{1+f^2} = \mathrm{arctg}\, f,$

$(k \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$.

Exemplos

1. $\mathrm{P}\, x\cos x^2 = \mathrm{P}\, \frac{1}{2}(2x)\cos x^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,(2x)\cos x^2 \overset{Pf'\cos f}{=\!=} \frac{1}{2}\sin x^2.$

2. $\mathrm{P}\, \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x} = \mathrm{P}\left(-\dfrac{-1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x} = -\mathrm{P}\,\dfrac{-1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x} \overset{Pf'\sin f}{=\!=} -\left(-\cos\dfrac{1}{x}\right) = \cos\dfrac{1}{x}.$

3. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = \mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{1+(e^x)^2} \overset{P\frac{f'}{1+f^2}}{=\!=} \mathrm{arctg}\, e^x.$

4. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{1+e^x} \overset{P\frac{f'}{f}}{=\!=} \ln\, e^x.$

5. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \mathrm{P}\, e^x(1+e^x)^{-\frac{1}{2}} \overset{P\,f'f^{-1/2}}{=\!=} \dfrac{(1+e^x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2(1+e^x)^{\frac{1}{2}}.$

6. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \overset{P\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}}{=\!=} \arcsin e^x.$

7. $\mathrm{P}\,\dfrac{\cos x}{\sin x} \overset{P\,\frac{f'}{f}}{=\!=\!=} \ln|\sin x|.$

8. $\mathrm{P}\,\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \mathrm{P}\,\cos x \sin^{-2} x \overset{P\,f'f^{-2}}{=\!=\!=} \dfrac{\sin^{-1} x}{-1} = -\dfrac{1}{\sin x}.$

9. $\mathrm{P}\,\cos x \sin^2 x \overset{P\,f'f^{2}}{=\!=\!=} \dfrac{\sin^3 x}{3}.$

10. $\mathrm{P}\,\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x} = \mathrm{P}\,\dfrac{1}{x}\sqrt{1+\ln x} \overset{P\,f'f^{\frac{1}{2}}}{=\!=\!=} \dfrac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}.$

11. $\mathrm{P}\,\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)} = \mathrm{P}\,\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x} \overset{P\,\frac{f'}{1+f^2}}{=\!=\!=} \operatorname{arctg}(\ln x).$

12. $\mathrm{P}\,\dfrac{1}{x(1+\ln x)} = \mathrm{P}\,\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\ln x} \overset{P\,\frac{f'}{f}}{=\!=\!=} \ln|\ln x|,$

onde $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$.

Regras de primitivação

A partir da regras de derivação da soma, produto e composição de funções, deduzem-se sem dificuldade as seguintes regras de primitivação.

Primitivação da soma

Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções primitiváveis num intervalo I, então

1. $f+g$ é primitivável em I e tem-se

$$\mathrm{P}\,(f+g) = \mathrm{P}\,f + \mathrm{P}\,g.$$

2. kf $(k \in \mathbb{N})$ é primitivável em I e tem-se

$$\mathrm{P}\,(kf) = k\,\mathrm{P}\,f.$$

Exemplos

1. $\mathrm{P}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\mathrm{P}\,x^2+\mathrm{P}\,\frac{1}{x}=\frac{x^3}{3}+\ln|x|.$

2. $\mathrm{P}\left(4\cos x-\frac{3}{1+x^2}\right)=4\,\mathrm{P}\,\cos x-3\,\mathrm{P}\,\frac{1}{1+x^2}=4\sin x-3\,\mathrm{arctg}\,x.$

Primitivação por partes

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções definidas num intervalo I, com f primitivável e g derivável. Então $fg : I \to \mathbb{R}$ é primitivável, tendo-se

$$\mathrm{P}\,(fg) = Fg - \mathrm{P}\,(Fg'),$$

sendo $F = \mathrm{P}\,f$.

