Introdução à Inferência Estatística

- A Probabilidade e a Inferência Estatística.
- A amostragem. Principais Distribuições por Amostragem
- Tópicos de Estimação e de Inferência
  - estimação pontual
  - estimação por intervalos
  - testes de hipóteses

A Probabilidade e a Inferência Estatística

Começámos esta unidade curricular pelo estudo descritivo de uma amostra. Passámos depois pela Introdução à Teoria da Probabilidade com o estudo de alguns dos modelos de probabilidade (discretos e contínuos).

Veremos agora como utilizar todo esse conhecimento na Inferência Estatística. A Inferência Estatística é *... aquilo que permite o salto que vai da amostra para a população* (Pestana e Velosa, 2008).

Mas ... sem conhecimento da probabilidade não é possível avançar na inferência estatística. Apenas para breve "orientação" podemos dizer que:

- na probabilidade temos o modelo da população que nos permite calcular a probabilidade de certos acontecimentos;
- na inferência estatística parte-se da amostra e pretende-se obter informação sobre o modelo ou sobre características da população.

Conceitos em Inferência Estatística

A inferência estatística tem como objectivos tirar conclusões sobre os parâmetros da população a partir da recolha, tratamento e análise dos dados de uma amostra, obtida nessa população.

Conceitos básicos:

População $\rightarrow$ conjunto completo de todas os objectos (elementos) com uma (ou mais) característica(s) comuns;

Unidade Estatística $\rightarrow$ cada elemento da população;

Amostra $\rightarrow$ conjunto dos valores efectivamente observados;

Parâmetro de uma população $\rightarrow$ **constante** desconhecida, cujo verdadeiro valor se pretende “estimar” ou “validar”.

Introdução à Teoria da Amostragem

Amostragem $\rightarrow$ procedimento de recolha de elementos da população para obter uma amostra.

De uma dada **população** podemos retirar muitas amostras:

- Amostra 1
- Amostra 2
- ...
- Amostra k
- ...

Mas $\cdots$ quase sempre recolhemos só uma amostra para estudarmos uma característica $\boldsymbol{X}$ da população.

Seja $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_n}$ uma amostra de n observações da característica, obtidas após um processo de amostragem.

Introdução à Teoria da Amostragem

Vamos considerar a amostra $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots x_n}$ como uma realização de $\boldsymbol{n}$ variáveis $\boldsymbol{X_1, X_2, \cdots X_n}$ que são "cópias" da variável $\boldsymbol{X}$

Recapitulando:

- Antes da amostragem ser realizada temos n variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$
- Depois de efectuada a amostragem temos um conjunto de dados que constituem a amostra observada $\boldsymbol{x_1, ..., x_n}$.

Definição Chama-se **amostra aleatória** de dimensão n a um conjunto de $\boldsymbol{n}$ variáveis aleatórias $\boldsymbol{X_1, X_2, ..., X_n}$ independentes e semelhantes, i.e., tendo todas a mesma distribuição a da característica $\boldsymbol{X}$ em estudo na população.

Tópicos de Estimação

Quais os parâmetros desconhecidos da população que nos vão interessar e que procedimentos usar para os estimar?

Os procedimentos são métodos adequados (queremos “os melhores” ...) para estimar os parâmetros desconhecidos. Em Estatística, esses métodos consistem na obtenção de variáveis aleatórias “especiais”, chamadas **estimadores**.

Definição Chama-se **estimador de um parâmetro** a uma função da amostra aleatória $X_1, X_2, ..., X_n$, que “permite” obter um valor para o parâmetro desconhecido (esta função não possui quantidades desconhecidas).

NOTA: Não iremos referir procedimentos para obter estimadores

Tópicos de Estimação

Um **estimador** é então uma variável aleatória que terá uma dada distribuição (pelo menos aproximadamente).

O valor que o estimador (variável aleatória) toma quando se observa a amostra chama-se **estimativa**.

Definição **Estimativa de um parâmetro** é um valor concreto assumido pelo estimador.

Dada a amostra aleatória, $X_1, X_2, ..., X_n$, i.e., v.a. i.i.d. a X, vamos ver os parâmetros que nos vão interessar, os seus estimadores e estimativas

Tópicos de Estimação

Parâmetro(s) a estimar	Estimador(es)	Estimativa(s)
μ	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
p	$\widehat{P} = \frac{X}{n}^{(a)}$	$\hat{p} = \frac{x}{n}^{(b)}$
μ_1 ?? μ_2	$\overline{X_1}$?? $\overline{X_2}$	$\overline{x_1}$?? $\overline{x_2}$
σ_1^2 ?? σ_2^2	S_1^2 ?? S_2^2	s_1^2 ?? s_2^2
p_1 ?? p_2	$\widehat{P_1}$?? $\widehat{P_2}$	$\hat{p_1}$?? $\hat{p_2}$

$^{(a)}X$ - v.a. que conta o número de sucessos na amostra de dimensão n ... e
$^{(b)}x$ - número observado de sucessos na amostra de dimensão n.

?? significa que teremos que escolher a melhor operação para fazer a comparação

Tópicos de Estimação

Temos uma amostra — como inferir para a população?

- Estimação dos parâmetros
  - Estimação pontual
  - Estimação intervalar $\longrightarrow$ intervalos de confiança
- Testes de hipóteses estatísticas.

