INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Uma Resolução Resumida do Exame de Matemática II
(1ª. Chamada)

Duração: 2 horas 18 de Junho de 2015

1. a) i) Quadro 1: "número de espécies arbóreas ripícolas"(x), variável quantitativa discreta porque só pode tomar valores em $\mathbf{N}_0$;
Quadro 2: "qualidade global da água"(y), variável qualitativa ordinal porque são dados categorizados em que a ordem das categorias tem significado;
Quadro 3: "teor de nitratos"(z), variável quantitativa contínua porque pode tomar qualquer valor em $\mathbf{R}_0^+$

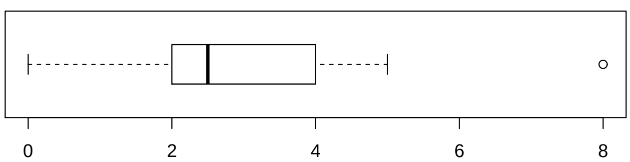
ii) Variáveis x e y - diagramas de barras; variável z - histograma.

b) Quadro 1:
média, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{18} x_i}{18} = \frac{0\times3+2\times6+3\times3+4\times4+5\times1+8\times1}{18} = 2.78$
mediana ($n = 18$ é par), $\tilde{x} = \frac{x_{(9)}+x_{(10)}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$
moda, $mo = 2$

Quadro 2:
média (não é possível calcular em dados qualitativos)
mediana (não é possível calcular em dados qualitativos)
moda, $mo =$ "Boa"

Quadro 3:
média, $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{18} z_i}{18} = \frac{101.7}{18} = 5.65$ mg/l
mediana (após ordenar o conjunto de dados), $\tilde{z} = \frac{z_{(9)}+z_{(10)}}{2} = \frac{5.1+5.3}{2} = 5.2$ mg/l
moda (não faz sentido calcular em dados quantitativos contínuos não agrupados)

c) $min = 0$; $Q_1 = x_{([18\times0.25]+1)} = x_{(5)} = 2$; $\tilde{x} = 2.5$; $Q_3 = x_{([18\times0.75]+1)} = x_{(14)} = 4$; $max = 8$.
$BI = Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1) = -1 < min = 0$
$BS = Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1) = 7 < x_{(18)} = max = 8 \Rightarrow x_{(18)}$ é *outlier*.



d) i) $\bar{z} = \frac{101.7}{18} = 5.65$ mg/l

ii) $\gamma^*(90) = \frac{(0.1-13.5)^2+(2.3-9.4)^2+(9.6-4.1)^2+(6.1-4.3)^2+(8.2-4.3)^2+(2.4-3.9)^2+(5.3-8.1)^2+(6.1-5.1)^2+(5.7-3.2)^2}{2\times9}$
$\gamma^*(90) = 16.445$ mg^2/l^2

2. De acordo com o enunciado $r_{xy} = 0.7038241$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 637689$ e $\bar{y} = 53313.88$ ha.

a) $b_0 = \bar{y} - b_1\,\bar{x} \;\Leftrightarrow\; \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x}{n} = \frac{\bar{y}-b_0}{b_1} \;\Leftrightarrow\; \frac{637689}{n} = \frac{53313.88-8532.8}{2.3876} \;\Leftrightarrow\; n = 33.99 \simeq 34$

b) A precisão é dada pelo coeficiente de determinação, $R^2 = (r_{xy})^2 = 0.7038241^2 = 0.4954$. Este valor é baixo: a recta de regressão explica menos de 50% da variabilidade de y.

c) O que se pede é a interpretação do declive da recta de regressão (b_1, variação média de y quando x aumenta uma unidade) no contexto deste problema: por cada incêndio florestal adicional há, em média, um acréscimo de 2.3876 ha na área de mato ardida.

d) $\hat{y}|_{x=7085} = 2.3876 \times 7085 + 8532.8 = 25448.946$ ha.

