

# Capítulo II-Teoria da Probabilidade

Os assuntos expostos nos slides 48 a 63 serão estudados apenas na aulas práticas, visto serem assuntos de revisão.

## Noções Preliminares

- **fenómenos aleatórios** – fenômenos sujeitos à influência do acaso e, como tal, fora do alcance do observador.
- **experiência aleatória** – todo o procedimento que verifica as seguintes propriedades:
  - pode repetir-se um grande número de vezes nas mesmas condições ou pelo menos em condições semelhantes;
  - a sua realização dá um resultado de entre um conjunto de resultados possíveis;
  - cada um dos resultados da experiência é imprevisível mas é possível considerar “estabilidade na frequência da sua ocorrência”.

Fenómenos aleatórios são caracterizados pela sua: **imprevisibilidade** e **regularidade estatística**

# Exemplos de experiências aleatórias

1. lançamento de dois dados e registo do número de pontos que sai;
2. lançamento de uma moeda e observação da face que fica voltada para cima;
3. contagem do número mensal de acidentes de automóvel numa autoestrada;
4. registo do tempo de vida de uma pessoa, em anos;
5. registo do tempo de trabalho de uma máquina até à primeira avaria.

# Espaço de Resultados. Acontecimento

**Espaço de resultados** ou **espaço amostra** – representa-se por  $\Omega$  – conjunto de todos os resultados possíveis associados a uma experiência aleatória.

Para os exemplos anteriores tem-se

1.  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ ;
2.  $\Omega = \{\text{'face valor'}, \text{'face país'}\} = \{\text{'FV'}, \text{'FP'}\} = \{1, 0\}$ ;
3.  $\Omega = \mathbb{N}_0$ ;
4.  $\Omega = \mathbb{N}$ ;
5.  $\Omega = \mathbb{R}^+$ .

**Acontecimento aleatório** - qualquer subconjunto do espaço de resultados.

# Álgebra dos acontecimentos

Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Diz-se que  $A \subset \Omega$  **se realizou** se o resultado,  $\omega$ , da experiência é um elemento de  $A$ , i.e.,  $\omega \in A$ .

- $A \subset B$ , diz-se  $A$  **subacontecimento** de  $B$ , se e só se a realização de  $A$  implica a realização de  $B$ ;
- $A^c$  ou  $\overline{A}$  diz-se **acontecimento complementar** ou **contrário** a  $A$ , é o conjunto de todos os elementos de  $\Omega$  que não estão em  $A$ ;
- $A \cup B$ , diz-se **união** de  $A$  com  $B$ , é o acontecimento que consiste na realização de pelo menos um dos acontecimentos.

# Álgebra dos acontecimentos (cont.)

- $AB$  ou  $A \cap B$ , diz-se **produto** ou **intersecção**, é o acontecimento que se realiza apenas quando ambos os acontecimentos se realizam.
- Os acontecimentos  $A$  e  $B$  dizem-se **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis** se e só se a realização de um implica a não realização do outro, i.e., **se e só se**  $AB = \emptyset$ .
- $A - B = A \cap \overline{B}$  diz-se **diferença** dos acontecimentos  $A$  e  $B$  é o acontecimento que se realiza se e só se  $A$  se realiza sem que  $B$  se realize.
- $\emptyset$  diz-se **acontecimento impossível**.
- $\Omega$  diz-se **acontecimento certo**.

# Álgebra dos acontecimentos

Vamos recordar algumas **propriedades** das operações sobre acontecimentos (procure mais algumas...):

## Propriedade

## Interpretação

Associatividade

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Comutatividade

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Distributividade

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Leis de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

...

...

# Probabilidade de um acontecimento

**Definição clássica** – Laplace (séc. XIX), sob a hipótese de que **todos os casos são igualmente prováveis ou possíveis (princípio da simetria)**.

**Probabilidade de realização de um acontecimento  $A$**

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos possíveis}}$$

**Definição frequencista** –  $n$  repetições duma experiência aleatória;  $n_A$  o nº de vezes que se verificou  $A$ .

Para  $n$  “grande” tem-se para as frequências relativas

$$f_n(A) = n_A/n \approx P$$

A probabilidade é então interpretada como frequência limite.

# Probabilidade de um acontecimento

$\Omega$  – espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

**Definição** Probabilidade,  $P$ , é uma aplicação que a cada acontecimento de  $\Omega$  associa um número real satisfazendo o seguinte conjunto de axiomas:

**A1)**  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega;$

**A2)**  $P(\Omega) = 1;$

**A3)**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset.$  (Axioma das probabilidades totais).

Se  $\Omega$  é infinito,

**A3\*)**  $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{se} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$  (Axioma completo das probabilidades totais).

# Leis básicas das probabilidades

1.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .
2.  $P(\emptyset) = 0$ .
3.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .
4.  $P(A) \leq 1$ .
5.  $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ .
6. Se  $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$ .
7. Sejam  $A_1, \dots, A_n$  acontecimentos mutuamente exclusivos então  
$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
8.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

# Leis básicas das probabilidades (cont.)

9.  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

10. Generalização:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  acontecimentos quaisquer

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

## Exercício

Sejam A, B e C acontecimentos aleatórios tais que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}; P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0 \text{ e } P(A \cap C) = \frac{1}{8}.$$

Calcule a probabilidade de se verificar pelo menos um dos acontecimentos A, B ou C.

# Probabilidade condicional

**Definição** Chama-se **Probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$**  ou **probabilidade de  $A$  se  $B$**  e representa-se por  $P(A|B)$ , com  $P(B) > 0$  a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Podemos enunciar o seguinte teorema:

## **Teorema das probabilidades compostas**

Se  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ ,

$$P(AB) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)$$

# Independência

**Definição** Dois acontecimentos  $A$  e  $B$  dizem-se mutuamente **independentes** se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Da definição **conclui-se** que se  $A$  e  $B$  são independentes então  $P(A|B) = P(A)$  se  $P(B) > 0$  e  $P(B|A) = P(B)$  se  $P(A) > 0$ .

## Teorema

Se  $A$  e  $B$  são independentes  
 $A$  e  $\overline{B}$ ,  $\overline{A}$  e  $B$  e  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$ , também são independentes.

**Nota:** Independência não é equivalente a exclusividade mútua.

Se  $P(A) > 0$  e  $P(B) > 0$  e  $A$  e  $B$  independentes  $\Rightarrow$   $A$  e  $B$  são não mutuamente exclusivos.