Estimação pontual $\rightarrow$ indicar um único valor como estimativa $\rightarrow$ exemplos de estimativas: $\boldsymbol{\overline{x}, \;\; s^2, \;\; \hat{p}, \;\; \cdots}$.

Estimação por intervalos $\rightarrow$ neste caso calcula-se um intervalo (aleatório) que com uma probabilidade elevada contenha o verdadeiro valor do parâmetro. Para a construção deste intervalo é necessário conhecer a distribuição - exacta ou aproximada - do **estimador** (ou qualquer expressão dele)

Estimação por intervalos

Definição Chama-se **intervalo de confiança** ao intervalo que resulta da concretização do intervalo (aleatório) e é portanto um intervalo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, onde a e b são números reais e $a < b$.

Relembre-se que para obter o intervalo de confiança é então necessário conhecer **a lei do estimador** do parâmetro desconhecido.

Comecemos então por ver como se construiria **um intervalo de confiança para $\boldsymbol{\mu}$,** (valor médio de uma característica X.)

Precisamos de procurar a distribuição do estimador de $\mu \longrightarrow \overline{\boldsymbol{X}}$

- Seja X v.a. c/ dist. Normal , i.e., $X \frown N(\mu, \sigma)$
  Para uma amostra de dimensão n tem-se $\overline{X}_n \frown N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

Então . . .

Intervalo de confiança

Intervalo de confiança a $(1-\alpha) \times 100\%$ para μ

- Seja X v.a. c/ dist. Normal , i.e., $X \frown N(\mu, \sigma)$

  Se σ conhecido $\rightarrow$ considera-se $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \frown N(0,1)$

  o intervalo a $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança para μ é

$$\boxed{\overline{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

($z_{\alpha/2} \rightarrow$ valor da v.a. Z tal que $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$)

Observações: Chama-se **precisão da estimativa** à semi-amplitude do intervalo de confiança e **confiança** ou **grau de confiança** a $(1-\alpha) \times 100\%$

Quanto maior for o intervalo, maior é o grau de confiança, mas menor a precisão da estimativa.

Exercício 1

Um método utilizado na determinação do pH de uma dada solução fornece medições que se admite terem distribuição normal de valor médio igual ao verdadeiro valor do pH da solução e desvio padrão de 0.02. Para avaliar o pH de uma solução, efectuaram-se 10 medições independentes tendo-se obtido os seguintes valores:

8.18 8.16 8.17 8.22 8.19 8.17 8.15 8.21 8.16 8.18

a) Indique uma estimativa do valor médio do pH da solução.
b) Com base nestas 10 medições, determine um intervalo a 95% de confiança para o valor médio do pH da solução.
c) Para um certo processo quimico é muito importante que uma dada solução tenha um pH de exactamente 8.20. Com base no resultado da alínea anterior, o que pode concluir relativamente à utilização desta solução no referido processo químico?

Distribuições por amostragem

A determinação de intervalos de confiança para os parâmetros μ, σ^2, p, $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2/σ_2^2 e $p_1 - p_2$, necessita do conhecimento da distribuição dos estimadores envolvidos $\longleftrightarrow$ **distribuições por amostragem**

$\Downarrow$

isto é, são distribuições de funções da amostra aleatória $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, que vamos usar para obter **Intervalos de Confiança**

Já vimos

Se $X \frown N(\mu, \sigma)$ e σ conhecido usamos $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \frown N(0,1)$ para construir um I.C. para o valor médio, μ.

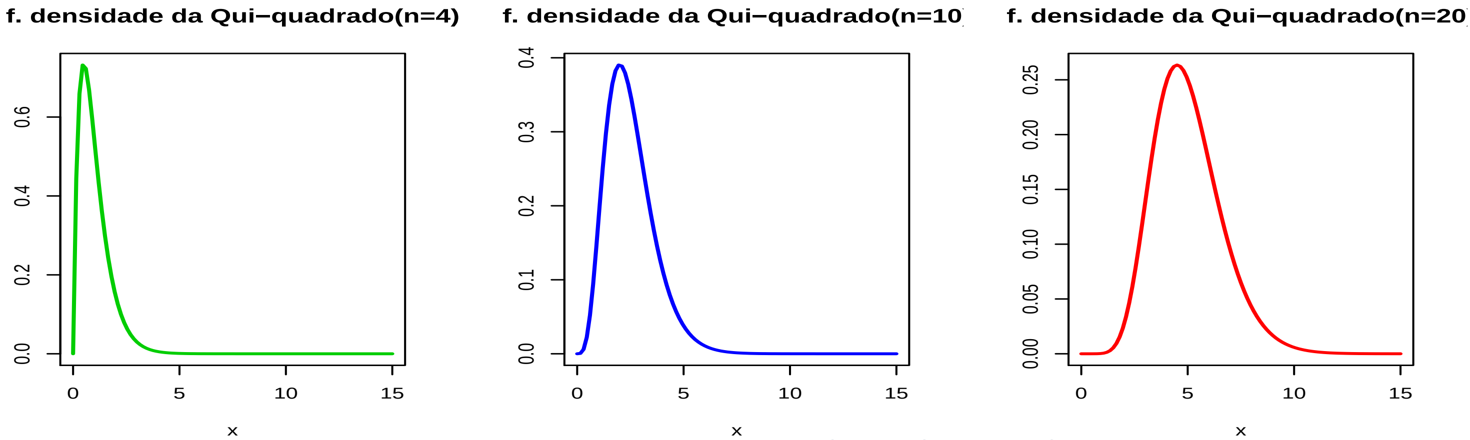
Mas na maior parte das situações não conhecemos a variância.

