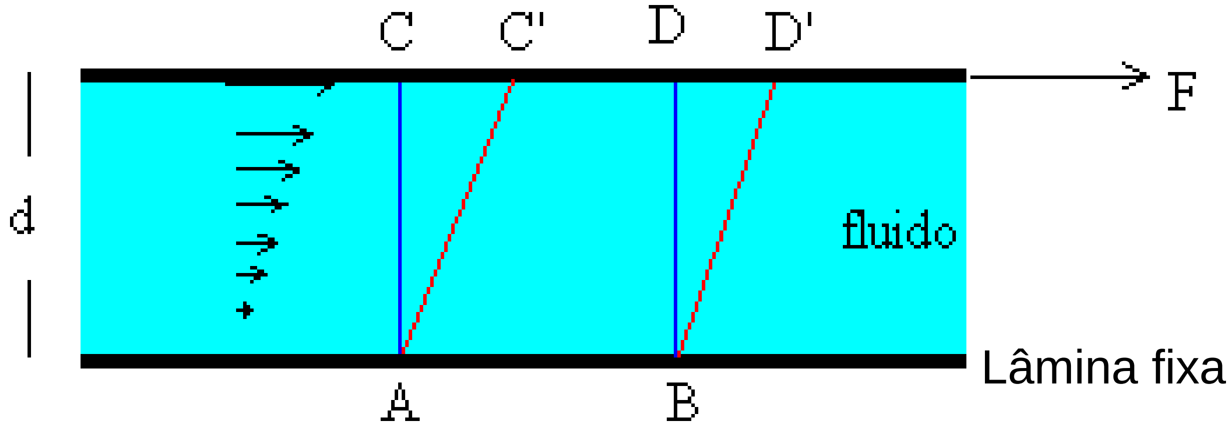
# Fluidos viscosos

A **viscosidade** é o atrito interno entre as camadas de fluído. Por causa da viscosidade, é necessário exercer uma força para obrigar uma camada de fluído a deslizar sobre outra.

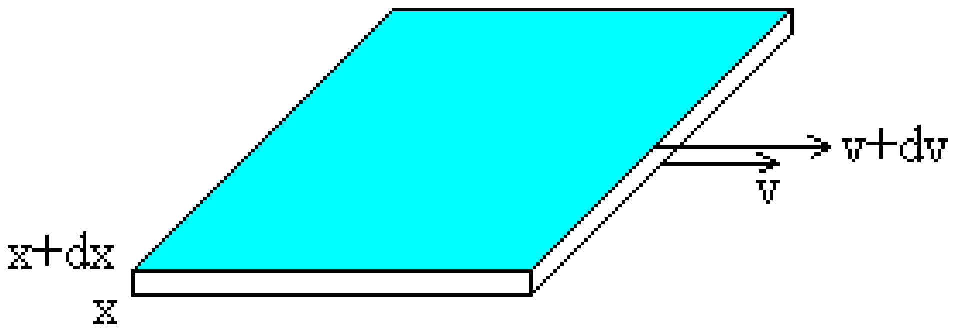



Na figura, é representado um fluído compreendido entre uma lâmina inferior fixa e uma lâmina superior móvel.

A camada de fluído em contacto com a lâmina móvel tem a mesma velocidade que ela, enquanto que a adjacente à parede fixa está em repouso. A velocidade das distintas camadas intermédias aumenta uniformemente entre ambas as lâminas tal como sugerem a intensidade dos vetores representados. Um escoamento deste tipo denomina-se **laminar**.

Como consequência deste movimento, uma porção de líquido que num determinado instante tem a forma **ABCD**, passado um certo tempo sofrerá uma deformação e transformar-se-á na porção **ABC'D'.**

Sejam duas camadas de fluído de área *A* que distam *dx* e entre as quais existe uma diferença de velocidade *dv*.