# Generalização a três acontecimentos

Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tais que  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$  e  $P(C) > 0$ , tem-se,

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(A)P(B|A)P(C|AB) = P(B)P(C|B)P(A|BC) = \\ &= P(C)P(A|C)P(B|AC). \end{aligned}$$

## Definição – Independência de três acontecimentos

Os acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $C$  dizem-se **mutuamente independentes** ou apenas **independentes** se e só se

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(A) P(B) P(C); & P(AB) &= P(A)P(B); \\ P(AC) &= P(A)P(C); & P(BC) &= P(B)P(C). \end{aligned}$$

**Nota:** A independência par a par não assegura independência de um conjunto de acontecimentos.

# Exercício 1

Um supermercado tem para venda três marcas diferentes de café,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , mas todas elas têm embalagens iguais. O supermercado abastece-se das três marcas numa proporção de 4:5:1, respectivamente.

As embalagens devem permitir manter as propriedades do café, mas quando têm defeito, ao fim de pouco tempo o café perde a qualidade. Tem-se verificado que a marca  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm apresentado, respectivamente, 0.02; 0.01 e 0.015 das embalagens de café em más condições de qualidade.

1. Escolhida uma embalagem ao acaso no supermercado, qual a probabilidade de o café estar em más condições?
2. Escolhida uma embalagem ao acaso, verifica-se que o café está em más condições. Qual a probabilidade de essa embalagem ser do tipo  $B$ ?

# Teorema da probabilidade total

A resolução da pergunta 1. baseia-se no seguinte teorema

## Teorema da probabilidade total

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  acontecimentos definindo uma **partição sobre  $\Omega$** , i.e.,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega \quad \text{e} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j, i \neq j.$$

Se  $P(A_i) > 0$ , então para qualquer acontecimento  $B \subset \Omega$  tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i).$$

# Teorema de Bayes

Relativamente à pergunta 2. do exercício anterior, pretendemos *atualizar* a probabilidade de um acontecimento *a priori*, à custa da informação *a posteriori*.

O seguinte teorema formaliza a resposta à questão:

## Teorema de Bayes

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  acontecimentos formando uma partição de  $\Omega$ , onde  $P(A_i) > 0$ . Seja  $B$  um outro acontecimento de  $\Omega$ , tal que  $P(B) > 0$ .

Então para  $k = 1, \dots, n$  tem-se

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

# Variável aleatória

Muitas vezes o resultado de uma experiência aleatória não é numérico ou sendo-o não interessa lidar com os resultados possíveis de  $\Omega$ , mas pretende-se associar-lhe uma quantidade numérica.

**Exemplo - lançamento de dois dados e soma dos pontos das faces.**

É mais cómodo associar a cada acontecimento um número, definido de acordo com o objectivo do estudo. Chama-se **variável aleatória** a esta correspondência.

**Definição** Chama-se **variável aleatória (v.a.)** e costuma representar-se por  $X$ , a **uma função com domínio  $\Omega$  e contradomínio em  $\mathbb{R}$** , cujo valor é determinado pelo resultado de uma experiência aleatória, i.e,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$X(\omega) = x.$$

# Tipos de variáveis aleatórias

- Variáveis aleatórias **discretas** se assumem um conjunto finito ou infinito numerável de valores.

Exemplos:

- número de pintas que sai no lançamento de um dado;
- registo, a intervalos regulares, do número de pessoas em fila espera na caixa de um supermercado;

- Variáveis aleatórias **contínuas** são as susceptíveis de tomar qualquer valor real num dado intervalo, que pode ser a recta real (definição mais rigorosa será dada à frente)

Exemplos:

- o peso de um indivíduo;
- o comprimento de uma folha de uma planta.

# Variáveis aleatórias

Mas ... aos valores de uma variável aleatória  $X$  pretendemos associar uma probabilidade  $P_X$  ou, mais simplesmente,  $P$

Isto consegue-se muito facilmente definindo uma função real de variável real do seguinte modo:

**Definição** Chama-se **função de distribuição cumulativa** ou apenas **função de distribuição** associada à variável aleatória  $X$  e representa-se por  $F$  ou  $F_X$ , à aplicação

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad F(x) = P[X \leq x].$$

# Propriedades da função de distribuição

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$
2.  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$   
 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$
3.  $F$  é uma função monótona não decrescente, i.e., dados dois números reais  $x_1$  e  $x_2$  tais que  $x_1 < x_2$ , tem-se  $F(x_1) \leq F(x_2)$
4.  $F(x)$  é contínua à direita, i.e.,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0).$
5.  $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$  onde  
 $F(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$

# Função de distribuição e Probabilidade

O conhecimento da função de distribuição  $F(\cdot)$  é equivalente ao conhecimento da lei de probabilidade  $P_X = P$ .

Como  $F(x) = P[X \leq x] \longrightarrow$  conhecer  $P \Rightarrow$  conhecer  $F(x)$ .

Reciprocamente ... conhecer  $F(x)$ , permite calcular a probabilidade dos vários tipos de intervalos.

- $P(X < x) = P(X \leq x) - P(X = x) = F(x^-)$ ;
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x^-)$ ;
- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ ;
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$ ;
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b^-) - F(a)$ ;
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$ ;
- $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$ .

# Variáveis aleatórias

Vamos agora ver como calcular a função de distribuição cumulativa e consequentemente a probabilidade para cada um dos tipos de variáveis aleatórias caracterizados atrás:

- variáveis aleatórias discretas e
- variáveis aleatórias contínuas

Relembre-se que:

Uma variável aleatória diz-se **discreta** se toma um número finito ou uma infinidade numerável de valores.

# Variáveis aleatórias discretas

Seja  $X$  uma v.a. tomando  $n$  valores,  $x_1, \dots, x_n$ , cada um deles com probabilidades  $p_1, \dots, p_n$ , respectivamente, i.e.,  
 $p_i = P[X = x_i]$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Definição** Chama-se **função massa de probabilidade** da v.a.  $X$  à **aplicação** que a cada valor  $x_i \longrightarrow p_i$ , tal que

$$p_i = P[X = x_i]$$

A **função massa de probabilidade** satisfaz:

$$p_i \geq 0, i = 1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

**Nota:** Se a v.a. tomar uma infinidade numerável de valores tem-se

$$p_i \geq 0, \forall i \geq 1 \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

# Variáveis aleatórias discretas

Chama-se **distribuição de probabilidade** da v.a.  $X$  ao conjunto de pares  $(x_i, p_i)_{i=1, \dots, n}$ .