Então neste caso já não é possível obter um I.C. para μ, pois os limites do intervalo dependem de σ, desconhecido.

Resultados (distribuições) importantes

Teorema Sejam $X_i \ (i = 1, \ldots, n)$ v.a. independentes com distribuição $N(\mu, \sigma)$. Então:

- $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \frown \chi^2_{(1)}$, que se designa distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.
- $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \frown \chi^2_{(n)}$.

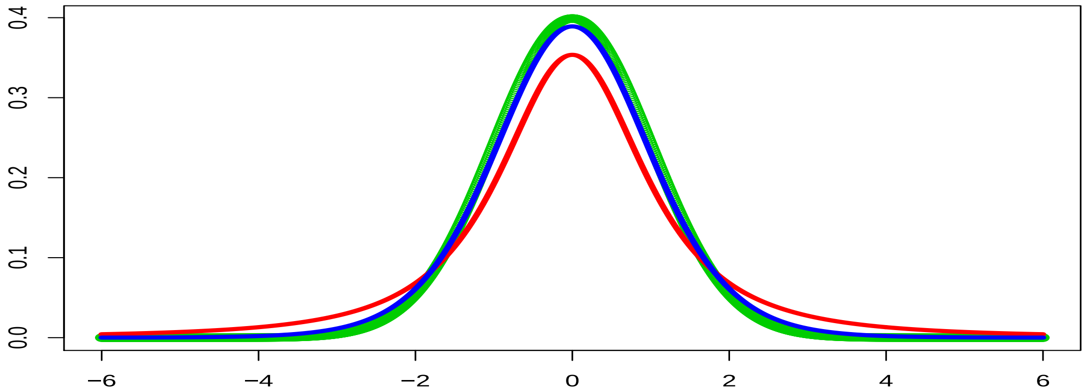


Gráficos da função densidade de uma v.a. com distribuição $\chi^2_{(4)}$, $\chi^2_{(10)}$ e $\chi^2_{(20)}$, da esquerda para a direita.

Resultados importantes (cont.)

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \frown \chi^2_{(n-1)}$, com $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$
- Sejam $Z \frown N(0,1)$ e $Y \frown \chi^2_{(n)}$ v.a. independentes, então $\frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \frown t_{(n)}$, $t_{(n)}$ diz-se distribuição $t - Student$ com n g.l.

  Para mais informações ver quadro das distribuições contínuas.
- $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \frown t_{(n-1)}$, com $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$



Gráficos da função densidade de uma v.a. com distribuição $N(0,1)$, $t_{(2)}$ e $t_{(10)}$.

Intervalos de confiança (cont.)

O Intervalo a $(1-\alpha)\times 100\%$ de confiança para $\boldsymbol{\sigma^2}$ numa população normal, constrói-se usando a v.a. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \frown \chi^2_{(n-1)}$

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}}}$$

O Intervalo a $(1-\alpha)\times 100\%$ de confiança para $\boldsymbol{\mu}$ com σ desconhecido, numa população normal, constrói-se usando a v.a. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \frown t_{(n-1)}$

$$\boxed{\overline{x} - t_{\alpha/2,(n-1)}\,\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2,(n-1)}\,\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Intervalos de confiança (cont.)

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para $\boldsymbol{\mu}$

Se X tem dist. qualquer não normal

É necessário dispor de uma amostra de dimensão elevada, i.e., $\boldsymbol{n}$ grande
$\longrightarrow$ aplicação do Teorema Limite Central

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{se } \underline{\sigma \text{ conhecido}}$$

Ou, que é o caso mais frequente,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{se } \underline{\sigma \text{ desconhecido}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}}}$$

Intervalo de confiança para proporções

Dada X com distribuição binomial de parâmetros (n, p)
(p parâmetro desconhecido).

Um **estimador** de p é $\hat{P} = \frac{X}{n}$ (X é o número de sucessos em n provas)
Sendo a **estimativa** $\hat{p} = \frac{x}{n}$ (x é o número observado de sucessos em n provas)

Se $\boldsymbol{X \frown B(n, p)}$ e n grande
$\boldsymbol{X \sim \mathcal{N}(np, \sqrt{npq})}$

Intervalo de confiança $(1-\alpha) \times 100\%$ para $\boldsymbol{p}$

$$\boxed{\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

Intervalos de confiança para $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$ (amostras independentes)

Caso de duas populações normais i.e.,
$X_1 \frown \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \frown \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ com variâncias conhecidas

Retiram-se duas amostras aleatórias independentes com dimensões n_1 e n_2, respectivamente.

Um estimador para $\mu_1 - \mu_2$ é $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ e

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \frown \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

Intervalo de confiança a $(1-\alpha) \times 100\%$ para $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$

$$\boxed{\left(\overline{x_1} - \overline{x_2}\right) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\overline{x_1} - \overline{x_2}\right) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Intervalos de confiança - duas populações

Caso de populações normais i.e., $X_1 \frown \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \frown \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ com variâncias desconhecidas.