A força por unidade de área que temos que aplicar é proporcional ao gradiente da velocidade (variação da velocidade com a distância). A constante de proporcionalidade é denominada viscosidade $\eta$.

$$\boxed{\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dx}} \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{d}$$

No caso particular, mostrado na 1ª Figura, em que a velocidade aumenta uniformemente é:

$$\frac{dv}{dx} = \text{constante} = \frac{v}{d}$$

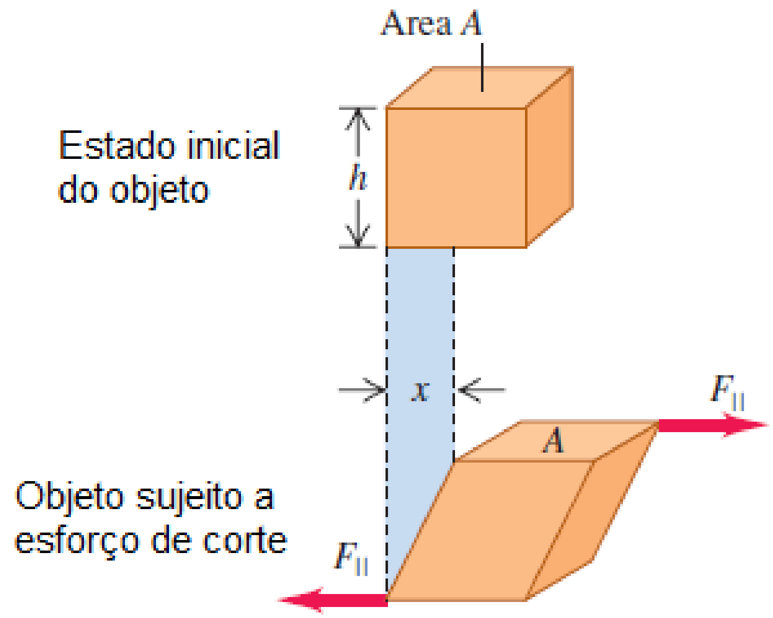
*v*- é a velocidade da camada
d – a distância para a camada em repouso

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dx} \quad \textbf{(1)}$$

A equação (1) pode agora escrever-se:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{d} \quad \textbf{(2)}$$

Lembrando o que foi referido na elasticidade sobre a tensão de corte:




$$\textit{Deformação específica de corte} = \frac{x}{h}$$

$$S = \frac{\textit{tensão de corte}}{\textit{deformação específica}} \Rightarrow S = \frac{F_{\parallel}/A}{x/h}$$

Dado que na equação (2) a deformação específica de corte é x/d:

$$\eta = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{v}{d}} = \frac{\text{tensão de corte}}{\text{taxa de variação com o tempo da deformação específica}}$$

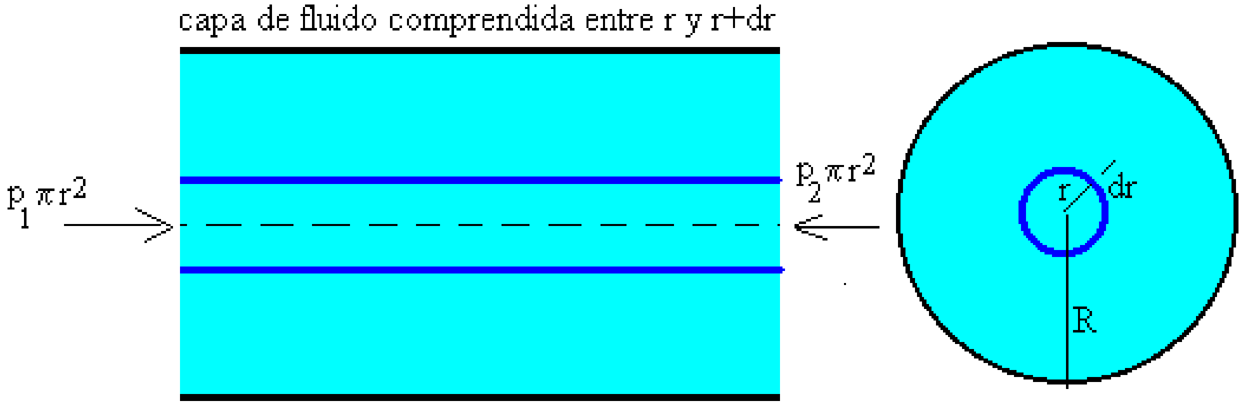
Unidades: Pa.m$^{-1}$.s.m = **Pa.s** **1poise**=1din.cm$^{-2}$.s=10$^{-1}$N.m$^{-2}$.s = **10$^{-1}$Pa.s**