Habitualmente a **lei (distribuição) de probabilidade** da v.a.  $X$  dispõe-se na forma:

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{cases}$$

A distribuição de probabilidade da v.a. discreta permite calcular facilmente a **função de distribuição cumulativa**  $F_X$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i],$$

ou seja temos a probabilidade cumulativa associada à variável  $X$  calculada em qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

# Variáveis aleatórias contínuas

**Definição** Uma variável aleatória diz-se **contínua** se existe uma função real de variável real,  $f$ , não negativa, tal que

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad -\infty < x < \infty$$

**Definição** A função  $f$  diz-se **função densidade de probabilidade** ou apenas **função densidade**. Deve verificar as seguintes condições:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

**Nota:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \dots$$

# Exercícios

**Exercício 2.** O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória,  $X$ , com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

- Determine a função de distribuição cumulativa de  $X$ ; represente-a graficamente.
- Determine  $P[1 \leq X \leq 3]$ . Interprete esta probabilidade.

**Exercício 3.** Seja  $X$  a v.a. que designa o tempo de vida (em anos) de um dado equipamento, cuja função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 e^{-0.2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- Mostre que  $f$  é de facto uma função densidade.
- Determine a função de distribuição cumulativa de  $X$ ; represente-a graficamente.
- Qual a probabilidade de esse equipamento durar entre 1 e 3 anos?

# Variáveis aleatórias

## Podemos dizer então que:

- No caso de uma **variável aleatória discreta** a função de distribuição **cumulativa** é uma **função em escada**, onde os pontos de salto são os valores onde a v.a. está definida.
- No caso de uma **variável aleatória contínua** a função de distribuição **cumulativa** é uma **função contínua**.

Além de termos interesse em calcular probabilidades associadas a uma **variável aleatória**,

vamos agora calcular “indicadores” que a caracterizam – são valores reais habitualmente designados por **parâmetros**.

# Valor Médio

**Definição** Dada uma v.a.  $X$  chama-se **valor médio, esperança matemática, valor esperado** ou **média** e representa-se por  $E[X]$ ,  $\mu_X$  ou simplesmente  $\mu$  a

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad X \text{ é v.a. discreta com distribuição } (x_i, p_i)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad X \text{ é v.a. contínua com f.d.p. } f(x)$$

**Observação:** Se  $X$  for v.a. discreta com uma infinidade numerável de valores tem-se  $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ . Neste caso só existe valor médio se “aquela soma infinita existir”.

Analogamente, no caso contínuo, só existe valor médio,  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ , se o integral for absolutamente convergente.

# Valor Médio

Se  $X$  é uma v.a. e  $Y = \varphi(X)$  é uma função real de variável real, define-se valor médio de  $\varphi(X)$  como

$$E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i \quad X \text{ é v.a. discreta com distribuição } (x_i, p_i)$$

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad X \text{ é v.a. contínua com f.d.p. } f(x)$$

Mais uma vez, para que exista valor médio exige-se que exista aquela “soma infinita” (no caso de se tratar de uma v.a. discreta com uma infinidade de valores) ou a convergência absoluta do integral.

# Propriedades do Valor Médio

## 1. Linearidade

- $E[a] = a.$
- $E[a + bX] = a + b E[X].$
- $E[\varphi(X) + \psi(X)] = E[\varphi(X)] + E[\psi(X)]$

## 2. Positividade

Se  $X \geq 0$ , i.e. a variável toma apenas valores  $\geq 0$ , tem-se  $E[X] \geq 0.$

**3.**  $\inf(X) \leq E[X] \leq \sup(X)$

# Variância e Desvio Padrão

**Definição:** Chama-se **variância** de uma variável aleatória  $X$  e representa-se por  $Var[X]$ ,  $\sigma_X^2$  ou apenas  $\sigma^2$  a

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2]$$

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$  chama-se **desvio padrão**.

**Exercício:** Verifique que se pode escrever  $Var[X] = E[X^2] - \mu^2$

## Propriedades da variância e do desvio padrão

1.  $Var[X] \geq 0$
2.  $Var[a + b X] = b^2 Var[X]$ .

Para o **desvio padrão** tem-se  $\sigma_{(a+b X)} = |b| \sigma_X$

## Voltemos ao Exercício 2

O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória,  $X$ , com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

- Qual o valor esperado do número de esquentadores vendidos por dia?
- Se cada esquentador é vendido por 150 Euros qual é a distribuição de probabilidade da receita bruta da venda de esquentadores por dia.
- Calcule a receita bruta esperada da venda de esquentadores por dia.

## Exercício 4

Considere  $X$  a v.a. que designa a duração (em minutos) de cada chamada telefónica efectuada num certo local, cuja função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- Calcule a duração média de uma chamada telefónica.
- Calcule a variância de  $X$ .
- Se o preço de cada minuto de conversação for 60 cêntimos, qual é, em média, o preço de cada chamada telefónica.

# Quantis, Mediana de uma variável aleatória

## Definição

Dada uma v.a.  $X$  chama-se **Quantil de probabilidade  $p$**  e representa-se por  $\chi_p$  o menor valor da variável aleatória tal que  $F_X(\chi_p) \geq p$ .

Se  $p = 0.5$ , chama-se **mediana de  $X$** , representa-se por  $\chi_{0.5}$ , e é o menor valor da variável tal que  $F_X(\chi_{0.5}) \geq 0.5$ .

## Notas:

- Se  $X$  é v.a. contínua o quantil de probabilidade  $p$  é o valor  $\chi_p$  tal que  $F_X(\chi_p) = p$ .
- Então se  $X$  é uma v.a. contínua a mediana  $\chi_{0.5}$ , é a solução de  $F_X(x) = 0.5 \iff \int_{-\infty}^{\chi_{0.5}} f(t)dt = 0.5$ .

# Vectores aleatórios

Muitas vezes pretendemos associar a cada resultado de uma experiência aleatória  $k \geq 2$  atributos numéricos. Obtemos então um vector  $(x_1, \dots, x_k)$ , realização do **vector aleatório**  $(X_1, \dots, X_k)$ .

Iremos referir-nos apenas ao caso  $k = 2$ .

**Exemplos** Pretendemos registar:

- a quantidade de precipitado  $P$  e o volume  $V$  de gás numa experiência química
- para uma árvore seleccionada ao acaso, a altura e o diâmetro do tronco à altura do peito . . .

# Pares aleatórios

**Definição** Chama-se **par aleatório**  $(X, Y)$  à aplicação

$$\begin{aligned}(X, Y) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\rightarrow (x, y)\end{aligned}$$

Tipos de pares aleatórios que vamos estudar:

- Par aleatório **discreto**  $\Rightarrow$  componentes são ambas variáveis aleatórias discretas;
- Par aleatório **contínuo**  $\Rightarrow$  componentes são ambas variáveis aleatórias contínuas.