Amostras independentes:

- Se n_1, n_2 grandes (e neste caso não é necessário ter-se normalidade) pode substituir-se no intervalo anterior σ_1^2 por s_1^2 e σ_2^2 por s_2^2.
- Se n_1 e n_2 são pequenos, podemos contruir intervalos de confiança sob certas hipóteses
  - ambas as distribuições normais;
  - se for possível admitir variâncias populacionais iguais.

Então ...

Intervalos de confiança - duas populações

A variável aleatória agora usada é

$$\frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \frown t_{(n_1+n_2-2)}$$

com $\quad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ para duas populações normais, com variâncias desconhecidas mas supostas iguais

$$\boxed{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - t_{\alpha/2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x_1} - \overline{x_2}) + t_{\alpha/2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$(t_{\alpha/2} \equiv t_{\alpha/2,(n_1+n_2-2)})$

O que pode fazer-se para averiguar a igualdade das variâncias populacionais?

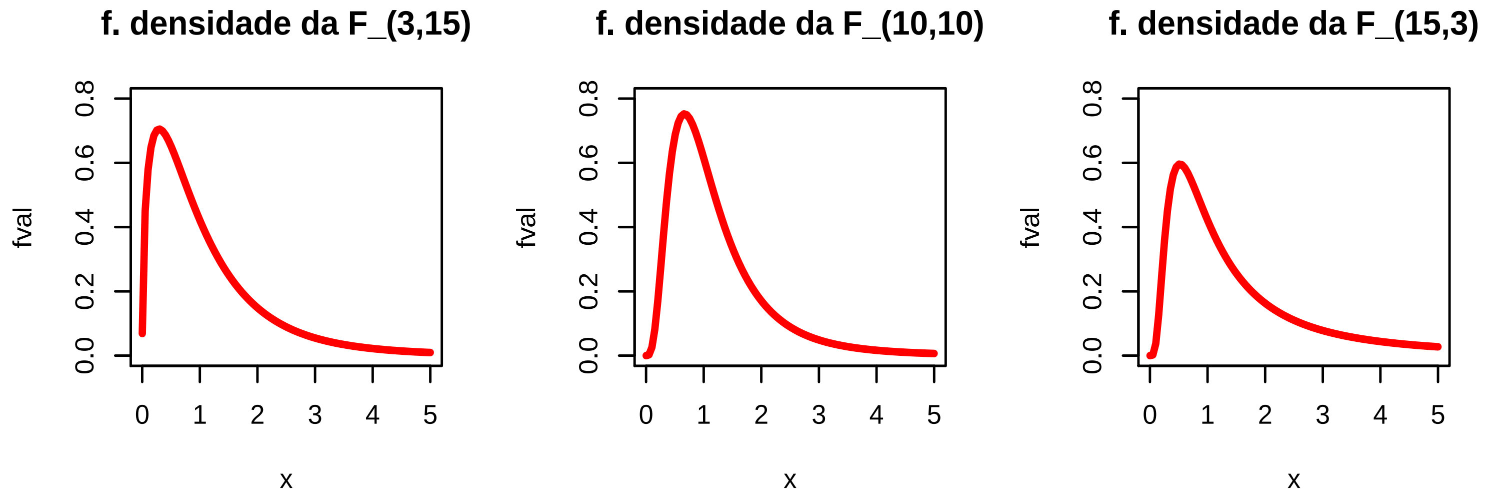
Sejam duas populações normais $X_1 \frown \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \frown \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ das quais retiramos duas amostras independentes de dimensões n_1 e n_2, respectivamente.

O estimador para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ e para construir o intervalo de confiança a variável aleatória agora considerar é $\boldsymbol{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}}$. Surge aqui uma nova distribuição associada a esta variável aleatória, que se chama distribuição $\boldsymbol{F}$ (de Snedecor).

Vejamos a génese (a definição) desta distribuição:

Distribuição F

Teorema Sejam $U \frown \chi^2_{(m)}$ e $V \frown \chi^2_{(n)}$ variáveis aleatórias independentes, então $\boldsymbol{X = \frac{U/m}{V/n}}$ diz-se ter distribuição $\boldsymbol{F}$ com $\boldsymbol{(m, n)}$ graus de liberdade e representa-se por $\boldsymbol{X = \frac{U/m}{V/n}} \frown F_{(m,n)}$.



Gráficos da função densidade de uma v.a. com distribuição $F_{(3,15)}$, $F_{(10,10)}$ e $F_{(15,3)}$, da esquerda para a direita.

Prova-se que $\boldsymbol{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}}$ tem distribuição F com $\boldsymbol{(n_1 - 1, n_2 - 1)}$ graus de liberdade.

I.C. para o quociente de duas variâncias

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ **para** $\boldsymbol{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

$$\boxed{\frac{s_1^2}{s_2^2\ f_{\alpha/2;(n_1-1,n_2-1)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2\ f_{\alpha/2;(n_2-1,n_1-1)}}{s_2^2}}$$

Nota: No caso de o intervalo de confiança para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, conduzir à conclusão que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, Welch-Satterthwaite propõem o uso da variável aleatória

$$\frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \approx t_{(\nu)},$$

sendo ν calculado à custa das variâncias de cada uma da amostra — não mostraremos aqui a sua expressão. O uso deste estimador está já implementado no R - ver a sua utilização nas aulas práticas.

Intervalos de confiança (amostras emparelhadas)

Consideremos que numa dada experiência as observações estão relacionadas, i.e, emparelhadas pelo indivíduo.