3. X - v.a. que representa o número de avarias anual da impressora laser; $X \frown P(0.5)$
Y - v.a. que representa o número de avarias anual da impressora jacto de tinta $Y \frown P(0.9)$

a) i) $P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - 0.910 = 0.09$
(por consulta das tabelas).

ii) W - v.a. que representa o número de avarias, em 6 anos, da impressora laser; $W = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$ com X_i a v.a. que representa o número de avarias no ano i e $X_i \frown P(0.5),\ i = 1, 2, \ldots, 6$. Admitindo que $X_1, \ldots, X_6$ são v.a. independentes, $W \frown P(6 \times 0.5)$, pelo teorema da estabilidade da soma de v.a. com distribuição de Poisson.
$P[W < 3] = P[W \leq 2] = 0.423$ (por consulta das tabelas).

b) Como, de acordo com o enunciado, X e Y são v.a. independentes,

i) $P[X = 0, Y = 0] = P[X = 0] \times P[Y = 0] = 0.607 \times 0.407 = 0.247$
(por consulta das tabelas).

ii) o teorema da estabilidade de v.as. com distribuição de Poisson permite concluir que $(X + Y) \frown P(0.5 + 0.9)$, pelo que $P[X + Y = 5] = \frac{e^{-1.4} \times 1.4^5}{5!} = 0.011$.

c) F é a função distribuição cumulativa da v.a. contínua T, isto é, $F(x) = P[T \leq x]$.

i) $P[T \leq 0.5] = F(0.5) = 1 - e^{-0.5 \times 0.5} = 0.221$

ii) Seja x_0 a mediana de T.
$F(x_0) = 0.5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0.5x_0} = 0.5 \Leftrightarrow e^{-0.5x_0} = 0.5 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\ln 0.5}{-0.5} = 1.386$ anos.
Em 50% das vezes, a impressora volta a avariar-se 1.386 anos após ter tido uma avaria.

iii) Seja f a função densidade da v.a. T.

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{se F é derivável} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

4. X - v.a. que representa a duração de uma lâmpada (em horas); $X \frown N(2000, 250)$

a) i) $P[1100 < X < 2200] = P[X < 2200] - P[X \leq 1100] = P[\frac{X-2000}{250} < \frac{2200-2000}{250}] - P[\frac{X-2000}{250} \leq \frac{1100-2000}{250}] = \Phi(0.8) - \Phi(-3.6) = \Phi(0.8) - 1 + \Phi(3.6) = 0.78814 - 1 + 0.99984 = 0.78798$ (por consulta das tabelas).

ii) $P[X > 2222 | X > 2000] = \frac{P[X > 2222\ \wedge\ X > 2000]}{P[X > 2000]} = \frac{P[X > 2222]}{P[X > 2000]} = \frac{1 - P[X \leq 2222]}{0.5} = 2 \times (1 - \Phi(\frac{2222-2000}{250}) = 2 \times (1 - \Phi(0.89)) = 2 \times (1 - 0.81327) = 0.3726$ (por consulta das tabelas).

b) i) $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{15}$ - v.a que representa a duração média das 15 lâmpadas (em h) com $X_i \frown N(2000, 250)$ a duração da lâmpada $i = 1, \ldots, 15$. Como $X_1, \ldots, X_{15}$ são v.a. independentes, $\overline{X} \frown N(2000, \frac{250}{\sqrt{15}})$, logo
$P[\overline{X} < 1750] = P[\frac{\overline{X}-2000}{250/\sqrt{15}} < \frac{1750-2000}{250/\sqrt{15}}] = \Phi(-3.87) = 1 - \Phi(3.87) = 1 - 0.99995 = 0.00005$.

ii) Y - v.a. que representa o número de lâmpadas, em 15, que funcionam após estarem ligadas há mais de 2200 h. Como estamos perante 15 provas de Bernoulli (funcionar/não funcionar), independentes, com probabilidade de sucesso constante, $p = P[X > 2200] = 1 - P[X \leq 2200] = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.78814 = 0.21186 \simeq 0.2$, $Y \frown B(15, 0.2)$. Assim,
$P[Y > 10] = 1 - P[Y \leq 10] = 1 - 1 = 0$ (por consulta das tabelas).