**Os fluidos para os quais a viscosidade se mantém constante chamam-se NEWTONIANOS**

# MOVIMENTO DE UM FLUIDO VISCOSO

**Lei de Poiseuille**

Consideremos um fluído viscoso que circula com **escoamento laminar** por um tubo de raio interno *R*, e de comprimento *L*, sob a ação de uma força devida a diferença de pressão existente nos extremos do tubo.




Isolemos no interior do fluido um cilindro de fluido de raio r. A forca F é a diferença das forças resultantes da pressão exercida pela restante parte do fluido nas duas secções e a área é a superfície lateral do cilindro de raio r. Aplicando a eq (1) fica:

$$F = (p_1 - p_2)\pi r^2 \qquad A = 2\pi r L$$

$$\frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi r L} = -\eta \frac{dv}{dr}$$

O sinal negativo deve-se ao facto de *v* diminuir quando r aumenta.

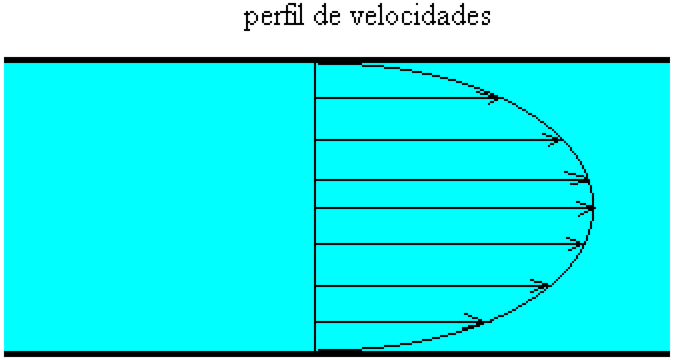
$$\frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi r L} = -\eta \frac{dv}{dr} \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2) r}{2 L \eta}$$

Resolvendo a equação diferencial e considerando que a constante de integração se calcula considerando que a velocidade é nula (v=0) junto das paredes do tubo (r=R)

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\frac{r^2}{2} + c \qquad 0 = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\frac{R^2}{2} + c \Rightarrow c = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)}$$

que é a equação de uma parábola



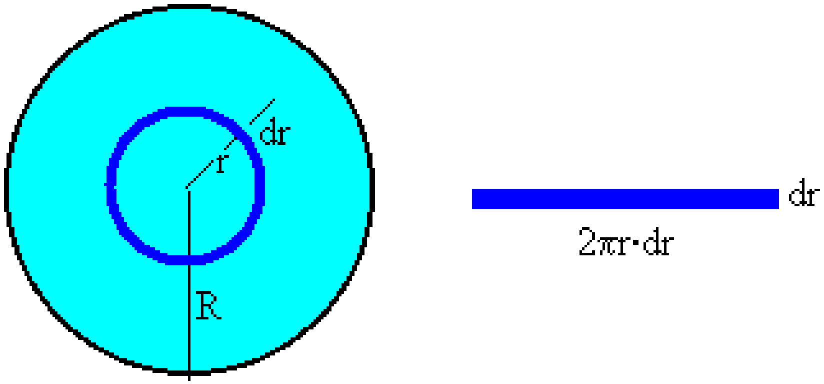

O escoamento tem portanto um perfil de velocidades parabólico, sendo a velocidade máxima no centro do tubo (r=0).