- A primitivação por partes aplica-se usualmente para primitivar produtos de funções polinomiais, exponenciais, logarítmo, funções trignométricas e respectivas inversas. Neste método, a escolha da função a primitivar e da função a derivar não é, em geral, indiferente. Na seguinte tabela são sugeridas as funções a primitivar e a derivar nalgumas situações que aparecem frequentemente na prática.

	primitivar	derivar
polin $\times$ sin / cos / exp	sin / cos / exp	polin.
polin $\times$ ln	polin	ln
exp $\times$ sin / cos	exp ou sin / cos	sin / cos ou exp
ln /arcsin/arctg	1	ln /arcsin/arctg

Exemplos

1. $\mathrm{P}\,\underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{e^x}_{f} = \underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{e^x}_{F} - \mathrm{P}\,\underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{e^x}_{F} = xe^x - Pe^x = x\,e^x - e^x.$

2. $\mathrm{P}\,\underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} - \mathrm{P}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\mathrm{P}\,x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$

3. $\mathrm{P}\,\ln x = \mathrm{P}\,\underbrace{1}_{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} = \underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} - \mathrm{P}\,\underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} = x\ln x - \mathrm{P}\,1 = x\ln x - x.$

4. $\mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{f}\cdot\underbrace{\sin x}_{g} = \underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{\sin x}_{g} - \mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{\cos x}_{g'} \overset{(*)}{=} e^x\sin x - (e^x\cos x + \mathrm{P}\,e^x\sin x).$

   Daqui resulta que $2\,\mathrm{P}\,e^x\sin x = e^x\sin x - e^x\cos x$ e portanto que,

$$\mathrm{P}\,e^x\sin x = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

   (*) $\mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{g} = \underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{\cos x}_{g} - \mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{g'}.$

5. $\mathrm{P}\,\mathrm{arctg}\,x = \mathrm{P}\,\underbrace{1}_{f}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}\,x}_{g} = \underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}\,x}_{g} - \mathrm{P}\,\underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'}$

$$= x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{2x}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

6. $\mathrm{P}\,\underbrace{x^2}_{g}\cdot\underbrace{\cos x}_{f} = \underbrace{x^2}_{g}\cdot\underbrace{\sin x}_{F} - \mathrm{P}\,\underbrace{2x}_{g'}\cdot\underbrace{\sin x}_{F} = x^2\sin x - 2\Big(-x\cos x - \mathrm{P}\,1(-\cos x)\Big)$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$$

Primitivação por substituição

Sejam $f: I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável num intervalo I e $\varphi: J \to I$ uma função derivável e injectiva num intervalo J tal que $\varphi(J) = I$. Então

$$\mathrm{P}\,f(x) = \mathrm{P}\,\big[f(\varphi(t))\varphi'(t)\big]\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Exemplos

1. $$P\,\underbrace{\cos\sqrt{x}}_{f(x)} \overset{(1)}{=\!=} P\,\underbrace{\cos(t)}_{f(\varphi(t))}\,\underbrace{2t}_{\varphi'(t)}\,|_{t=\sqrt{x}} \overset{(2)}{=\!=} 2(t\sin t+\cos t)|_{t=\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}).$$

   (1) <u>Substituição efectuada:</u>

   $$\left|\begin{array}{l} \sqrt{x} = t = \varphi^{-1}(x), \\ x = t^2 = \varphi(t), \\ x' = 2t = \varphi'(t). \end{array}\right.$$

   (2) $P\,2t\cos t = 2P\,\underbrace{t}_{g}\cdot\underbrace{\cos x}_{f} = 2(\underbrace{t}_{g}\cdot\underbrace{\sin t}_{F} - P\,\underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\sin t}_{F}) = 2(t\sin t+\cos t)$

2. $$P\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \overset{(1)}{=\!=} P\,\frac{1}{t}4t(t^2-1)\Big|_{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}} \overset{(2)}{=\!=} 4\,P\,(t^2-1)\Big|_{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}}$$
   $$= 4\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}} = 4\left[\frac{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}}{3} - \sqrt{\sqrt{x}+1}\right].$$

(1) Substituição efectuada:

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{x}+1} = t = \varphi^{-1}(t), \\ \sqrt{x}+1 = t^2 \\ \sqrt{x} = t^2 - 1 \\ x = (t^2-1)^2 = \varphi(t) \\ x' = 4t(t^2-1) = \varphi'(t) \end{array}\right.$$

3. $$\mathrm{P}\,\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} \stackrel{(1)}{=\!=} \mathrm{P}\,\frac{1}{t^2+1}3t^2\Big|_{t=\sqrt[3]{x}} = 3\,\mathrm{P}\,\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\Big|_{t=\sqrt[3]{x}} = 3\mathrm{P}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)$$
$$= 3\,(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_{t=\sqrt[3]{x}} = 3\left(\sqrt[3]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\right).$$

(1) Substituição:

$$\left|\begin{array}{l} x = t^3 = \varphi(t) \\ x' = 3t^2 = \varphi'(t) \\ t = \sqrt[3]{x} = \varphi^{-1}(t) \end{array}\right.$$