# Pares aleatórios discretos

$(X, Y)$  diz-se um par aleatório **discreto** se toma os valores  $(x_i, y_j)$  com probabilidades  $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$ .

**Definição** Chama-se **distribuição de probabilidades conjunta** do par  $(X, Y)$  aos valores  $(x_i, y_j)$  e respectivas probabilidades  $p_{ij}$

$p_{ij}$  é chamada **função massa de probabilidade conjunta** e deve verificar as seguintes condições:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \text{e} \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Um modo cómodo de representar a distribuição de probabilidades conjunta de um par aleatório discreto é na forma de uma tabela.

# Pares aleatórios discretos

Dado o par aleatório discreto  $(X, Y)$  chama-se **tabela de contingência** ou **tabela de dupla entrada** ao quadro na forma

$X$	$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$	
$x_1$		$p_{11}$	$p_{12}$	...	$p_{1n}$	$p_{1.}$
$x_2$		$p_{21}$	$p_{22}$	...	$p_{2n}$	$p_{2.}$
.		.	.	...	.	.
.		.	.	...	.	.
.		.	.	...	.	.
$x_m$		$p_{m1}$	$p_{m2}$	...	$p_{mn}$	$p_{m.}$
		$p_{.1}$	$p_{.2}$	...	$p_{.n}$	1

$p_{i.} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$  e  $p_{.j} = \sum_{i=1}^m p_{ij}$  chamam-se **probabilidades marginais** de  $X$  e  $Y$  respectivamente.

# Pares aleatórios discretos

Define-se **probabilidade condicional** de  $X$  dado  $Y = y_j$  (fixo) com  $P[Y = y_j] > 0$  como

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}},$$

Do mesmo modo **probabilidade condicional** de  $Y$  dado  $X = x_i$  (fixo) com  $P[X = x_i] > 0$  e  $x_i$  como

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}.$$

# Pares aleatórios contínuos

Um par aleatório  $(X, Y)$  diz-se **contínuo** se existir uma função  $f(x, y)$ , chamada **função densidade (de probabilidade) conjunta**, que verifica as seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$

Dado  $A \subset \mathbb{R}^2$  tem-se  $P[(X, Y) \in A] = \int \int_A f(x, y) dx dy.$

Define-se **densidade marginal de  $X$**  como  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

e **densidade marginal de  $Y$**  como  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

# Pares aleatórios contínuos

Define-se **densidade condicional** de  $X$  dado  $Y = y$ , fixo, como

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0$$

Analogamente **densidade condicional** de  $Y$  dado  $X = x$ , fixo, como

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0$$

# Independência de variáveis aleatórias

**Definição** Dado o par aleatório  $(X, Y)$  diz-se que as variáveis  $X$  e  $Y$  são **independentes** se e só se

- $p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \forall i, j,$  no caso de  $(X, Y)$  ser um par aleatório discreto
- $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  no caso de  $(X, Y)$  ser um par aleatório contínuo.

# Valor Médio

Dado o par aleatório  $(X, Y)$ , e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se

$$E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij} , \quad \text{no caso discreto}$$

$$E[g(X, Y)] = \int \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) dx dy , \quad \text{no caso contínuo.}$$

## Propriedades do valor médio

1. **Aditividade**  $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$
2. **Desigualdade de Schwarz** Se  $E[X^2]$  e  $E[Y^2]$  existem então  $E^2[XY] \leq E[X^2]E[Y^2]$ .

# Valores Médio - propriedades

**Corolário** da propriedade anterior:  $E^2[X] \leq E[X^2]$

**Nota:** se  $E[X^2]$  existe  $\implies$  existe  $E[X]$ .

3. Se  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes



$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

**Nota:** O recíproco não é verdadeiro: Verifique que se  $X$  e  $Y$  são v. a.'s com a seguinte distribuição de probabilidades

$X$	$Y$	-1	0	1
0		0	1/3	0
1		1/3	0	1/3

tem-se  $E[XY] = E[X]E[Y]$  e no entanto  $X$  e  $Y$  não são independentes

# A covariância - propriedades

**Definição:** Dado o par aleatório  $(X, Y)$  chama-se **covariância de  $X$  e  $Y$**  a

$$Cov[X, Y] = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

**Exercício:** Verifique que  $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

## Propriedades

1. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias.

$$Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2Cov[X, Y]$$

2. Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias **independentes**

$$Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y]$$

# A covariância - propriedades

3. Se  $X$  e  $Y$  são v. a.'s independentes  $\implies Cov[X, Y] = 0$ .

**Nota:** O recíproco não é verdadeiro.

4.  $Cov[a + bX, c + dY] = bd Cov[X, Y]$ .  
vamos provar???

5.  $|Cov[X, Y]| \leq \sigma_X \sigma_Y$ .

# O coeficiente de correlação

**Definição:** Chama-se **coeficiente de correlação** de  $X$  e  $Y$  e representa-se por  $\rho$  ou  $\rho_{X,Y}$  a

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

( $\sigma_X > 0$  e  $\sigma_Y > 0$ ).

## Propriedades do coeficiente de correlação

1.  $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
2. Se  $X$  e  $Y$  são v. a. independentes  $\implies \rho_{X,Y} = 0$ .
3.  $\rho_{a+bX, c+dY} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & \text{se } bd > 0 \\ -\rho_{X,Y} & \text{se } bd < 0 \end{cases}$

# Complementos com apoio na Análise

O cálculo do valor médio e da variância de uma v.a.  $X$  e ainda propriedades de pares aleatórios (ou genericamente vectores aleatórios) podem ser abordados de forma uniformizadora usando uma função adequada (quando ela está definida).

Considere-se uma função associada à v.a.  $X$  que vamos representar por

$$M_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } t \in \mathbb{R} \longrightarrow M_X(t) = E[e^{tX}]$$

**Exercício:** Para as variáveis a seguir indicadas calcule  $M_X(t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ :

- $X$ , variável aleatória discreta, associada ao lançamento de uma moeda equilibrada.
- $X$ , variável aleatória contínua, com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Tem-se o seguinte resultado:

$$\frac{dM_X}{dt} \Big|_{t=0} = E[X] \quad \text{e} \quad \frac{d^2 M_X}{dt^2} \Big|_{t=0} = E[X^2]$$

**Nota:** Esta função, a que se chama **função geradora de momentos**, pode ser então usada para determinar  $E[X]$  e  $Var[X]$ , calculando a primeira e segunda derivadas em  $t = 0$  (se existirem).

