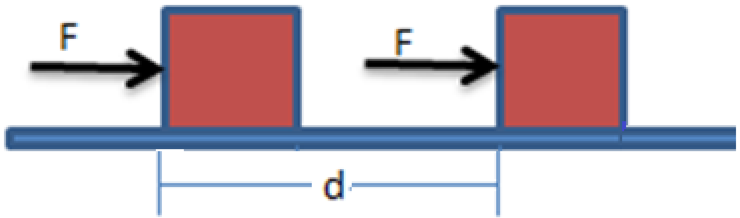
Trabalho, Energia e Quantidade de Movimento.

Nota: As fotografias assinaladas com (1) foram retiradas do livro
(1) A. Bello, C. Portela e H. Caldeira "Ritmos e Mudança", Porto editora.
As restantes são retiradas de
Sears e Zemansky – Física I (12ª ed.) Pearson Education, São Paulo.

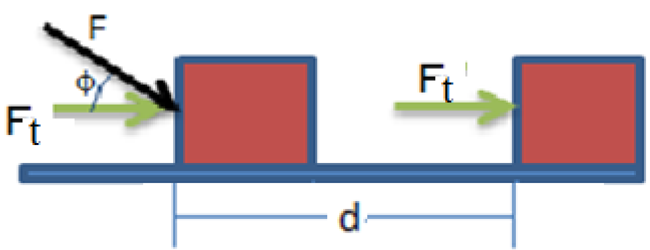
TRABALHO E ENERGIA



O trabalho realizado pela força constante F para deslocar o bloco de uma distância d é:

$$W = F \times d$$

Quando a força não tem a direção do deslocamento (o que só acontece quando há ligações) será:



$$F_t = F\cos(\phi)$$

$$F_N = F sen(\phi)$$

Note que só a componente que tem a direção do movimento é que produz trabalho. A componente normal à superfície (F_N) é anulada pela reação da superfície.

$$W = F_t \times d$$

$$\boxed{W = F\cos(\phi) \times d}$$

Na forma vetorial:

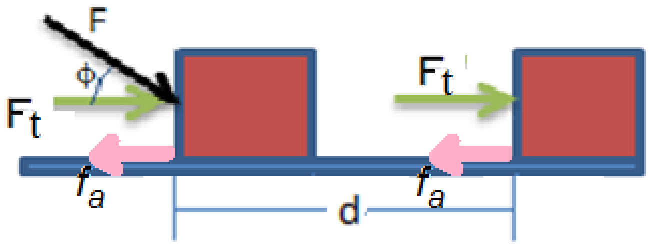
$$\boxed{W = \vec{F} \, . \, \Delta P}$$

Produto interno do vetor força pelo deslocamento do ponto

O trabalho é positivo quando $\phi < 90º$ e negativo em caso contrário.

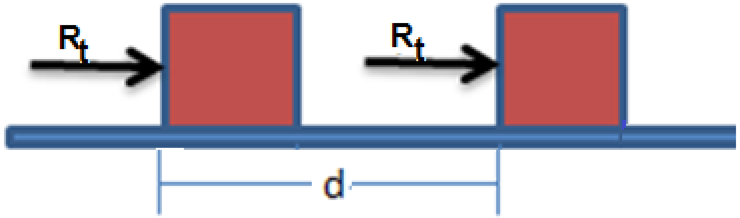
Quando se considera o **atrito** entre o corpo e a superfície introduz-se a força de atrito que, como se sabe, tem a direção da tangente à superfície e tem sentido oposto ao movimento:

$$f_a = \mu \times F_N = \mu \times Fsen(\phi)$$



Em seguida calcula-se a resultante das forças que têm a direção do movimento (forças tangenciais)

$$R_t = F_t - f_a$$



Finalmente calcula-se o trabalho realizado

$$W = R_t \times d$$

Unidades de trabalho

A equação de derivação é $W = F \times d$

F=[LMT^{-2}], logo W=[L^2MT^{-2}]

a) Sistema internacional Joule (J)

1 J=1 m^2kgs^{-2} =1 Nm

b) Sistema CGS erg (erg)