Seja (X_i, Y_i) $(i = 1, ..., n)$ a amostra emparelhada e defina-se $D_i = X_i - Y_i$, isto é, $(D_1, D_2, ..., D_n)$ é a amostra aleatória das diferenças.

Se $\boldsymbol{D_1, D_2, ..., D_n}$ são variáveis aleatórias provenientes de uma lei normal com valor médio $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ e variância σ_D^2, desconhecida tem-se

$$\frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \frown t_{(n-1)}$$

Intervalos de confiança (cont.)

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ **para** μ_D

$$\boxed{\overline{d} - t_{\alpha/2,(n-1)}\frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \overline{d} + t_{\alpha/2,(n-1)}\frac{s_D}{\sqrt{n}}}$$

Se não for possível admitir D_i normais, mas se tenha **n "grande" o intervalo de confiança** $(1-\alpha)\times 100\%$ **para** μ_D **é**

$$\boxed{\overline{d} - z_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \overline{d} + z_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}}$$

Consideremos agora o caso de duas proporções

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias tais que

$$X_1 \frown B(n_1, p_1) \qquad \text{e} \qquad X_2 \frown B(n_2, p_2).$$

n_1 e n_2 dimensões de amostras aleatórias independentes
Os estimadores de p_1 e p_2 são $\hat{P}_1 = X_1/n_1 \quad \text{e} \quad \hat{P}_2 = X_2/n_2$

Se n_1 e n_2 "grandes" temos

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim \mathcal{N}\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1\ q_1}{n_1} + \frac{p_2\ q_2}{n_2}}\right)$$

Intervalo de confiança a $(1-\alpha) \times 100\%$ **para** $\boldsymbol{p_1 - p_2}$ quando as dimensões das amostras são elevadas

$$\boxed{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p_1}\ \hat{q_1}}{n_1} + \frac{\hat{p_2}\ \hat{q_2}}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p_1}\ \hat{q_1}}{n_1} + \frac{\hat{p_2}\ \hat{q_2}}{n_2}}}$$

Exercício 2

Um estudo pretende comparar um tipo de semente melhorada com o tipo de semente tradicional usado anteriormente. A semente melhorada passará a ser utilizada se, em média, o crescimento das plantas após 20 dias fôr superior ao verificado nas sementes tradicionais. São criadas 15 diferentes situações laboratoriais, variando temperatura e humidade. Em cada situação semeia-se uma semente de cada tipo e obtêm-se os seguintes resultados para o crescimento (em cms) das plantas após 20 dias:

Situação	1	2	3	4	5	6	7	8
sementes melhoradas	3.46	3.48	2.74	2.83	4.00	4.95	2.24	6.92
sementes tradicionais	3.18	3.67	2.92	3.10	4.10	4.86	2.21	6.91

Situação	9	10	11	12	13	14	15
sementes melhoradas	6.57	6.18	8.30	3.44	4.47	7.59	3.87
sementes tradicionais	6.83	6.19	8.05	3.46	4.18	7.43	3.85

Poderá considerar-se haver diferença significativa entre os dois tipos de sementes? Responda justificando e explicitando quaisquer hipóteses adicionais que seja necessário impôr.

Exercício 3

Pretende-se avaliar se um certo adubo A aumenta a produção de determinada cultivar do cereal T. Para tal efeito um experimentador plantou 2 talhões com a referida cultivar, tendo aplicado o adubo A só num deles. De cada talhão foram então amostradas 12 áreas de 1m^2. Em cada uma destas áreas foram colhidas todas as plantas e pesado o grão. Os dados obtidos, expressos em gramas foram os seguintes:

Talhão c/ adubo	422	460	455	466	475	472	465	456	452	430	458	470
Talhão s/ adubo	470	437	429	447	432	457	422	425	432	474	452	442

O que decidiria quanto à utilização do adubo?

Introdução aos Testes de Hipóteses

- Hipóteses estatísticas. Hipótese nula/Hipótese alternativa.
- Passos necessários à elaboração de um teste de hipóteses.
- Testes sobre parâmetros de uma ou de duas populações.
- Teste de normalidade e “teste do qui-quadrado” de ajustamento.

Testes de Hipóteses

Até aqui estivemos a tratar de Intervalos de Confiança, isto é, a construir intervalos de valores que, com uma confiança elevada, contêm o verdadeiro valor do parâmetro desconhecido.

Mas ... vamos agora ver uma outra forma de decidir se uma dada suposição (relativa ao(s) parâmetro(s) desconhecido(s) ou outros aspectos da característica em estudo) é ou não suportada pela informação fornecida pelos dados de uma amostra.
Vamos então **formular Testes de Hipóteses** e indicar como, com base numa amostra observada, se pode tomar decisões relativamente às hipóteses formuladas.

Note-se que os quadros com Intervalos de confiança e os quadros dos Testes de Hipóteses seguem a mesma estrutura, portanto as variáveis usadas na construção dos intervalos de confiança são as que iremos também aqui usar.

Testes de Hipóteses

Uma hipótese estatística é qualquer conjectura sobre aspectos desconhecidos da população (que podem ser parâmetros ou mesmo a forma da distribuição).

Se a hipótese diz respeito a:

- um parâmetro, supondo conhecida a forma da distribuição, a hipótese diz-se paramétrica.
- investigar a forma da distribuição, ou um parâmetro sem admitir o conhecimento da forma da distribuição, a hipótese diz-se não paramétrica.

