Aplicações do cálculo integral

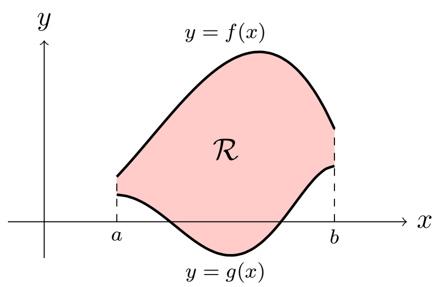
- Cálculo de áreas.
- Cálculo de volumes de sólidos de revolução.
- Cálculo de comprimentos de arco.

Cálculo de áreas

Teorema Sejam $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. A área da região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

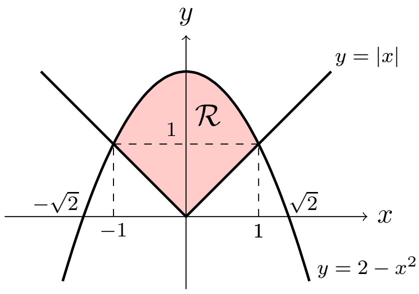
é dada pelo integral $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.



Se o sinal de $f - g$ não for constante no intervalo $[a, b]$ temos que determinar os pontos onde os gráficos de ambas as funções se intersectam e decompôr o intervalo em subintervalos onde esse sinal se mantenha constante. O valor da área será então a soma das áreas associadas a cada um desses subintervalos.

Exemplos

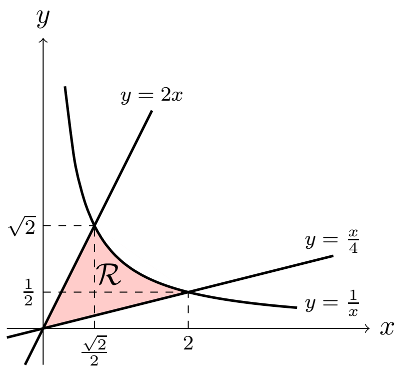
1. Calcular a área da região delimitada por $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$.



$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-1}^{1} ((2 - x^2) - |x|)dx \\
&= \int_{-1}^{0} ((2 - x^2) - (-x))dx + \int_{0}^{1} ((2 - x^2) - x)dx \\
&= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}) + (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

2. Pretende-se calcular a área da região

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \ : \ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, \ \frac{x}{4} \leq y \leq 2x, \right\}.$$



Para isso necessitamos de determinar os pontos de intersecção dos gráficos de cada uma das funções. Ora, a intersecção da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ com a recta $y = 2x$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ \frac{1}{x} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ x^2 = 2. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$ obtemos o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$. Analogamente a intersecção da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ com a recta $y = \frac{x}{4}$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ x^2 = 4. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$ obtemos o ponto $(2, \frac{1}{2})$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{x}{4}\right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx \\ &= \frac{7}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\log|x| - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \cdots \end{aligned}$$

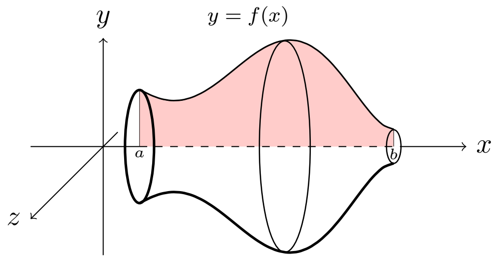
Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Vejamos agora como calcular o *volume de sólidos de revolução* usando o integral definido.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o sólido de revolução em torno do eixo do xx definido por f, i.e., o volume da região definida por rotação da área

$$\{(x, y) \,:\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

em torno do eixo do xx.

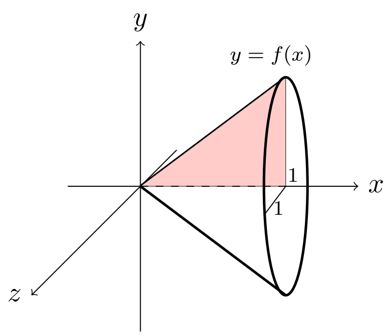


Teorema O volume do sólido de revolução definido por $y = f(x)$ é dado pela fórmula,

$$V = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx.$$

Exemplo

Pretende-se calcular o volume do cone de altura $h = 1$ e cuja base é uma disco de raio $R = 1$. O cone é o sólido de revolução definido pela função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



O volume do cone é dado por

$$V = \int_0^1 \pi\, x^2\, dx = \pi\, \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

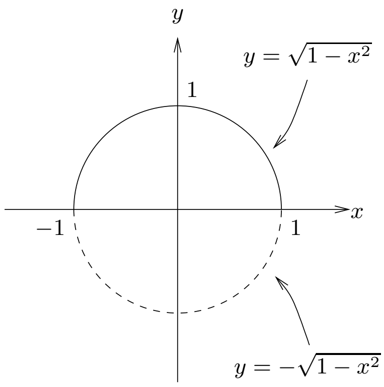
Cálculo de comprimentos de arco

Vejamos por último como calcular o *comprimento de arco* (ou *comprimento de linha*) para curvas definidas como gráficos de funções. Intuitivamente o comprimento de arco de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ representa o comprimento de uma linha de expessura nula sobreposta ao gráfico de f entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, que posteriormente foi rectificada.