1 erg=1 cm^2gs^{-2} =1 dyn.cm

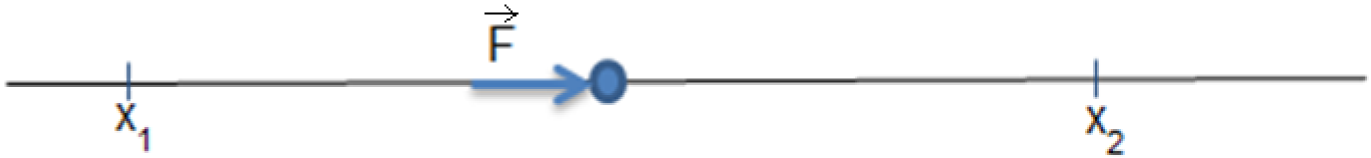
$$1\mathrm{J} = 1\mathrm{m}^2\mathrm{kgs}^{-2} = \left(\frac{10^2\,\mathrm{cm}}{1\mathrm{m}}\right)^2 \left(\frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\mathrm{kg}}\right)\left(\frac{1\mathrm{s}}{1\mathrm{s}}\right)^{-2} = 10^7\,\mathrm{cm}^2\mathrm{gs}^{-2} = 10^7\,\mathrm{erg}$$

c) Sistema Técnico ou gravitacional: Quilogrametro (kgm)

$$1\mathrm{kgm} = 1\mathrm{kgf} \times 1\mathrm{m} = 9{,}8\,\mathrm{N} \times \mathrm{m} = 9{,}8\,\mathrm{J}$$

Teorema do trabalho-Energia

Uma partícula demora um tempo t, para passar da posição x_1 para a posição x_2, impulsionada por uma força constante F, resultante de todas as forças que atuam na partícula, nas condições da figura:



Conhecidas as velocidades nos pontos x2 e x1, a aceleração pode ser calculada por:

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)}$$

Multiplicando ambos os membros desta última equação pela massa m

$$m \times a = \frac{m\,(v_2^2 - v_1^2)}{2\,(x_2 - x_1)}$$

Multiplicando agora ambos os membros pelo espaço percorrido $x_2 - x_1$ fica:

$$m \times a\,(x_2 - x_1) = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad \Rightarrow F\,(x_2 - x_1) = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$F\,(x_2 - x_1) = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$F\,(x_2 - x_1) = W$ é o trabalho realizado pela resultante das forças qua atuam na partícula para deslocar o ponto da posição x_1 para a posição x_2.

$$\boxed{W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}}$$

TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA ou TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA

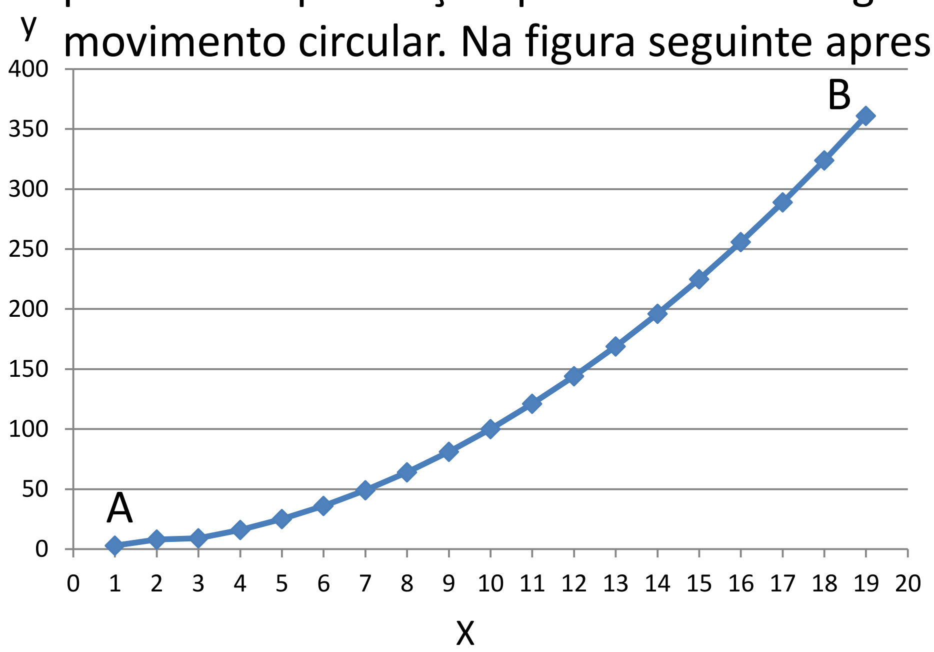
a $\boxed{K = \frac{mv^2}{2}}$ chama-se **Energia cinética**

O trabalho realizado pela resultante das forças que atuam sobre uma partícula de massa *m*, durante um certo intervalo de tempo, é igual à variação da energia cinética durante o mesmo intervalo de tempo.