Um teste de hipóteses é então um procedimento que permite decidir se uma dada hipótese é ou não suportada pela informação fornecida pelos dados de uma amostra.

Testes de Hipóteses

Um teste diz-se **parametrico** se as hipóteses envolvidas são paramétricas, isto é, dizem respeito ao(s) parâmetros(s), supondo conhecida, pelo menos aproximadamente, a forma da distribuição.

Metodologia a seguir num teste de hipóteses:

- Como uma dada afirmação pode ser verdadeira ou falsa, formulam-se duas hipóteses alternativas:
  Hipótese nula - $\mathbf{H_0}$ - corresponde ao *statu quo*, i.e., é a hipótese que especifica o valor "actual" do(s) parâmetro(s) (é considerada verdadeira até haver evidência estatística para a sua rejeição) e

  Hipótese alternativa - $\mathbf{H_1}$ - onde se especificam o(s) valor(es) a "aceitar" quando se rejeita a hipóteses nula.

Testes de Hipóteses- Exemplos

1. $\mathbf{H}_0 : \mu = 1$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu \neq 1$
2. $\mathbf{H}_0 : \mu = 3$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu < 3$
3. $\mathbf{H}_0 : \mu = 1$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu > 1$
4. $\mathbf{H}_0 : \mu \geq \mu_0$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu < \mu_0$
5. $\mathbf{H}_0 : X \frown$ Normal *v.s.* $\mathbf{H}_1 : X$ segue outra distribuição

O último exemplo é um teste para verificar se uma dada característica segue uma distribuição (neste caso a normal).
Designa-se habitualmente por teste de normalidade.

Exemplo 1

Numa linha de engarrafamento de azeite a quantidade deitada em cada garrafa é uma variável aleatória que se admite ter distribuição normal. O processo de enchimento considera-se regulado se $\mu = 1\ litro$, não sendo de admitir grandes desvios. Para controlar o processo de enchimento escolheram-se ao acaso 20 garrafas da produção diária. Suponha que se obteve uma média de 0.965 litros com um desvio padrão de $0.08\ litros$. Poder-se-á dizer que o processo não está regulado? Justifique convenientemente a resposta.

Resolução: Para averiguar se o processo não está regulado, podemos formular um teste das hipóteses:

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 1 \qquad \textit{v.s.} \qquad \mathbf{H}_1 : \mu \neq 1$$

Testes de Hipóteses

- A resposta num teste de hipóteses é dada na forma
  - **Rejeitar H_0** - significa que os dados observados testemunham fortemente contra **H_0** - neste caso será adoptada a hipótese **H_1** ou
  - **Não rejeitar H_0** - significa que não há evidência suficiente para rejeitar **H_0**.

Tomar decisões para a população com base numa amostra possui riscos (i.e. podem cometer-se erros). Vejamos o quadro:

	Decisões	
Realidade	**Rejeitar H_0**	**Não rejeitar H_0**
H_0 verdadeira	ERRO de tipo I	não há erro
H_0 falsa	não há erro	ERRO de tipo II

Testes de Hipóteses Paramétricos

P(erro de tipo I ou 1^a espécie)=**P(Rejeitar $H_0 |$ H_0 verdadeira)**= α

α - nível de significância

P(erro de tipo II ou 2^a espécie)=**P(Não rejeitar $H_0 |$ H_0 falsa)** =β

Costuma atribuir-se um valor muito baixo à probabilidade do erro de 1^a espécie , i.e, habitualmente considera-se

α =P(**Rejeitar $H_0 |$ H_0 verdadeira)** = 0.05 ou 0.01

Rejeitar H_0 significa que os dados testemunham fortemente contra H_0

Testes de Hipóteses

Passos a seguir na construção de um **teste estatístico**:

1. Identificar o(s) parâmetro(s); especificar $\mathbf{H}_0$ **e** $\mathbf{H}_1$ e o nível de significância α.
2. Escolher uma variável aleatória – estatística de teste, que sob $\mathbf{H}_0$ terá distribuição conhecida (pelo menos aproximadamente).
3. Definir a **região de rejeição** ou **região crítica** – **RC** (conjunto de valores da estatística que são menos "plausíveis" caso $\mathbf{H}_0$ seja verdadeira, portanto levam a rejeitar $\mathbf{H}_0$).
4. Calcular **o valor** da estatística de teste, para a amostra observada.
5. **Se o valor calculado** $\in$ **RC** $\longrightarrow$ **rejeita-se** $\mathbf{H}_0$
   Se o valor calculado $\notin$ **RC** $\longrightarrow$ **não se rejeita** $\mathbf{H}_0$

Testes de Hipóteses

Iremos considerar testes para os parâmetros: valor médio, variância, diferença de valores médios no caso de amostras independentes e emparelhadas, quociente de variâncias e proporções.

Para todos estes testes os passos indicados no slide anterior encontram-se explicitados no quadro "Testes a Médias, Variâncias e Proporções".