Teorema Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função com derivada contínua em $[a,b]$, o comprimento de arco de $f(x)$ entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dado por

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Exemplo Pretende-se calcular o perímetro de uma circunferência de raio 1 de equação $x^2 + y^2 = 1$. Esta equação determina duas semi-circunferências, uma situada no semi-plano superior de equação $y = \sqrt{1-x^2}$ e outra situada no semi-plano inferior de equação $y = -\sqrt{1-x^2}$. O perímetro da cirunferência obtém-se duplicando o comprimento de arco de $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ entre os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ (ver a seguinte figura).



O perímetro da semi-circunferência é dado por

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1+[f(x)']^2}\,dx &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.
\end{aligned}$$

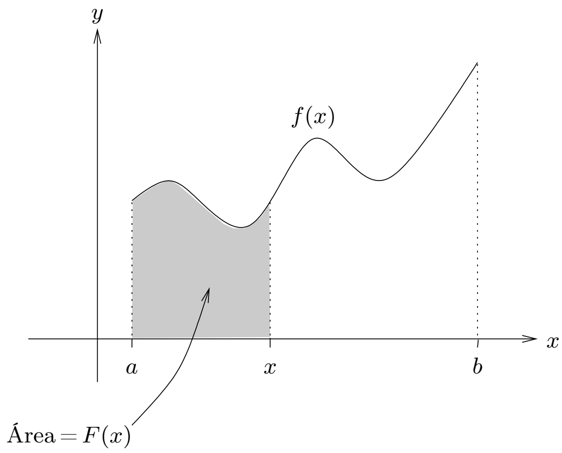
Logo o perímetro da circunferência de raio 1 é 2π.

Integral indefinido

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Chama-se *integral indefinido de f*

(com origem em $x = a$) à função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b]$$



Exemplos

1. Se $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, então $F(x) = \int_0^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.

2. Seja $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 3, \\ -1, & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$

   Seja $F(x)$ o integral indefinido de $f(x)$. Vamos determinar uma expressão analítica para $F(x)$.

Por definição temos $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$, $x \in [0,4]$, ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x 2\,dt, & 0 \leq x < 1, \\ \\ \int\limits_0^1 2\,dt + \int\limits_1^x 0\,dt, & 1 \leq x < 3 \\ \\ \int\limits_0^1 2\,dt + \int\limits_1^3 0\,dt + \int\limits_3^x (-1)\,dt, & 3 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 2+0, & 1 \leq x < 3, \\ 2+0+(-x+3), & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Assim,

$$F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x < 3, \\ -x+5, & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

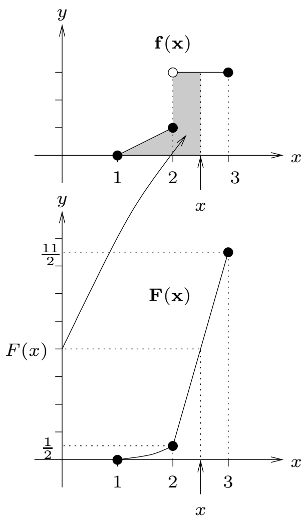
3. Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$.

Então

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_1^x (t-1)\,dt, & 1\le x\le 2,\\ \\ \int_1^2 (t-1)\,dt+\int_2^x 3\,dt, & 2<x\le 4,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x, & 1\le x\le 2,\\ \\ \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^2+3\left[t\right]_2^x, & 2<x\le 4,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}, & 1\le x\le 2,\\ \\ \frac{1}{2}+3x-6=3x-\frac{11}{2}, & 2<x\le 4.\end{cases}$$



Nestes exemplos pode-se constatar que o integral indefinido de uma função f é uma função contínua, mesmo que f não o seja. De facto, esta e outras propriedades, muito importantes são verificadas pelo integral indefinido como vamos ver agora.

Teorema Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e seja $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$ o integral indefinido de f. Tem-se:

(i) O integral indefinido é uma função contínua em $[a, b]$.

(ii) Se $f(x) \geq 0$ $[f(x) \leq 0]$ para todo o $x \in [a, b]$ então $F(x)$ é uma função crescente [resp. decrescente] em $[a, b]$.