Para as variáveis aleatórias indicadas no **exercício** do slide anterior, calcule  $E[X]$  e  $Var[X]$ , com recurso a  $M_X$ .

# Função geradora de momentos

**Propriedades da função geradora de momentos** de uma v.a.  $X$

1.  $M_{a+b X}(t) = e^{at} M_X(bt)$ .

2. **Teorema da unicidade**

Se para duas v.a.  $X$  e  $Y$  se verifica  $M_X(t) = M_Y(t)$  então  $X$  e  $Y$  têm a mesma função de distribuição.

**Reciprocamente**, se existir a função geradora de momentos, ela é única.

3. Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

**Nota:** Mais adiante esta propriedade será de grande utilidade.

# Principais Modelos (Distribuições) Discretos

- Distribuição uniforme discreta
- Distribuição de Bernoulli e binomial
- Distribuição geométrica
- Distribuição hipergeométrica
- Distribuição de Poisson

# A distribuição uniforme discreta

**Definição** Uma v.a.  $X$  diz-se ter **distribuição uniforme discreta** se  $P(X = x_i) = 1/k$ ,  $i = 1, \dots, k$ , i.e., se toma os valores

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

com probabilidades  $1/k, 1/k, \dots, 1/k$

**Valor médio, variância e função geradora de momentos**

$$E[X] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i; \quad Var[X] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2; \quad M_X(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{tx_i}.$$

**Caso particular**

$$\text{Se } X = \begin{cases} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{n+1}{2}; \quad Var[X] = \frac{n^2-1}{12} \quad \text{e} \quad M_X(t) = \frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}, \quad t \neq 0$$

# A distribuição de Bernoulli

Experiência =  $\begin{cases} \text{realização de um acontecimento} & \textit{sucesso} \\ \text{não realização do acontecimento} & \textit{insucesso} \end{cases}$

## Exemplos:

- o teste de uma dada droga num rato e o registo da reacção positiva ou negativa;
- a inspecção dos itens numa linha de fabrico para observar se cada um é defeituoso ou não;

Cada uma das repetições sucessivas da experiência – **prova**.

**Definição:** Chama-se **variável aleatória de Bernoulli** à variável  $X$ , associada ao resultado de cada prova de Bernoulli e considera-se

- $X = 1$ , com probabilidade  $p$ , se há sucesso;
- $X = 0$ , com probabilidade  $1 - p = q$ , se há insucesso.

# A distribuição Binomial

Considere-se uma **sucessão de provas de Bernoulli independentes** satisfazendo:

- cada prova tem apenas um de dois resultados possíveis: **sucesso** ou **insucesso**.
- em cada prova a probabilidade de sucesso,  $p$ , permanece constante, sendo  $q = 1 - p$ , a probabilidade de insucesso.
- o resultado de cada prova é independente do resultado das restantes.

**Definição:** A v.a.  $X$  que conta o número de sucessos em  $n$  **provas nas condições acima** chama-se **variável aleatória binomial**, diz-se ter **distribuição binomial** e representa-se por  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

# A distribuição binomial

## Exemplo

Numa experiência colocam-se 5 bolbos de junquilha a germinar, de um pacote com uma garantia de germinação de 40% dos bolbos. Qual a probabilidade de, desses 5 bolbos, 3 germinarem?

Como a germinação é independente de bolbo para bolbo, a probabilidade de **germinarem 3 bolbos** de entre os 5 é então

$$\binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2$$

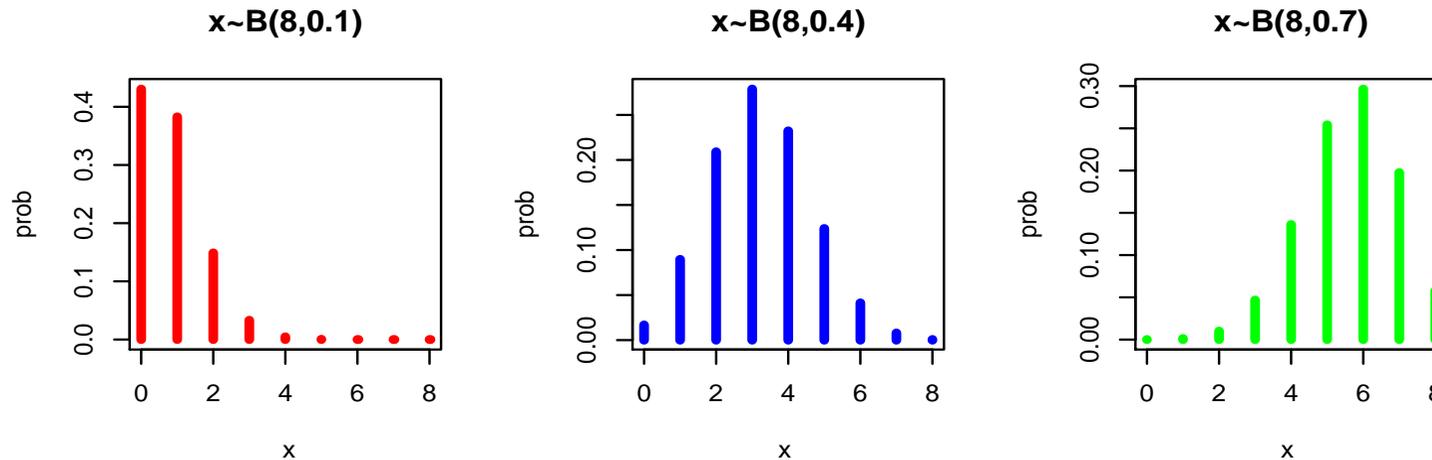
Então sendo  $X$  a v.a. que conta o número de sucessos em  $n$  **provas de Bernoulli independentes**,  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , temos a

**Caracterização da v.a.  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ :**

$$x = 0, 1, 2, \dots, n \quad \longrightarrow \quad n^{\circ} \text{ de "sucessos" nas } n \text{ provas}$$
$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad \longrightarrow \quad \text{probabilidade de se observarem } x \text{ "sucessos"}$$

# A distribuição binomial

**Exercício:** Para  $n = 8$  e vários valores de  $p$ , veja a função massa de probabilidade.



Sugestão: Consulte as folhas de Introdução ao software  e use os comandos (por exemplo, para obter o primeiro gráfico):

```
> x <- 0:8
```

```
> plot(x, dbinom(x, size=8, prob=0.1), type="h", col = "red",  
lwd=4, xlab="x", main="X ~ B(8, 0.1)", ylab="prob")
```

# A distribuição binomial

**Valor médio, variância e função geradora de momentos** de  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$E[X] = np; \quad Var[X] = npq; \quad M_X(t) = (p e^t + q)^n$$

**Relação entre a distribuição do número de sucessos e de insucessos**

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \Rightarrow (n - X) \sim \mathcal{B}(n, 1 - p).$$

Para valores de  $n \leq 20(25)$ , existem tabelas para o cálculo das probabilidades.