Para um corpo rígido apenas com movimento de translação será:

O trabalho realizado pela resultante das forças exteriores que atuam sobre um corpo durante um certo intervalo de tempo, é igual à variação da energia cinética durante o mesmo intervalo de tempo.

Este teorema ainda é válido para trajetórias não lineares. Estas trajetórias são provocadas por forças que variam ao longo do tempo, como se viu no caso do movimento circular. Na figura seguinte apresenta-se uma trajetória parabólica



$$y = x^2$$

O trabalho realizado pela força F, de direção variável, para deslocara partícula de A até B é a soma do trabalho realizado em cada intervalos em que se pode dividir aquele percurso.

Quando os intervalos são muito pequenos pode considerar-se que, em cada intervalo, a força é constante e o movimento retilíneo. Então, pelo teorema do trabalho-energia, o trabalho realizado pela força para deslocar a partícula em cada intervalo é igual à variação da energia cinética observada nos extremos desse intervalo.

$$W = m\left[\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_3^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + \frac{v_4^2}{2} - \frac{v_3^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{v_{n-1}^2}{2} - \frac{v_{n-2}^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} - \frac{v_{n-1}^2}{2}\right] = m\left(\frac{v_n^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)$$

Podendo assim demonstrar-se a validade do enunciado anterior para qualquer trajetória e portanto para forças aplicadas variáveis no tempo.

Potência

Potência média

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Define-se para um intervalo de tempo e representa o trabalho médio realizado por unidade de tempo.

Potência instantânea

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

A potência está relacionada com a **capacidade de produzir trabalho**. Um carro mais potente, percorre a mesma distância que outro de menor potência, num intervalo de tempo menor.

Um aquecedor com 2000W produz o dobro do calor do que um aquecedor de 1000 W, no mesmo intervalo de tempo.

Quando F não varia com o tempo a trajetória é uma reta, o deslocamento pode representar-se por x e o trabalho por $F \times x$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(F \times x)}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$P = FV$$

A potência num determinado instante é o produto da intensidade da força pela velocidade (V) nesse instante.

Unidades de Potência

A equação de derivação é $P = \Delta W / \Delta T$

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$W=[L^2MT^{-2}]$ logo $P=[L^2MT^{-3}]$

a) Sistema internacional watt (W)

$1\ W=1\ m^2kgs^{-3} =1\ J.s^{-1}$

b) Sistema CGS erg por segundo

$1\ erg.s^{-1}=1\ cm^2gs^{-3}$

$1\ W=10^7\ erg.s^{-1}$

c) Sistema Técnico ou gravitacional: Quilogrâmetro por segundo

$$1\,\mathrm{kgm.s^{-1}} = 9{,}8\,\mathrm{J.s^{-1}} = 9{,}8\ \mathrm{W}$$

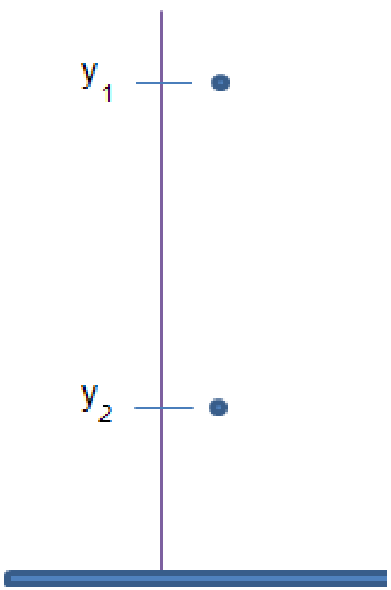
Outra unidade muito usada, que não pertence ao SI é o horse power (hp), nos países anglo-saxónicos, ou o cavalo vapor (cv) nos restantes. A correspondência é a seguinte:

1 hp = 1,0138 cv = 745,7 W
1 cv = 0,9863 hp = 735,5 W

Energia potencial

1. *Energia potencial gravitacional*

O trabalho realizado pela força da gravidade sobre um corpo quando este cai de uma altura y_1 para uma altura y_2 é dado por:



$$W_{grav} = mg(y_1 - y_2)$$

$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2$$

$$\boxed{U_{grav} = mgy}$$

é a **energia potencial gravitacional** da partícula situado a uma altura y do sistema de referência

$$W_{grav} = U_{grav.1} - U_{grav.2}$$

$$\boxed{W_{grav} = -(U_{grav.2} - U_{grav.1})}$$

$$\boxed{W_{grav} = -\Delta U_{grav}}$$

O sinal negativo é essencial. Permite considerar que quando a partícula sobe, o trabalho realizado pela força da gravidade é negativo e a energia potencial gravitacional aumenta, verificando-se o inverso quando desce.

Pelo teorema da energia cinética pode-se escrever:

$$W_{grav} = m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2} = K_2 - K_1$$

Conjugando com a expressão que fornece o trabalho em função da diferença de energia potencial gravitacional fica:

$$K_2 - K_1 = -(U_{grav.2} - U_{grav.1})$$

$$K_1 + U_{grav.1} = K_2 + U_{grav.2}$$

$$\boxed{E = K + U_{grav}}$$ permanece constante

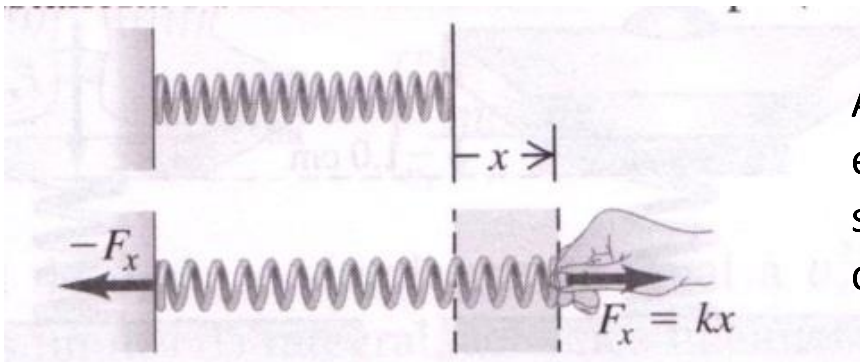
E, representa a energia mecânica total, soma da energia cinética com a energia potencial gravitacional.

Pode então concluir-se que, durante o movimento de uma partícula apenas sujeita à ação da gravidade, a energia total permanece constante.

QUANDO UM PONTO DESCE A ENERGIA CINÉTICA AUMENTA E A POTENCIAL DIMINUI E QUANDO UM PONTO SOBE GANHA ENERGIA POTENCIAL E PERDE ENERGIA CINÉTICA

2. ***Energia potencial elástica***

Corpos elásticos são corpos que, terminada a deformação, voltam a ter a mesma forma e o mesmo tamanho que possuíam antes da deformação.