(iii) Se $f(x)$ é uma função contínua em $x_0 \in [a, b]$ então $F(x)$ é uma função derivável em x_0 e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Em particular, se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ então $F(x)$ é uma função derivável em $[a, b]$, tendo-se $F'(x) = f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$, ou seja, $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, para todo o $x \in [a, b]$.

A propriedade (iii) significa que se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$, $F(x)$ é a única primitiva de $f(x)$ em $[a, b]$ que se anula em $x = a$. Ainda como consequência do teorema anterior obtemos imediatamente a fórmula fundamental do cálculo integral (fórmula de Barrow) dada anteriormente.

O integral indefinido pode ser estendido aos intervalos abertos.

Teorema Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo aberto I. Seja $a \in I$. Consideremos a função $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Então $F(x)$ é uma função derivável em I e tem-se $F'(x) = f(x)$ para todo o x em I.

Capítulo 2

Cálculo vectorial e matricial

2.1 Vectores

Chamamos *vector* com n componentes reais ao n-uplo,

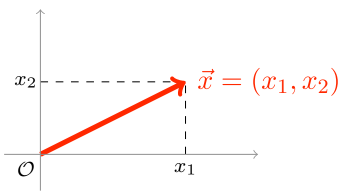
$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

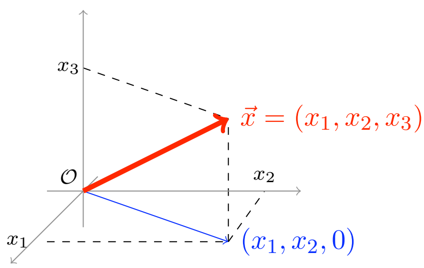
onde $\mathbb{R}^n$ denota o produto cartesiano,

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ factores}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Iremos estar particularmente interessados em vectores com 2 e 3 componentes, i.e., vectores no plano e no espaço.

<u>Representação geométrica de um vector num sistema de eixos coordenados:</u>



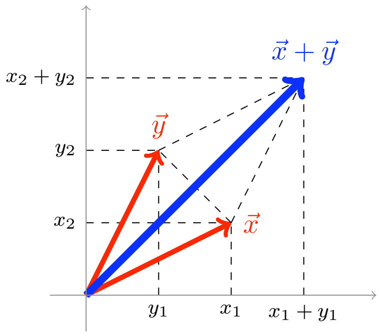


Operações com vectores

- Adição de vectores

  Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ define-se

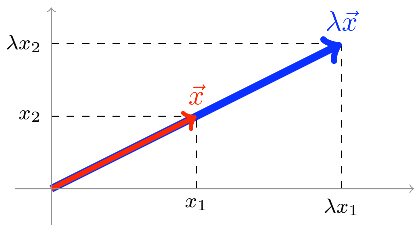
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$



(Regra do paralelogramo)

- Multiplicação de um vector por um escalar

  Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ define-se $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

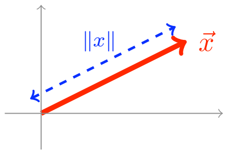


($\lambda = 2$ na figura)

Norma (ou comprimento) de um vector

Dado $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, define-se *norma* de $\vec{x}$ por

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$



<u>Propriedades da norma.</u> Para todos os vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$;
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$;
- $\|\vec{x} \pm \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Desigualdade triangular).

Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se *unitário* se $\|\vec{v}\| = 1$. Dado um vetor não nulo, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, define-se *versor* de $\vec{x}$, $\text{vers}(\vec{x})$, como sendo o único vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\vec{x}$. Daqui resulta que $\text{vers}(x) = \alpha\vec{x}$ com $\alpha > 0$ tal que $\|\alpha\vec{x}\| = \alpha\|\vec{x}\| = 1$. Logo $\alpha = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$ e portanto,

$$\text{vers}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

Por exemplo, se $\vec{x} = (3, 4)$, $\|(3, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ e tem-se

$$\text{vers}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Dizemos que *normalizámos* o vetor $\vec{x}$.