Exemplo: de formulação de hipóteses para o valor médio:

$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ **teste bilateral**

$\mathbf{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu > \mu_0$ **teste unilateral (à direita)**

$\mathbf{H}_0 : \mu \geq \mu_0$ *v.s.* $\mathbf{H}_1 : \mu < \mu_0$ **teste unilateral (à esquerda)**

Regras de decisão em Testes de Hipóteses

A indicação do valor observado da estatística de teste, por exemplo Z_{cal}, e a indicação de um valor crítico z_α para decidir, por exemplo,

Rejeitar **H**$_0$ se $Z_{cal} > z_\alpha$ (num teste unilateral à direita)

tem sido recentemente “substituído” pelo cálculo de

– **a probabilidade de se observar um valor igual ou mais extremo do que o observado, se a hipótese nula é verdadeira** – a que se chama **valor de prova; valor-*p* (*p-value*)**

Nota: é esta quantidade que hoje em dia qualquer *software* está preparado para calcular quando se manda realizar um teste.

Regras de decisão em Testes de Hipóteses

Podemos interpretar o **valor de prova** ou **valor-*p*** ou ***p-value*** como a

medida do grau de concordância entre os dados e H_0

Assim:

- **Quanto menor for o *p-value*, menor é a consistência entre os dados e a hipótese nula**

Habitualmente adopta-se como regra de decisão:

rejeitar H_0 se ***p-value*** $\leq \alpha$

Testes de Hipóteses ... outros

Nesta breve introdução à Teoria dos Testes de Hipóteses vimos como formular testes a parâmetros desconhecidos da população, em particular:

- ao valor médio, variância e a uma proporção;
- diferença de dois valores médios em amostras independentes e em amostras emparelhadas;
- quociente de variâncias e diferença de duas proporções.

Mas ... outros testes de hipóteses podem ser necessários nas mais variadas situações.
Note-se, todavia, que os passos a seguir serão sempre os indicados no slide 168.

Testes de Hipóteses ... outros

Como ilustração podemos referir três testes:

- **Teste de normalidade de Shapiro-WilK**;
- **Teste do Qui-quadrado de ajustamento**;
- **Teste à igualdade de três ou mais valores médios em amostras independentes (este é o procedimento estatístico conhecido como Análise de Variância que na sua ideia mais básica corresponde à generalização do problema da comparação de duas médias populacionais.)** Não será tratado neste curso.

Um teste de Normalidade

Consideremos agora o caso de se pretender
testar a forma da distribuição.
Os testes a considerar agora são testes não paramétricos que se designam por testes de ajustamento.

Comecemos com um teste muito importante nas nossas aplicações - **um teste de ajustamento à distribuição normal** - para averiguar se um dado conjunto de observações se pode considerar proveniente de uma população com distribuição normal – é um **teste de normalidade**,

O Teste de Shapiro Wilk

que se tem revelado ser um dos mais potentes. Vejamos em síntese como se processa.

O teste de Shapiro-Wilk

Seja **X** a característica em estudo na população.

Formulam-se as hipóteses:
H$_0$ **:** X tem distribuição Normal
H$_{1:}$ X não tem distribuição Normal

Calcula-se o valor da estatística de teste $$W_{cal} = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

com b constante a determinar a partir dos dados e com recurso a uma tabela (que não será aqui dada).

O teste de Shapiro-Wilk

Valores pequenos de W_{cal} indicam não normalidade, i.e.

$$\textbf{RC:} \quad W_{cal} < W_\alpha$$

Com W_α $-$ **valor crítico** a consultar numa Tabela.

Alternativamente pode usar-se o valor-$\boldsymbol{p}$,

- Rejeita-se H$_0$ se valor$-\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{\alpha}$, significando que não se pode admitir que X tem distribuição normal;
- Se valor$-\boldsymbol{p} > \boldsymbol{\alpha}$ não se rejeita **H**$_0$, o que significa que a distribuição normal é uma distribuição possível para X.

Exercício 2 (reescrito)

Um estudo pretende comparar um tipo de semente melhorada com o tipo de semente tradicional. A semente melhorada passará a ser utilizada se, em média, o crescimento das plantas após 20 dias fôr superior ao das obtidas das sementes tradicionais. São criadas 15 diferentes situações laboratoriais, variando temperatura e humidade. Em cada situação semeia-se uma semente de cada tipo e obtêm-se os seguintes resultados para o crescimento (em cm) das plantas após 20 dias :

Situação	1	2	3	4	5	6	7	8
Semente melhorada	3.46	3.48	2.74	2.83	4.00	4.95	2.24	6.92
Semente tradicional	3.18	3.67	2.92	3.10	4.10	4.86	2.21	6.91

Situação	9	10	11	12	13	14	15
Semente melhorada	6.57	6.18	8.30	3.44	4.47	7.59	3.87
Semente tradicional	6.83	6.19	8.05	3.46	4.18	7.43	3.85

Deverá passar a usar-se as sementes melhoradas? Responda justificando e explicitando quaisquer hipóteses adicionais que seja necessário impor.

Resolução - Exercício 2

Trata-se de um problema de amostras emparelhadas e como se pretende averiguar se as sementes melhoradas apresentam melhor desempenho, o teste a realizar é o teste unilateral

$$H_0 : \mu_D = 0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_D > 0$$

$\boldsymbol{D}$ designa a diferença entre o comprimento das plantas das sementes melhoradas e das tradicionais.

O comando do R para realizar este teste (e da execução do qual se obtém tb o intervalo de confiança unilateral, que não fez parte do programa) é o seguinte:

```
> t.test(nsem,vsem,alternative='greater'),
paired=TRUE)
```

Resolução - Exercício 2 (cont.)

Mas ... para utilizar aquele teste é necessário verificar previamente se pode admitir-se que a diferença entre alturas das plantas provenientes das sementes melhoradas e das tradicionais segue uma distribuição normal.