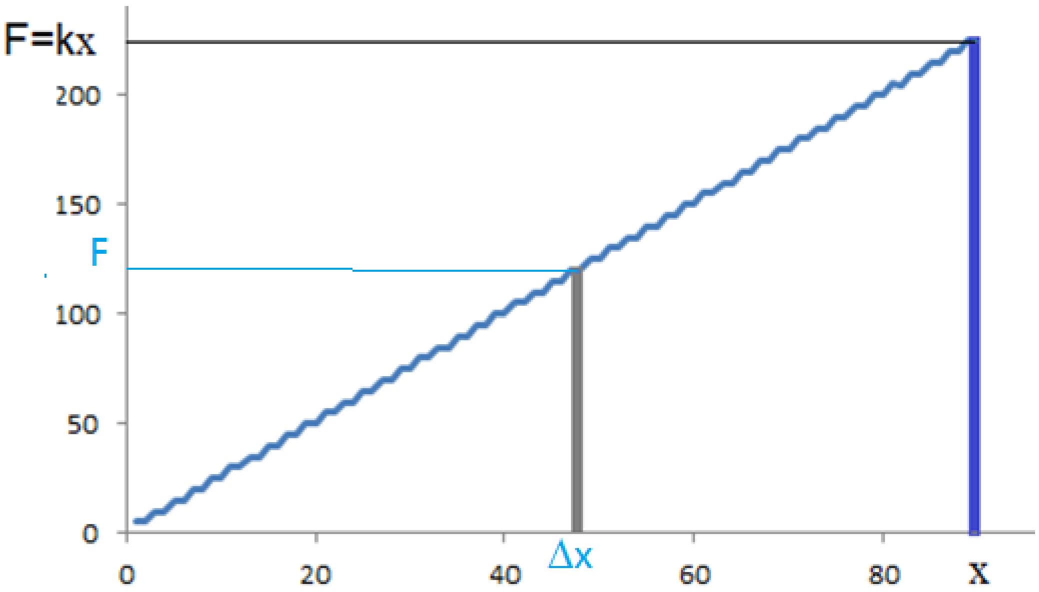
A força F aplicada a cada uma das extremidades da mola é variável, sendo tanto maior quanto maior o deslocamento (x) que provoca

$$F = kx$$

Em que **k=constante da mola**. Nas molas mais simples, usadas nos brinquedos $k=1\ Nm^{-1}$. Na suspensão de um automóvel $k=10^5\ Nm^{-1}$

Como a força varia com o valor de x, para calcular o trabalho, divide-se o deslocamento em n deslocamentos elementares em que, para cada um, se considera a F constante com o valor que tem no início do intervalo.

O trabalho em cada intervalo pode ser calculado pela área do retângulo que tem por base o comprimento do intervalo (Δx) e por altura o valor da força (F) dado que W=F.Δx

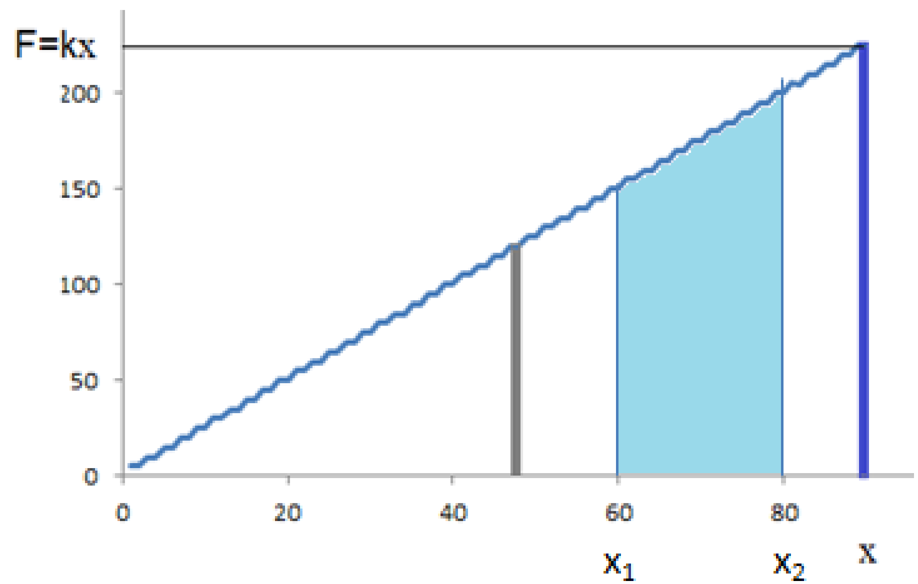


Depois somam-se todos estes trabalhos elementares para obter o trabalho realizado pela força. A área do triângulo representa então o trabalho realizado pela força variável **F** quando provoca um deslocamento **x** na mola

$$W = x \times \frac{kx}{2} = \frac{1}{2} kx^2$$

O trabalho realizado pela Força F sobre a mola entre x1 e x2 será a área do trapézio realçado na figura, que pode ser calculado subtraindo à área do triângulo de base Ox_2 e altura kx_2, a área do triangulo de base Ox_1 e altura kx_1