Distância entre $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Produto interno

Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, define-se *produto interno* (ou *produto escalar*) de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por

$$\vec{x}|\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Propriedades do produto interno. Para todos os vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ e para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $\vec{x}|\vec{y} = \vec{y}|\vec{x}$;
- $\vec{x}|(\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x}|\vec{y} + \vec{x}|\vec{z}$;
- $\lambda(\vec{x}|\vec{y}) = (\lambda\vec{x})|\vec{y} = \vec{x}|(\lambda\vec{y})$;

As propriedades anteriores decorrem imediatamente das propriedades análogas verificadas para o produto de números reais e mostram que ambos os produtos se operam de modo semelhante. Por exemplo, os casos notáveis da multiplicação em $\mathbb{R}$,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

'transcrevem-se" para o produto interno como,

$$(\vec{x} \pm \vec{y})|(\vec{x} \pm \vec{y}) = \vec{x}|\vec{x} \pm 2\vec{x}|\vec{y} + \vec{y}|\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 \pm 2\vec{x}|\vec{y} + \|\vec{y}\|^2,$$

e

$$(\vec{x} - \vec{y})|(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}|\vec{x} - \vec{y}|\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2.$$

Vamos agora ver como a noção de produto interno permite definir rigorosamente as noções de *comprimento*, *ortogonalidade* e *ângulo*.

Produto interno e norma

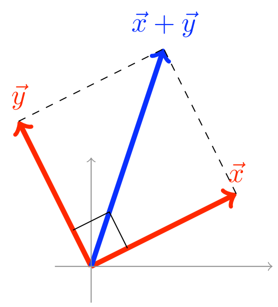
Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, tem-se $\|\vec{x}\|2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \vec{x}|\vec{x}$, ou seja,

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}|\vec{x}}}$$

Produto interno e ortogonalidade

Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

- $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})|(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}|\vec{x} + \vec{y}|\vec{y} + 2\,\vec{x}|\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\vec{x}|\vec{y}$.
- Se $\vec{x} \perp \vec{y}$ tem-se também $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ (Teo. de Pitágoras).



Assim

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,x|y = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow 2\,x|y = 0 \Leftrightarrow x|y = 0,$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{x}|\vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}.}$$

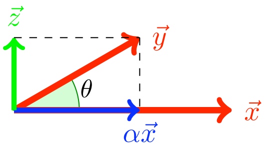
Produto interno, ângulo de vectores e projeção ortogonal

Para definir ângulo entre 2 vetores consideremos vectores não nulos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e a *projeção ortogonal* de $\vec{y}$ sobre o vetor $\vec{x}$, $\mathrm{proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \alpha\vec{x}$. Suponhamos ainda $\alpha > 0$.

Tem-se,

- $\cos\theta = \dfrac{\|\alpha\vec{x}\|}{\|y\|} \Leftrightarrow \|\alpha\vec{x}\| = \|\vec{y}\|\cos\theta$;

- $\vec{y} = \alpha\vec{x} + \vec{z}$ para algum $\vec{z} \perp \vec{x}$.



Assim,

$$\begin{aligned}
\vec{x}|\vec{y} &= \vec{x}|(\alpha\vec{x} + \vec{z}) \\
&= \alpha(\vec{x}|\vec{x}) + \underbrace{\vec{x}|\vec{z}}_{0} \\
&= \alpha\|\vec{x}\|\,\|\vec{x}\| \qquad (2.1) \\
&= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Logo, de (2.2) e (2.1) obtém-se respetivamente,

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\
\alpha &= \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|^2}
\end{aligned}$$

A fórmula anterior é também válida quando $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, isto é, quando $\alpha \le 0$ (a dedução faz-se de modo análogo).

Assim, dados vetores não nulos, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, define-se *ângulo* entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como

$$\boxed{\theta \in [0,\pi] \qquad \text{tal que} \qquad \cos(\theta) = \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}}$$

e tem-se para a projeção ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\vec{x}$, $\text{proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \alpha\vec{x}$,

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}|\vec{x}}{\vec{x}|\vec{x}}\,\vec{x}.}$$

Em geral dada uma reta r que passa na origem e um vetor $\vec{y}$, define-se a *projeção ortogonal* de $\vec{y}$ sobre r como sendo

$$\boxed{\text{proj}_r(\vec{y}) = \frac{\vec{y}|\vec{x}}{\vec{x}|\vec{x}}\,\vec{x},}$$

onde $\vec{x}$ é um qualquer vetor director da reta. O vetor $\text{proj}_r(\vec{y})$ é o vetor da reta que se encontra mais próximo de $\vec{y}$. Define-se *distância* de $\vec{y}$ à reta r como sendo distância de $\vec{y}$ a $\text{proj}_r(\vec{y})$, ou seja,

$$\boxed{\text{dist}(\vec{y}, r) = \|\vec{y} - \text{proj}_{\vec{x}}(\vec{y})\|.}$$

Exemplo

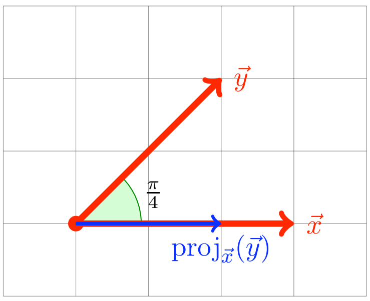
Sejam $\vec{x} = (3, 0)$ e $\vec{y} = (2, 2)$. O ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$ é único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{(3,0)|(2,2)}{\|(3,0)\|\,\|(2,2)\|} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{4}$.