As tabelas que temos à disposição apresentam os valores da função de distribuição cumulativa.

# A distribuição geométrica

Considere-se de novo que temos **provas de Bernoulli independentes, mas agora . . .**

o número de provas não é fixo pois ... **pretendemos ir realizando provas até ocorrer** pela primeira vez o “sucesso”.

Seja então  **$X$**  o número de provas necessárias até que ocorra **pela primeira vez o “sucesso”**. Diz-se que  $X$  tem **distribuição geométrica** e costuma representar-se por  **$X \sim \mathcal{G}(p)$** .

**Caracterização da v.a.  $X \sim \mathcal{G}(p)$**

$$P[X = x] = pq^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots \quad 0 < p < 1 \quad q = 1 - p$$

**Valor médio, variância e função geradora de momentos**

$$M_X(t) = \frac{p e^t}{1 - qe^t} \quad (qe^t < 1); \quad E[X] = 1/p; \quad Var[X] = q/p^2$$

# A distribuição geométrica

**Teorema** - Propriedade da falta de memória da distribuição geométrica  
Se  $X \sim \mathcal{G}(p)$  então sendo  $m$  e  $n$  inteiros positivos

$$P[X > m + n | X > m] = P[X > n]$$

**Nota:** Interpretando a distribuição geométrica como o número de provas que se vão realizando à espera de se observar um "sucesso":  
se tiverem decorrido mais de  $m$  provas sem que se tenha verificado um "sucesso", a probabilidade de se ter de esperar mais de  $n$  provas para se observar um "sucesso" é a mesma caso se estivesse no início da experiência.

**Observação:** O recíproco deste teorema também é verdadeiro.

# A distribuição hipergeométrica

**Mas ...** há experiências nas quais a probabilidade de sucesso não se mantém constante, não sendo as provas independentes.

## **Exemplo**

Num lote de 20 pneus enviados a um fornecedor sabe-se que há 5 defeituosos. Um cliente vai a esse fornecedor comprar 4 pneus. Qual a probabilidade de levar 2 defeituosos?

Há 5 defeituosos e 15 bons e por cada pneu que vai sendo retirado altera-se a probabilidade de o próximo vir a ser defeituoso.

- O total de modos de seleccionar 4 pneus quaisquer do lote é  $\binom{20}{4}$
- Há  $\binom{5}{2}$  modos de seleccionar 2 defeituosos e, para cada um destes há  $\binom{15}{2}$  modos de escolher 2 bons.

**Portanto ...**

# A distribuição hipergeométrica

A probabilidade de, dos 4 pneus escolhidos ao acaso, 2 serem defeituosos (e portanto 2 bons) é:  $\frac{\binom{5}{2} \binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}$

Diz-se que temos uma **experiência hipergeométrica** se dada uma população de dimensão

$N$  com  $\begin{cases} K \text{ "sucessos"} \\ N - K \text{ "insucessos"} \end{cases} \rightarrow \underline{\text{extraímos, sem reposição}} \quad n$

## Definição

A v.a.  $X$  que conta o número de sucessos numa experiência hipergeométrica **é uma v.a. hipergeométrica** de parâmetros  $N$ ,  $n$  e  $K$  e costuma representar-se por  $X \sim \mathcal{H}(N, n, K)$

# A distribuição hipergeométrica

Qual a probabilidade de  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dos } K \\ \text{dos } N - K \end{array} \right.$  seleccionar  $x$   $n - x$  ?

Seja  $X \sim \mathcal{H}(N, n, K)$

$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n - N + K) \leq x \leq \min(n, K)$$

**Valor médio e variância** de  $X \sim \mathcal{H}(N, n, K)$

$$E[X] = n \frac{K}{N}; \quad \text{Var}[X] = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}.$$

# A distribuição hipergeométrica

**Observação:** Quando  $N \gg n$ , a probabilidade de sucesso em cada tiragem sem reposição varia muito pouco de prova para prova, então . . .  
→ pode considerar-se a distribuição binomial como uma aproximação da distribuição hipergeométrica com  $p = K/N$ , i.e.,

**Resultado:** Se  $N$  bastante maior que  $n$  tem-se

$$\mathcal{H}(N, n, K) \approx \mathcal{B}(n, p), \quad \text{com } p = K/N.$$

Como **regra prática**, pode considerar-se **boa a aproximação** para  $n < N/10$ .

# A distribuição de Poisson

Considere que pretende contar, por exemplo, o número de:

- chamadas telefónicas recebidas numa central telefónica num certo intervalo de tempo;
- chegadas de clientes a uma bilheteira durante um certo período;
- chegadas de sinistrados a um banco de um hospital durante um certo período;
- dias que uma dada escola fecha durante o inverno;
- erros de tipografia por página;

Se a contagem do número de “sucessos” que ocorrem num dado intervalo de tempo ou num domínio específico, satisfaz as seguintes condições:

# A distribuição de Poisson

- o número de “sucessos” que ocorrem num dado intervalo de tempo ou domínio é independente do número que ocorre em qualquer outro intervalo ou domínio disjunto do anterior;
- a probabilidade que o “sucesso” se verifique uma vez em qualquer intervalo muito curto ( ou região muito pequena ), de amplitude  $\delta$ , é proporcional a  $\delta$ , i.e, é igual a  $\lambda\delta$  e não depende do número de sucessos que ocorrem fora desse intervalo ou região;
- a probabilidade de que o “sucesso” se verifique mais do que uma vez num intervalo ou domínio de amplitude muito pequena é  $\approx 0$ .

diz-se que estamos perante **experiências de Poisson** ou **um processo de Poisson**

# A distribuição de Poisson

**Definição** A v.a  $X$  que conta o número de sucessos numa experiência de Poisson diz-se ter **distribuição de Poisson** e depende apenas do parâmetro  $\lambda \rightarrow$  número médio de sucessos que ocorrem no intervalo de tempo ( ou na região especificada).

Representa-se por  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  e a lei de probabilidade é:

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

**Nota:** Facilmente se verifica que  $P[X = x] \geq 0 \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$ , mas para mostrar que  $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = 1$ , são necessários conhecimentos sobre séries de funções que actualmente os alunos não possuem.