# Cálculo do caudal que circula no tubo

O volume de fluido que atravessa a área do anel compreendido entre r e r+dr na unidade de tempo (caudal) é:

$$dq = v \times A = v \times 2\pi r dr$$

em que v é a velocidade do fluxo a uma distância r do eixo do tubo




$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

$$dq = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \times 2\pi r dr = \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta L}(R^2 - r^2) r dr$$

$$\frac{dq}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta L}(R^2 r - r^3)$$

Resolvendo a equação diferencial fica

$$q = \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta L}(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}) + c$$

A constante calcula-se considerando que o caudal é nulo quando r=0.
Resulta então que c=0

O caudal (Q) que passa no tubo obtém-se quando r=R. Substituindo na equação anterior fica:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta L}\frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(p_1 - p_2)}{L}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(p_1 - p_2)}{L}}$$

**Fórmula de Poiseuille**

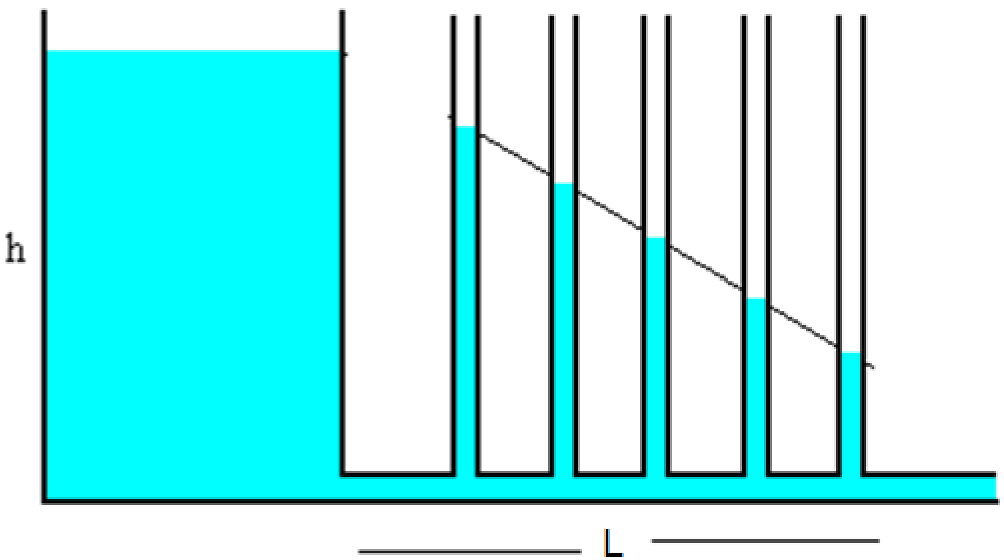
O caudal *Q* é inversamente proporcional à viscosidade e varia em proporção direta com a quarta potência do raio do tubo *R*, e é diretamente proporcional ao gradiente de pressão ao longo do tubo, logo ao quociente (*p1-p2*)/*L*.

## Perda de pressão (carga) por unidade de comprimento

Pode ainda observar-se que o gradiente de pressão (perda de carga por unidade de comprimento) é diretamente proporcional à velocidade média ($\bar{v}$) e indiretamente proporcional ao quadrado do raio.

$$\frac{(p_1 - p_2)}{L} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4} = \frac{8\eta \bar{v} A}{\pi R^4} = \frac{8\eta \bar{v}}{R^2}$$

$$\boxed{\frac{(p_1 - p_2)}{L} = \frac{8\eta \bar{v}}{R^2}}$$




Na figura os tubos manométricos marcam alturas decrescentes, informando-nos das perdas de energia por atrito devido à viscosidade. Na saída, uma parte da energia potencial que tem qualquer elemento de fluído ao iniciar o movimento foi transformado integralmente em calor.

## Lei de Stokes

Quando um corpo se move no seio de um fluído viscoso a resistência que apresenta o meio depende da velocidade e da forma do corpo.

Quando a velocidade relativa é inferior a certo valor crítico, a resistência que o meio oferece é devida quase exclusivamente a forças de atrito que se opõem ao deslizamento de umas camadas de fluído sobre outras, a partir da camada limite aderente ao corpo.

Foi comprovado experimentalmente, que a resultante destas forças é uma função da primeira potência da velocidade relativa.

Para o **caso de uma esfera**, a expressão desta força é conhecida como a fórmula de Stokes.