A projeção ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\vec{x}$ vem dada por

$$\text{proj}_r(\vec{y}) = \frac{\vec{y}|\vec{x}}{\vec{x}|\vec{x}}\,\vec{x} = \frac{(2,2)|(3,0)}{(3,0)|(3,0)}\,(3,0) = (2,0).$$



A distância de $\vec{y}$ à reta definida por $\vec{x}$ vem dada por,

$$\operatorname{dist}(\vec{y}, r) = \|\vec{y} - \operatorname{proj}_{\vec{x}}(\vec{y})\| = \|(2,2) - (2,0)\| = 2.$$

2.2 Matrizes e sistemas de equações lineares

Matrizes

Uma *matriz* A do tipo $m \times n$ é uma coleção de mn elementos de $\mathbb{R}$, a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, dispostos em m linhas e n colunas,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denota-se $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, onde a_{ij} é o elemento de A que se encontra na linha i e coluna j de A.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

é uma matriz do tipo 2×3, tal que

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 3, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -3.$$

Se $a_{ij} = 0$ para todo o i, j, A diz-se a matriz *nula* (do tipo $m \times n$) e denota-se $\mathbf{0}_{m \times n}$.

Matriz coluna e matriz linha

- Se $n = 1$ A diz-se uma *matriz-coluna ou vetor*. Nessa altura,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 30 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (1, -2, 30) \in \mathbb{R}^3.$$

- $m = 1$, A diz-se uma *matriz-linha*. Nessa altura,

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix}_{1\times n}.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 4}.$$

Matriz quadrada

Matriz quadrada (de ordem n) é uma matriz do tipo $n \times n$.

Chamamos *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ aos elementos da forma a_{11}, a_{22},..., a_{nn}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Dizemos que A é *diagonal* se forem nulos todos os elementos fora da diagonal principal, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo o i, j tal que $i \neq j$. Nessa altura A denota-se também por

$$\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Exemplo

$$A = \mathrm{diag}(-1, 1, 3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Chama-se matriz *escalar* a uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais entre si:

$$\mathrm{diag}(\alpha, \ldots, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Se $\alpha = 1$ a matriz escalar chama-se *matriz identidade de ordem n*,

$$I_n = \operatorname{diag}(1,\ldots,1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Transposição de matrizes

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$ define-se a matriz A^T do tipo $n \times m$, chamada *transposta* de A, cujas linhas são as colunas de A, escritas pela mesma ordem.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$ diz-se *simétrica*.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} \text{ é simétrica se e só se } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 4 & 3 & \gamma \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

isto é, se e só se $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $\gamma = -3$.

Operações algébricas com matrizes

As operações algébricas para matrizes generalizam as operações algébricas, *adição*, *produto por um escalar* e *produto interno* bem conhecidas para vetores.

Adição de matrizes

Dadas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo $m \times n$ define-se a matriz $A + B$ do tipo $m \times n$, em que o elemento que está na posição (i, j) é a soma do elemento na posição (i, j) de A com o elemento na posição (i, j) de B, ou seja, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 20 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 4},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 3 & 16 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 17 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Produto de uma matriz por um escalar

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se a matriz λA do tipo $m \times n$, obtida mulitplicando todos os elementos da matriz A por λ, ou seja, $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

Exemplos

- $100 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & -100 & 400 \\ 200 & 300 & -400 & 500 \\ 0 & 500 & 100 & 700 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$

- $\alpha I_n = \text{diag}(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$

Produto de matrizes

Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas* se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Dadas matrizes *encadeadas*,

$$A = [a_{ij}], \qquad \text{do tipo } m \times n,$$

$$B = [c_{jk}], \qquad \text{do tipo } n \times p,$$

define-se a matriz produto

$$AB = C = [c_{ik}], \qquad \text{do tipo } m \times p,$$

onde $c_{ik} = (\text{linha } i \text{ de } A) \,|\, (\text{coluna } k \text{ de } B)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ \boxed{10 \quad 0 \quad -3 \quad 5} \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} -6 & 14 & 14 \\ -1 & 70 & -26 \\ -103 & 37 & \boxed{-3} \\ -5 & 70 & -10 \\ -29 & 7 & -9 \end{bmatrix}_{5\times 3}$$

$$(c_{33} = (10, 0, -3, 5)|(0, -5, 1, 0) = -3)$$

Propriedades das operações com matrizes

Dadas matrizes A, B, C e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se, (**sempre que as operações façam sentido**):

- $A + B = B + A$;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- $A + \mathbf{O} = A$ (elemento neutro da adição);
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $A(B + C) = AB + AC$;
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B$;
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- $AI = IA = A$ (elemento neutro da multiplicação).
- $(AB)^T = B^T A^T$.