$$W = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$$



$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

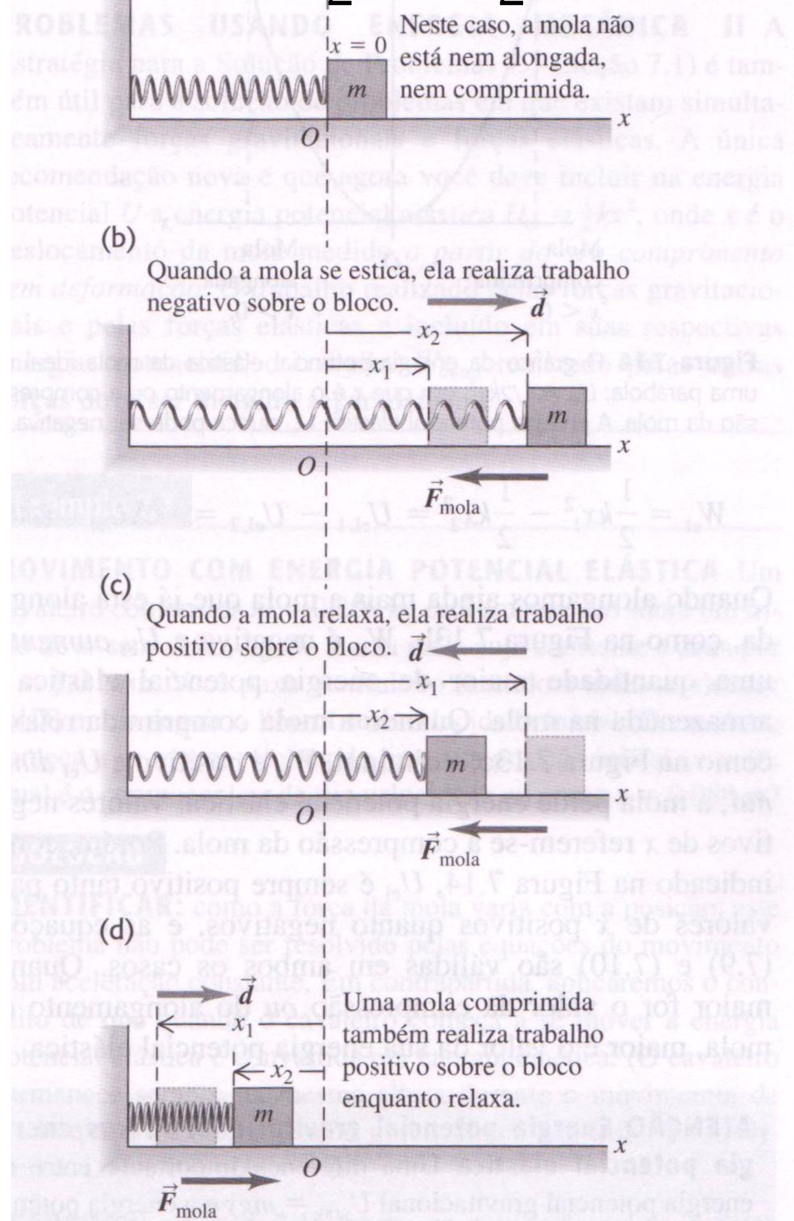
O trabalho realizado pela mola (F_{mola}) entre x_1 e x_2 será igual e de sinal contrário ao trabalho realizado pela força que provoca o deslocamento (F)

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Tal como no caso do trabalho gravitacional, podemos representar o trabalho da mola em termos de uma diferença de energia no início e no fim do movimento. Essa energia é a **ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA (U_{el}).**

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el}$$



3. **Situações com energia potencial gravitacional e elástica**

Dado que o trabalho realizado por uma forca elástica entre x_1 e x_2 é igual à diferença do potencial elástico entre os dois pontos, podemos agora generalizar o princípio da conservação da energia, escrito quando se considerava apenas a força gravitacional.