4. $$\mathrm{P}\,\frac{1}{1+e^x} \stackrel{(1)}{=\!=} \mathrm{P}\,\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\Big|_{t=e^x} \stackrel{(2)}{=\!=} \mathrm{P}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\Big|_{t=e^x} = (\ln|t| - \ln|t+1|)\Big|_{t=e^x}$$
$$= \ln e^x - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1).$$

(1) Substituição:

$$\left|\begin{array}{l} t = e^x = \varphi^{-1}(x) \\ x = \ln t = \varphi(t) \\ x' = \frac{1}{t} = \varphi'(t) \end{array}\right.$$

(2) A função $\dfrac{1}{(t+1)t}$ é uma função racional própria, isto é, um quociente de polinómios cujo grau do denominador é superior ao do numerador. Como o denominador apenas admite as raízes simples $t = 0$ e

$t = -1$, garante-se que existem números reais $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t}.$$

Para determinar A, B, começamos por reduzir a expressão ao mesmo denominador

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t+1)}{(t+1)t}.$$

Daqui conclui-se que $1 = At + B(t+1)$, isto é que

$$1 = (A+B)t + B.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, tem-se então

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Logo,

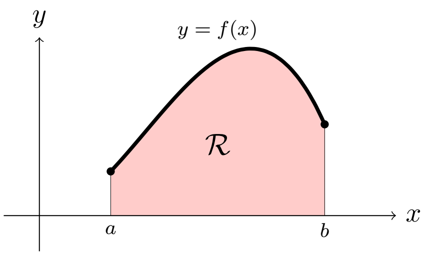
$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

1.7 Cálculo integral

Consideremos uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$ em $[a,b]$. Pretende-se calcular a área da região $\mathcal{R}$ delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos xx,

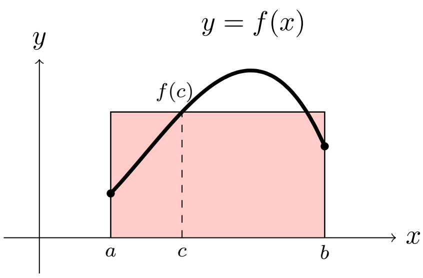
$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x) \ \right\},$$

que se encontra assinalada na seguinte figura.



O cálculo da área de $\mathcal{R}$ não é trivial.

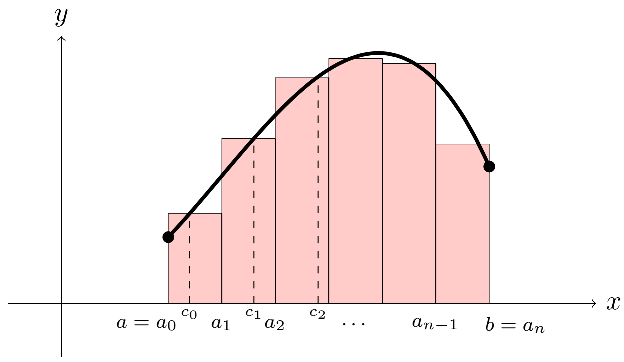
Podemos começar por calcular uma aproximação para o valor da área de $\mathcal{R}$ calculando a área de um rectângulo de base $b - a$ e de altura $f(c)$, $c \in [a,b]$.



Nessa altura,

$$\text{área } \mathcal{R} \;\approx\; f(c)(b-a).$$

De modo a melhorar a aproximação podemos subdividir o intervalo $[a,b]$ em n intervalos de igual amplitude $h=(b-a)/n$, $[a_i,a_{i+1}]$, $i=0,\ldots,n-1$, e calcular a área de n rectângulos de base h e altura $f(c_i)$, $c_i\in[a_i,a_{i+1}]$.



Assim,

$$\text{área } \mathcal{R} \;\approx\; f(c_1)h+\cdots+f(c_n)h.$$

Intuitivamente a aproximação será tanto melhor quanto mais pequena for a amplitude h dos intervalos, ou seja, quanto maior for o número de intervalos. De facto, pode-se mostrar que,

$$\text{área } \mathcal{R} \;=\; \lim_{h\to 0}(f(c_1)h+\cdots+f(c_n)h).$$

A este valor chamamos *integral* (definido) de f no intervalo $[a,b]$ que se representa por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

A função $f(x)$ designa-se por *função integranda* e a, b designam-se por *extremos de integração.*

A noção de integral pode ser estendida para qualquer função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Propriedades do integral

Sejam $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $c \in [a, b]$.