O produto de matrizes não verifica algumas propriedades importantes, bem conhecidas dos números reais:

- O produto de matrizes **não é comutativo** (em geral): dadas matrizes quadradas A e B da mesma ordem, podemos ter

$$AB \neq BA.$$

De facto, basta considerar, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

- **Não é válida a lei do anulamento do produto**: se A e B são matrizes encadeadas,

$$AB = \mathbf{O} \quad \not\Rightarrow \quad (A = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad B = \mathbf{O}).$$

De facto, basta considerar $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $AB = 0_{2\times 1}$ (verfique!).

- **Não é válida a lei do corte**: dadas matrizes A, B e C,

$$AB = AC \qquad \not\Rightarrow \qquad B = C.$$

De facto, basta considerar $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $AB = AC$ com $B \neq C$ (verifique!).

Transformações geométricas no plano e no espaço

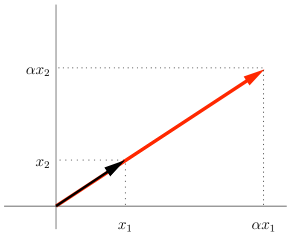
Vamos agora ver alguns exemplos de transformações **geométricas** no plano e no espaço que podem ser definidas usando o produto de matrizes. Estas transformações designam-se mais geralmente por transformações **lineares**.

Transformações geométricas no plano

- **Homotetias:**

$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ define uma *homotetia* de razão $\alpha > 0$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}.$$



Se $\alpha > 1$ [$\alpha < 1$] a homotetia é uma *dilatação* [*contracção*].

- **Simetrias:**
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, define uma *simetria* relativamente ao eixo dos xx:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

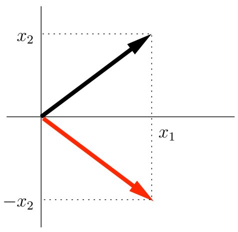
  - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, define uma *simetria* relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

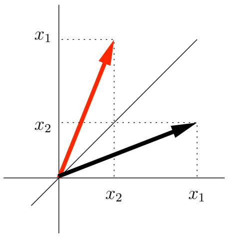
  - Em geral, a matriz

$$A = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix},$$

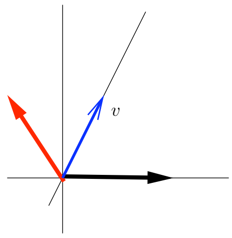
define uma *simetria* relativamente à reta que passa na origem definida pelo vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq \vec{0}$.



simetria relativamente
ao eixo dos xx



simetria relativamente à
bissectriz dos quadrantes ímpares



simetria relativamente a
uma reta com vetor diretor v

- **Rotações:**

  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ define uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos:

  $$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

  De facto, tem-se $(x_1, x_2)|(-x_2, x_1) = 0$ para todo o $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

  Em geral, $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, define uma *rotação* de ângulo θ (em radianos):

  $$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Transformações geométricas no espaço

Vejamos alguns exemplos de transformações geométricas no espaço.

- A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente ao plano xOy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

Definem-se de modo análogo as matrizes de simetria relativamente aos planos xOz e yOz.

- A matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, define uma *rotação* de ângulo θ em torno do eixo dos zz:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{bmatrix}$$

Definem-se de modo análogo as matrizes de rotação em torno do eixo dos xx e do eixo dos yy.

Interprete num sistema de eixos coordenados as transformações geométricas que definem rotações no plano e no espaço.

O produto de matrizes via transformações geométricas

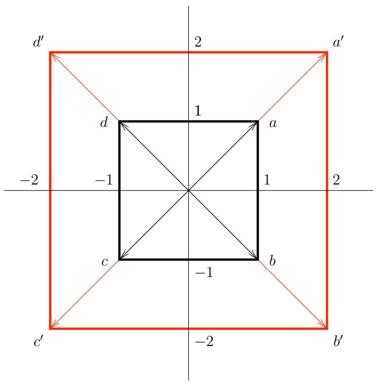
Podemos interpretar as colunas de AB como as imagens da transformação definida pela matriz A dos vetores que constituem as colunas de B.