Comecemos pelo teste de normalidade de Shapiro-Wilk para analisar a hipótese de normalidade:

```
> shapiro.test(nsem-vsem)
Shapiro-Wilk normality test
data:  nsem-vsem
W = 0.9428, p-value = 0.4184
```

Conclusão: Dado que o *p-value* é 0.4184, conclui-se que **não se rejeita a hipótese da normalidade**, pelo que pode realizar-se o teste t.

Resolução - Exercício 2 (cont.)

```
> t.test(nsem,vsem,alternative='greater',
paired=TRUE)
```

Paired t-test
data: nsem and vsem
t = 0.1396, df = 14, p-value = 0.4455
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
-0.07744645 Inf
sample estimates: mean of the differences
0.006666667

Como o *p-value*= 0.4455 é superior a 0.05, não se rejeita H_0.

Conclusão: Não se pode afirmar que μ_D seja superior a 0, portanto não se pode aconselhar o uso das sementes melhoradas face às tradicionais.

Teste de ajustamento do qui-quadrado

Falámos já num teste de ajustamento - o teste Shapiro - Wilk - **teste de normalidade**.

Mas, ... a necessidade de considerar o ajustamento a outras distribuições (contínuas ou discretas) pode surgir nas mais variadas aplicações.

O “teste do qui-quadrado” foi desenvolvido por Pearson (1900) como teste de ajustamento para dados nominais ou dados classificados em classes, i.e., é um teste que usa a contagem do número de valores que se observam em classes ou categorias.

Vamos introduzir o **teste do qui-quadrado** com um Exemplo, relembrando as etapas necessárias à realização de um teste de hipóteses - slide 168.

Teste de ajustamento do qui-quadrado

Exemplo

A descendência originada pelo cruzamento de dois dados tipos de plantas pode ser qualquer um dos três genótipos que representaremos por c, cC e C. Um modelo teórico de sucessão genética indica que os tipos c, cC e C devem aparecer na razão $1 : 2 : 1$. Efectuou-se o cruzamento daqueles dois tipos tendo-se classificado 90 plantas. A sua classificação genética foi registada na tabela:

Genótipos	c	cC	C
	18	44	28

Estão estes dados de acordo com o modelo genético?

O que se pretende aqui averiguar é se X segue uma dada distribuição ou não

... no caso do exemplo, aquela averiguação inicia-se pela formulação das seguintes hipóteses:

Teste de ajustamento do qui-quadrado

H$_0$ **:** $p_1 = 0.25, \quad p_2 = 0.5, \quad p_3 = 0.25$
H$_{1:}$ pelo menos uma das probabilidades é diferente do formulado.

O teste sugerido por Karl Pearson (para o caso de as observações se encontrarem classificadas em k classes) consiste em considerar a estatística de teste:

$$\boldsymbol{X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}}$$

$k-$ n.º de classes; O_i- frequência observada, é a frequência absoluta em cada classe; E_i- frequência esperada, dada por $E_i = n\, p_i$ com p_i a probabilidade da classe i, se a hipótese **H**$_0$ verdadeira; n é o número (total) de observações independentes.

O valor de X^2 em cada classe é uma medida da proximidade entre os dados e a Hipótese nula. Quanto menor for o valor de X^2 mais plausível é a hipótese **H**$_0$.

Teste de ajustamento do qui-quadrado

Pearson mostrou que X^2 tem distribuição assintótica
$\boldsymbol{X^2 \sim \chi^2_{(k-1)}}$ onde k é o número de classes em que as observações foram agrupadas.

A região crítica, para um nível de significância α, é definida como:
RC: $\boldsymbol{X^2_{cal} > \chi^2_{\alpha,(k-1)}}$

Resolução:

	c	cC	C
O_i	18	44	28
p_i	0.25	0.5	0.25
$E_i = np_i$	22.5	45	22.5

$$X^2_{cal} = \frac{(18-22.5)^2}{22.5} + \frac{(44-45)^2}{45} + \frac{(28-22.5)^2}{22.5} = 2.27 \quad \text{e} \quad \chi^2_{0.05,2} = 5.99.$$

Então $X^2_{cal} < \chi^2_{0.05,2}$, logo não se rejeita H_0 a um nível de significância de 5%, portanto não há razões para duvidar que os dados estejam de acordo com o modelo genético.

Teste do qui-quadrado - Observações

- A variável X^2, tem distribuição assintótica. Qual a dimensão que a amostra deverá ter para que a aproximação à distribuição $\chi^2_{(k-1)}$ seja válida?
  - Alguns autores consideram que a aproximação só é válida se a frequência esperada, E_i, verifica $E_i \geq 5$;
  - Cochran (1954) sugeriu que se podia considerar classes com $E_i = 1$, desde que 80% das classes apresente $E_i > 5$. Sempre que as frequências esperadas de algumas classes forem inferiores a 1 essas classes devem agrupar-se com as adjacentes por forma a atingir a frequência mínima desejada.
- Sempre que para determinar a probabilidade p_i for necessário estimar parâmetros, a distribuição χ^2 virá

$$\chi^2_{(k-1-\text{n}^{\underline{\text{o}}}\text{ de parâmetros estimados})}$$

Votos de que os resultados correspondam às vossas expectativas e trabalho realizado ao longo do semestre.
BOA SORTE!!

BOAS FESTAS
Dez/2016