Tem-se:

- *Linearidade do integral:*

  1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
  2. $\displaystyle\int_a^b \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

- *Monotonia do integral:* se $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in I$ tem-se,

$$\int_a^b f(x)\, dx \ \geq \ \int_a^b g(x)dx.$$

- *Aditividade do integral:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Por convenção tem-se ainda:

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0,$

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx = 0.$

Exemplos

1. Sabendo que
$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{e que} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$
obtemos pelas propriedades anteriores
$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+5x^2)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 5x^2\,dx\\ &= \int_0^1 x\,dx + 5\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}+\frac{5}{3} = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

2. Pretende-se comparar os integrais $\int_0^1 x^2\,dx$ e $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ sem os determinar. Ora, como a função $\sqrt{x} \geq x^2$ em $[0,1]$, vem pela monotonia do integral que
$$\int_0^1 x^2\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

Para calcular integrais tem-se a seguinte fórmula, conhecida por *fórmula fundamental do cálculo integral* ou *fórmula de Barrow* que relaciona o conceito de integral que envolve a noção de área e o conceito de primitiva, que envolve a noção de derivada.

Teorema Sejam $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então
$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k\int_a^b 1\,dx = k[x]_a^b = k(b-a).$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$

3. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x+1}\,dx.$

   Recordemos que $P\,f'f^\alpha = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha\neq -1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_2^6 \sqrt{x+1}\,dx &= \int_2^6 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^6\\ &= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6 = \frac{2}{3}(7^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

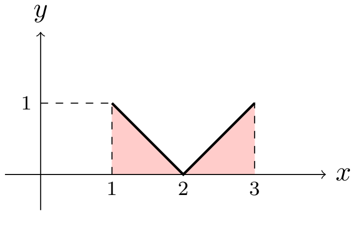
4. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^3 e^{-x}dx.$

   Recordando que $P\,(f'e^f) = e^f$, vem

$$\int_1^3 e^{-x}dx = -\int_1^3 -e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_1^3 = -(e^{-3}-e^{-1}) = e^{-1}-e^{-3}.$$

5. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^3 |2-x|\,dx.$

   Tem-se $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & 2-x\geq 0\\ x-2, & 2-x\leq 0\end{cases} = \begin{cases} 2-x, & 1\leq x\leq 2\\ x-2, & 2\leq x\leq 3\end{cases}.$



Assim

$$\begin{aligned}\int_1^3 |2-x|\,dx &= \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 \\ &= (4-2) - \Big(2 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{9}{2} - 6\Big) - (2-4) = 1.\end{aligned}$$

6. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

   Primitivando por partes vem

$$P\,1 \cdot \ln x = x\,\ln x - P\,x\,\frac{1}{x} = x\,\ln x - x = x(\ln x - 1),$$

   e portanto,

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_1^e = e(1-1) - (-1) = 1.$$

7. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

   Recordando que $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ e que $P\,f'\,f = \dfrac{1}{2}f^2$ obtemos

$$P\,\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = P\,\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x.$$

   Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2 1 - \operatorname{arctg}^2 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

8. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}$.

Recordando que $P\frac{f'}{f} = \ln|f|$,

$$P\,\frac{1}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} = P\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x} = \log|\operatorname{arctg} x|,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} &= \Big[\log|\operatorname{arctg} x|\Big]_1^{\sqrt{3}} = \log|\operatorname{arctg}\sqrt{3}| - \log|\operatorname{arctg} 1| \\ &= \log\frac{\pi}{3} - \log\frac{\pi}{4} = \log\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

9. Pretende-se calcular, $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Recordando que $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, e que

$$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\,f' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}},$$

vem

$$P\,\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2,$$

e portanto,

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arcsen} x^2\Big]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right) = 0.$$

10. Pretende-se calcular, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4}$.

A função $\dfrac{1}{x^2-4}$ é uma função racional própria pois é um quociente de dois polinómios, sendo que o grau do denominador superior ao do numerador. O polinómio x^2-4 tem duas raízes simples $-2, 2$ e portanto admite a factorização $x^2-4=(x+2)(x-2)$. Assim existem constantes reais A, B tais que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-4} &= \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2(A-B)}{x^2-4},\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(A-B)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Daqui resulta que

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}\right] dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-2| - \log|x+2|\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3 - \log 3 + \log 1) = -\frac{\log 3}{2}.\end{aligned}$$