Exemplo A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

define uma homotetia que transforma o quadrado Q de vértices, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ e $(-1,1)$, ou seja, definido pelos vetores $a=(1,1)$, $b=(1,-1)$, $c=(-1,-1)$ e $d=(-1,1)$, no quadrado Q' definido pelos vetores $[a'|b'|c'|d'] = A\cdot[a|b|c|d] = [Aa|Ab|Ac|Ad]$ ou seja, definido pelas colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{r|r|r|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|r|r|r} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right].$$



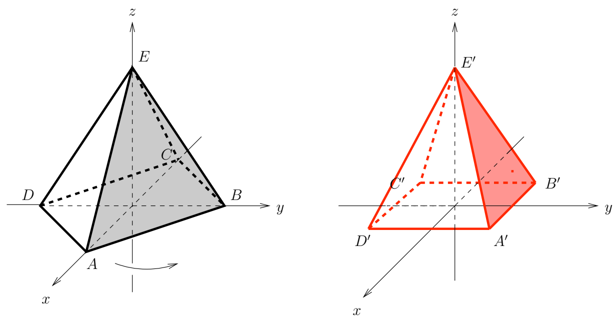
Exemplo A matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

define uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$ radianos em torno do eixo dos zz que transforma a pirâmide de base quadrangular definida pelos pontos $A=(1,0,0)$,

$B = (0,1,0)$, $C = (-1,0,0)$ e $D = (0,-1,0)$ e com vértice $E = (0,0,1)$, na pirâmide de base definida por A', B', C' e D' e vértice E', onde

$$
\begin{aligned}
[A'|B'|C'|D'|E'] &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$



Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *invertível* (ou *não singular*) se existir uma matriz quadrada B de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Notas:

- Prova-se que basta verificar uma das condições $AB = I$ ou $BA = I$.
- A matriz B qd existe é única, designa-se por *inversa* de A e denota-se por A^{-1}.

Uma matriz que não é invertível, diz-se *singular*.

Algumas propriedades

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Têm-se:

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $A\,B$ é invertível e tem-se $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é invertível sse $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$, tendo-se
$$A^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}).$$
- $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, pois $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Mais geralmente, tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ se $ad - bc \neq 0$.

Equações matriciais e sistemas de equações lineares

Consideremos a equação matricial

$$\boxed{Ax = b}$$

onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz do tipo $m \times n$, $x = [x_j]$ é a matriz-coluna (i.e, vector) com n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e $b = [b_i]$ é uma matriz-coluna com m componentes. Tem-se o seguinte:

o vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução da equação matricial $Ax = b$ se e só se x é solução do sistema *linear*, com m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

As matrizes A e b chamam-se, respectivamente, *matriz dos coeficientes* e *matriz dos termos independentes* do sistema $Ax = b$. A matriz do tipo $m \times (n+1)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

chama-se *matriz ampliada* do sistema $Ax = b$ denota-se por $[A|b]$.

Exemplo

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tem-se,

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $x = (x_1, x_2)$ é solução da equação matricial $Ax = b$ se e só se é solução do sistema linear com 2 equações e 2 variáveis,

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = -1 \\ -x_1 + 0x_2 = 1, \end{cases}$$

cuja matriz ampliada $[A|b]$ é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Se $m = n = 1$, $Ax = b$ reduz-se a uma equação linear com uma variável, sendo normalmente denotada por $ax = b$, tendo-se $x = a^{-1}b$ (se $a \neq 0$).

A notação matricial vai-nos permitir indicar a solução de um sistema $Ax = b$, com A matriz quadrada de ordem n, de uma forma análoga ao caso anterior, substituindo a condição $a \neq 0$ por A *invertível*.

Solução da equação $Ax = b$ com A invertível

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Logo a solução (única) de $Ax = b$ é $x = A^{-1}b$.

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior e o vector $b = (b_1, b_2)$. A solução (única) de $Ax = b$ é

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_2 \\ \frac{b_1+b_2}{2} \end{bmatrix}.$$

Dois sistemas lineares do tipo $m \times n$ dizem-se *equivalentes* se possuirem o mesmo conjunto de soluções.

Exemplo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ & & x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Classificação e resolução de um sistema linear

Um sistema linear pode ser,

- *possível e determinado* (PD) se possuir uma única solução.
- *possível e indeterminado* (PI) se possuir mais que uma solução (nesse caso possui ∞ soluções).

- *impossível* (I) se não possuir soluções.

Classificar/discutir um sistema é indicar se o sistema é PD, PI ou I.

Resolver um sistema é determinar o seu conjunto de soluções.

Operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada

(que transformam a matriz ampliada de um sistema na matriz ampliada de um sistema equivalente)

1. Multiplicar uma linha por um número real e adicionar o resultado a outra linha.

$$\text{Ex:} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \quad (L_2 \to -2L_1 + L_2)$$

2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo:

$$\text{Ex:} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad (L_2 \to \frac{-1}{3} L_2)$$

3. Trocar linhas entre si:

$$\text{Ex:} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \quad (L_1 \to L_2 \ ; \ L_2 \to L_1)$$

Definem-se analogamente operações elementares sobre as equações de um sistema.