.

$$F = 6\,\pi\,R\,\eta\,v$$

Onde *R* é o raio da esfera, *v* sua velocidade e $\eta$ a viscosidade do fluído

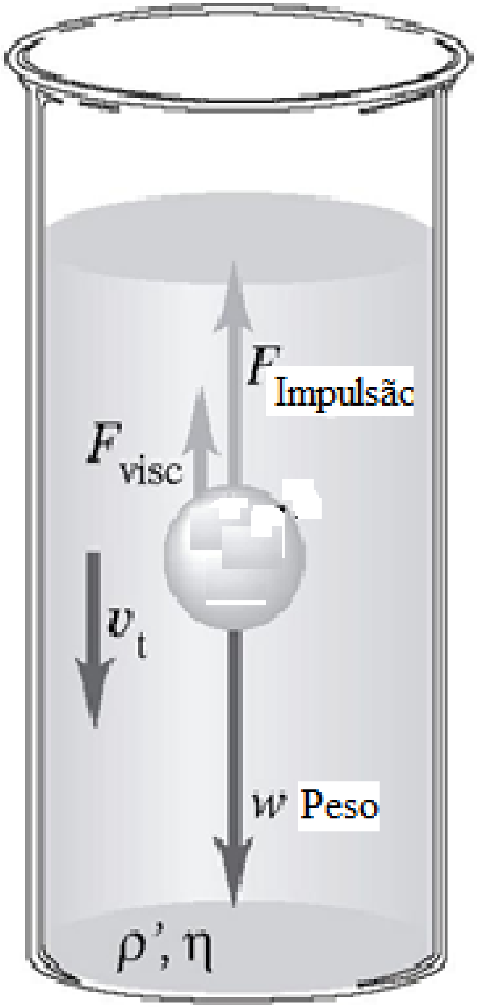
## Velocidade terminal. Determinação experimental da viscosidade

Uma esfera, mais densa que o fluido viscoso onde está imersa, atinge uma velocidade constante (terminal), quando a soma das forças que atuam sobre a esfera é nula.

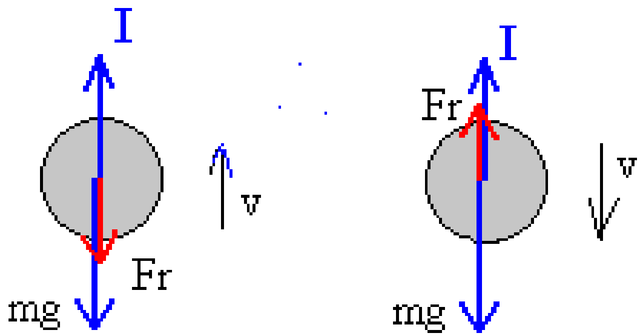
As forças a considerar são as representadas na figura: O peso, a impulsão e a força de atrito.

A relação entre o peso e a impulsão, relacionada com a flutuabilidade dos corpos foi tratada na hidrostática. Nos líquidos viscosos é necessário juntar àquelas forças a resistência do líquido (força de atrito) que no caso da esfera é, como já se referiu

$$F = 6\,\pi\,R\,\eta\,v$$



Movimento ascendente    Movimento descendente




A **velocidade limite** é atingida quando se verifica o equilíbrio das forças atuantes. No movimento descendente é:

$$mg - F - I = 0$$

$$mg = \rho_{corpo} \times \mathrm{Volume} \times g = \rho_{corpo} \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

$$I = \rho_{liquido} \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

$$\rho_{corpo} \frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi R\eta v - \rho_{liquido} \frac{4}{3}\pi R^3 g = 0$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_{corpo} - \rho_{liquido}) = 6\pi R\eta v$$

$$v = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_{corpo} - \rho_{liquido})}{6\pi R\eta} = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\eta}(\rho_{corpo} - \rho_{liquido})$$

$$\boxed{v = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\eta}(\rho_{corpo} - \rho_{liquido})}$$

Esta fórmula permite determinar experimentalmente a viscosidade de um líquido através da medição do espaço percorrido pela esfera num determinado intervalo de tempo, conhecidas as densidades do corpo e do líquido e o raio da esfera.

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{v}(\rho_{corpo} - \rho_{liquido})$$

---

**Adaptado da tradução brasileira feita pelo Prof: Everton G. de Santana da matéria contida na página:**
**[www.sc.ehu.es/sbweb/fisica](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica)**
**Autor: (C) Ángel Franco García**