# A distribuição de Poisson

## Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad E[X] = \lambda \quad Var[X] = \lambda.$$

## Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a.  $X_i$   $i = 1, \dots, k$  são independentes e  $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$  então

$$\sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right).$$

Existem tabelas da Poisson para consulta  $\rightarrow$  função de distribuição cumulativa.

# A distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson surge ainda como o limite da distribuição binomial quando  $n \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0$ .

## Teorema

Quando  $n \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0$ , mantendo-se constante o produto  $np$  tem-se

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \quad \Rightarrow \quad X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{com } \lambda = np.$$

**Regra prática** Em geral, a distribuição de Poisson fornece uma **boa aproximação da distribuição binomial quando  $n \geq 20$  e  $p \leq 0.05$**

## Principais Distribuições Contínuas

- Distribuição uniforme contínua
- Distribuição de Gauss ou normal
- Distribuição exponencial

# A distribuição uniforme contínua

**Definição** Uma v.a. contínua diz-se ter **distribuição uniforme** ou **rectangular** no intervalo  $(a, b)$  e representa-se por  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$  se a função densidade de probabilidade (f.d.p.) é da forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & x \leq a \text{ ou } x \geq b. \end{cases}$$

## Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$E[X] = \frac{a+b}{2}; \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{e} \quad M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0$$

**Caso particular:** A distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$

**Exercício:** Escreva a função densidade, a função distribuição cumulativa, valor médio, variância e função geradora de momentos.

# A distribuição normal ou de Gauss

Surge século XVIII → ligada ao estudo dos erros de medições repetidas de uma mesma quantidade.

Papel fulcral nas Probabilidades e Estatística, porque:

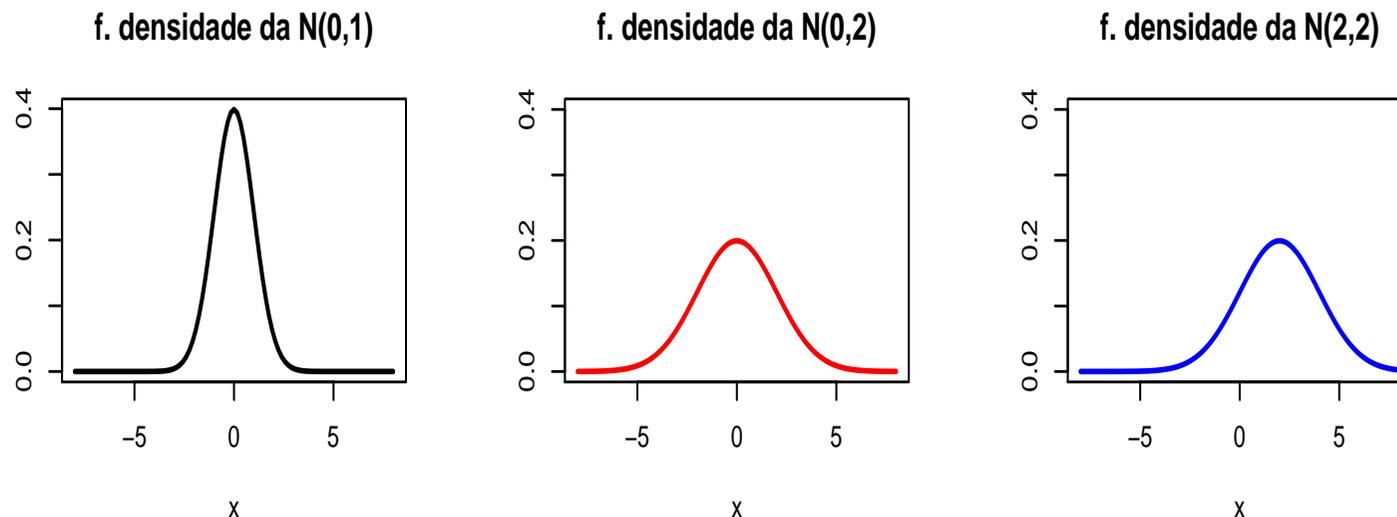
- muitas variáveis biométricas têm uma distribuição muito próxima da normal;
- por vezes uma variável que não é normal pode ser transformada de um modo simples numa outra com distribuição normal;
- a parte central de muitos modelos não normais é por vezes razoavelmente bem aproximada por uma distribuição normal.

# A distribuição normal ou de Gauss

**Definição** Uma v.a. contínua  $X$  diz-se ter **distribuição normal** ou **de Gauss** com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  e representa-se por  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  se a sua f.d.p. é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \sigma < +\infty$$



Gráficos da função densidade normal para alguns valores de  $\mu$  e  $\sigma$ .

# A distribuição normal ou de Gauss

## Propriedades da curva densidade da variável com distribuição normal

1. É simétrica relativamente a  $\mu$ .
2. É uma curva unimodal, a moda é  $\mu$ .
3. Tem pontos de inflexão em  $\mu + \sigma$  e  $\mu - \sigma$ .

## Valor médio, variância e função geradora de momentos

$$E[X] = \mu; \quad Var[X] = \sigma^2 \quad e \quad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

# A distribuição normal reduzida

**Definição** Se  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$  a variável aleatória com distribuição  $\mathcal{N}(0, 1)$  chama-se **normal reduzida**.

Vamos considerar as seguintes notações quando usamos a normal reduzida

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1); \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \text{e} \quad \Phi(z) = P[Z \leq z]$$

**Propriedade** Em consequência da simetria

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Tabelas  $\longrightarrow$  dão o valor da função de distribuição cumulativa da normal reduzida.

# A distribuição normal ou de Gauss

Alguns teoremas de grande importância no estudo da normal.

## Teorema

Seja  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  a v.a.  $Y = a + bX$  é também normal e tem-se  
 $Y \sim \mathcal{N}(a + b\mu, |b|\sigma)$ .

## Corolário - muito importante

Seja  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , então a v.a.  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  tem distribuição normal reduzida, i.e.,  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercício** Uma vacaria tem uma produção diária de leite que se admite seguir uma lei normal com  $\mu = 950 \text{ l}$  e  $\sigma = 50 \text{ l}$

- Qual a probabilidade de se ter uma produção inferior a 1000 litros?
- Qual a percentagem de dias em que a produção ultrapassa a produção média em mais de 100 litros?

# A distribuição normal ou de Gauss

**Teorema** Sejam  $X_1, \dots, X_n$ , v.a. normais independentes, tais que

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \quad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2), \quad \dots, \quad X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n).$$

A v.a.  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  tem distribuição normal de parâmetros  $(\mu, \sigma)$ , com

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

**Exercício** Ainda o exercício da vacaria . . .

- c) Se na região existe outra vacaria, com uma produção diária que se admite normal com  $\mu = 900 \text{ l}$  e  $\sigma = 40 \text{ l}$ , funcionando independentemente da primeira, qual a probabilidade de num dado dia a produção total das duas vacarias ser superior a 1800 litros?