Matriz em escada e matriz reduzida

- Uma matriz diz-se *escada* se o 1º elemento não nulo de cada linha, que se designa por *pivot*, estiver mais à direita que o pivot da linha anterior.

$$\text{Ex:}\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 2 \end{array}\right]$$

- Uma matriz diz-se *reduzida* se estiver em escada, todos os pivots forem iguais a 1 e em cada coluna com pivot o único elemento não nulo é o pivot.

$$\text{Ex:}\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right]$$

- Definem-se analogamente sistema em escada e sistema reduzido, substituindo na definição linhas da matriz por equações do sistema.

Método de eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases utilizando as operações elementares sobre as equações [linhas] de um sistema [matriz] para obter um sistema [matriz] mais simples equivalente ao sistema [matriz] original:

(i) A **fase descendente** tem como objectivo pôr o sistema [matriz] em escada. No final desta fase podemos classificar o sistema. O sistema [matriz] em escada não é único, dependendo das operações elementares que foram efectuadas.

(ii) A **fase ascendente** aplica-se aos sistemas possíveis e tem como objectivo reduzir o sistema [matriz] em escada. O sistema [matriz] reduzido é único, ou seja, não depende das operações elementares que foram efectuadas.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{sistema} & \xrightarrow{\text{desc.}} & \text{sistema em escada} & \xrightarrow{\text{asc.}} & \text{sistema reduzido} \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{matriz ampliada} & \xrightarrow{\text{desc.}} & \text{matriz em escada} & \xrightarrow{\text{asc.}} & \text{matriz reduzida} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \textbf{classificação} & & \textbf{conjunto de soluções}
\end{array}$$

Vamos ilustrar o método de eliminação de Gauss nalguns exemplos.

Exemplo 1

Pretende-se resolver o sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Fase descendente:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Não existem equações impossíveis no sistema e todas as colunas do sistema em escada têm pivot. Logo o sistema é possível e determinado.

Fase ascendente:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Conjunto de soluções do sistema é $S = \{(1, 0, 2)\}$.

Exemplo 2

Resolver o sistema dado matricialmente por

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Fase descendente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Não existem equações impossíveis. Existem colunas sem pivot. Logo o sistema é possível e indeterminado, com variável livre x_4 associada à coluna sem pivot.

Fase ascendente:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{7}{2} - x_4 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2} \\ x_3 & = & -\frac{5}{2} \\ x_4 & = & \forall \end{cases}$$

O conjunto de soluções do sistema é

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 = \frac{7}{2} - x_4, \ x_2 = -\frac{3}{2}, \ x_3 = -\frac{5}{2}, \ x_4 = \forall \right\}$$

Podemos tomar valores arbitrários para x_4. Se, por exemplo, tomarmos $x_4 = 1$ obtemos a solução $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1)$.

Exemplo 3

Resolver o sistema dado matricialmente por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Fase descendente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

A última linha da matriz corresponde à equação impossível

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1,$$

pelo que o sistema é impossível. Logo $S = \emptyset$.

Algorítmo para a determinação da inversa de uma matriz

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Para calcular A^{-1} temos que determinar uma matriz $X = [x|y] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, tal que $AX = I_2$.

Ora

$$\begin{aligned} AX = I_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & y_1 + 2y_2 \\ -x_1 & -y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ay = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo os sistemas obtemos $x = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $y = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Em geral, para determinar a matriz inversa (quando existe) de uma matriz A de ordem n temos que determinar uma matriz $X = \left[x_1 | \cdots | x_n\right]$ tal que $AX = I_n$, ou seja, temos que resolver as equações matriciais, com a mesma matriz de coeficientes A,

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad Ax_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos resolver simultaneamente estas equações aplicando o método de Gauss para reduzir a matriz A:

$$\left[\, A \mid I \,\right] \xrightarrow[\text{desc.}]{} \left[\, A' \mid I' \,\right] \xrightarrow[\text{asc.}]{\text{N}} \left[\, I \mid A^{-1} \,\right]$$

A' em escada

tem linhas de zeros ?

$\downarrow$ S

$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ é não invertível} \\ \textbf{STOP} \end{array}}$

Exemplos

1. Pretende-se determinar a inversa da matriz (se existir) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Aplicando o algorítmo da inversa, vem

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

   Logo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Pretende-se determinar a inversa da matriz (se existir) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Tem-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [\, A'|I' \,]$$

A' tem uma linha de zeros. Logo A é não invertível.