# A distribuição normal ou de Gauss

## Generalização do teorema

Mostre que, sendo  $X_1, \dots, X_n$  v.a. nas condições do teorema,

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$  tem distribuição normal de parâmetros

$(\mu, \sigma)$ , com  $\mu = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n$  e

$$\sigma = \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2}.$$

## Corolário

Sejam  $X_i$   $n$  v.a. normais independentes e semelhantes, i.e., tendo todas o mesmo valor médio  $\mu$  e a mesma variância  $\sigma^2$ .

As variáveis aleatórias **soma** e **média**, definidas respectivamente como

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{e} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

têm distribuição normal assim definida

$$S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \quad \text{e} \quad \bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

# O Teorema Limite Central

Provamos que a soma de NORMAIS independentes é ainda uma normal.

**Mas temos mais ...**

a **distribuição aproximada da SOMA de  $n$  variáveis aleatórias com QUALQUER lei**, mas independentes, identicamente distribuídas e verificando certas condições é também **normal**.

## **Teorema limite central**

Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  (finita). A v.a.

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  verifica quando  $n$  é “grande”:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

# Aplicações do Teorema Limite Central

Note que também se tem, 
$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

## Teorema de De Moivre

Seja  $X$  uma v.a. com **distribuição binomial** com valor médio  $\mu = np$  e variância  $\sigma^2 = npq$ . Então quando  $n \rightarrow \infty$ ,

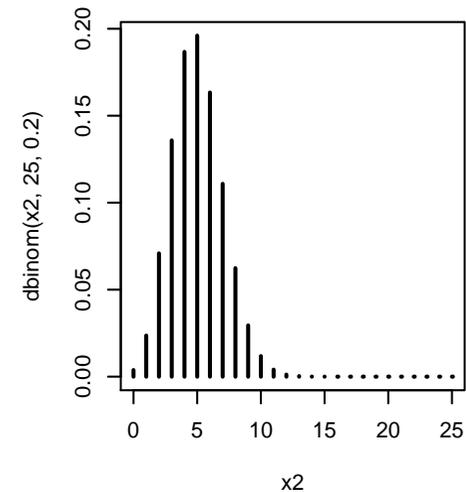
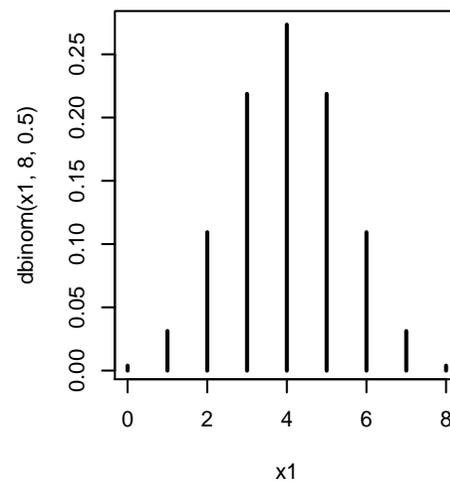
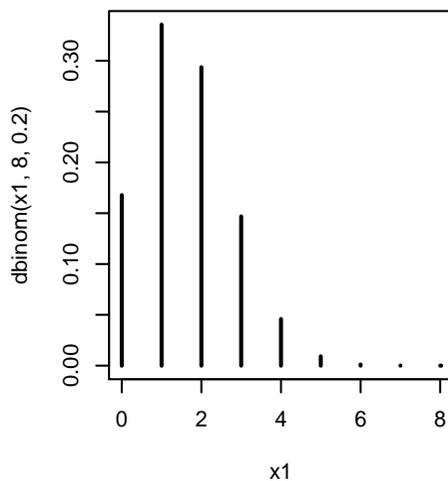
$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

**Recorde-se que** se, na distribuição binomial,  $n$  grande e  $p \approx 0$ (ou 1) uma boa aproximação é dada pela distribuição de Poisson.

**E agora** para valores de  $p \approx 1/2$  o teorema limite central oferece muito boa aproximação para a normal.

# Aplicações do Teorema Limite Central

**Exercício** Utilizando o R obtenha os seguintes gráficos da função massa de probabilidade de  $X \sim \mathcal{B}(8, 0.2)$ ,  $X \sim \mathcal{B}(8, 0.5)$  e  $X \sim \mathcal{B}(25, 0.2)$ .



O que observa?

**Regra prática** Se na **distribuição binomial**  $np > 5$  e  $nq > 5 \implies$   
a aproximação pela distribuição normal é boa.

# Aplicações do Teorema Limite Central

## Teorema

Seja  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ . Quando  $\lambda \rightarrow \infty$  então  $\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Regra prática:** A aproximação é considerada boa para  $\lambda \geq 20$ .

**Observação:** Quando considerámos a aproximação da distribuição binomial pela Poisson, ambas eram distribuições discretas.

Os dois teoremas acabados de enunciar dão-nos uma aproximação de uma v.a. discreta por uma v.a. contínua.

Neste caso é necessário fazer-se o que se designa por **correção de continuidade** que consiste em considerar todo o **inteiro**  $k$  representado pelo **intervalo**  $(k - 1/2, k + 1/2)$ .

# A distribuição exponencial

Uma variável aleatória diz-se ter **distribuição exponencial** de parâmetro  $\beta$  e representa-se por  $X \sim \text{Exp}(\beta)$  se a função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0, \beta > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

**Aplicações:** Duração de vida, teoria da fiabilidade, tempos de espera, etc.

**Valor médio, variância e função geradora de momentos**

$$M_X(t) = \frac{1}{1-\beta t}, \quad (t \leq 1/\beta); \quad E[X] = \beta; \quad \text{Var}[X] = \beta^2$$

# A distribuição exponencial: observações

## Relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson:

Considere-se contagens de sucessos em intervalos de tempo. O tempo ao fim do qual se verifica o primeiro sucesso é uma variável aleatória contínua.

**Teorema** Se  $X$ , número de sucessos num intervalo de tempo, é tal que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  então  $W$  a v.a. que designa o tempo de espera pelo primeiro sucesso (ou o tempo entre a ocorrência de dois sucessos consecutivos) satisfaz

$$W \sim \text{Exp}(\beta = 1/\lambda).$$

**Exercício:** Verifique que a distribuição exponencial goza da propriedade da **falta de memória**.