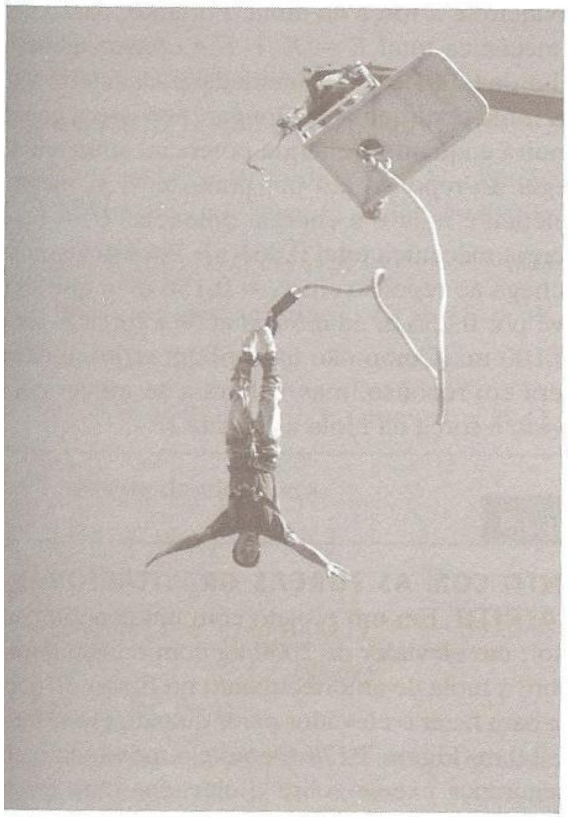
$$K_1 + U_{grav.1} + U_{el.1} = K_2 + U_{grav.2} + U_{el.2}$$

Se houver outro tipo de forças a realizar o trabalho (W_{outras})

$$\boxed{K_1 + U_{grav.1} + U_{el.1} + W_{outras} = K_2 + U_{grav.2} + U_{el.2}}$$

Esta é a forma mais geral deste princípio, que se pode aplicar às situações onde exista atrito, sendo W_{outras} o trabalho realizado pelas forças de atrito (normalmente energia que se transforma em calor, que é outra forma de energia).

Se não houvesse atrito (resistência do ar e atrito interno nos elásticos) haveria conservação de energia e o movimento representado na figura não parava.



15 A queda de um saltador de *bungee jumping* envol
o entre a energia cinética, a energia potencial gravitacio
tencial elástica. Devido à resistência do ar e às forças d
corda do *bungee*, a energia mecânica não é conservada
ecânica *fosse* conservada, o saltador permaneceria os
e para baixo eternamente!)

4. Forças conservativas

São forças capazes de converter energia cinética em energia potencial e de fazer a conversão inversa

Características do trabalho realizado apenas por forças conservativas:
- É igual à diferença entre o valor inicial e final da função potencial
- É reversível
- É independente da trajetória do corpo, depende apenas do ponto inicial e do ponto final
- Quando o ponto final coincide com o ponto inicia, o trabalho realizado é igual a zero

$$W_{A \to B} = U(A) - U(B)$$

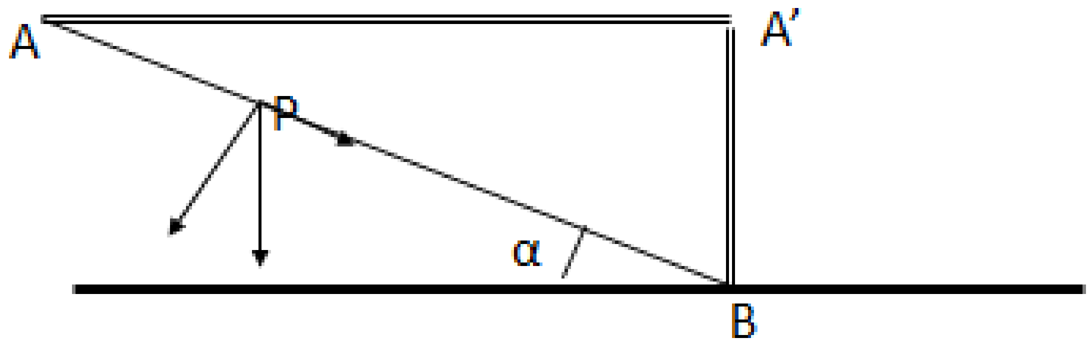
L= distância entre A e B sobre o plano inclinado: h= distância medida na vertical

Forças conservativas

São forças capazes de converter energia cinética em energia potencial e de fazer a conversão inversa

Características do trabalho realizado apenas por forças conservativas:
- É igual à diferença entre o valor inicial e final da função potencial
- É reversível
- É independente da trajetória do corpo, depende apenas do ponto inicial e do ponto final

Numa partícula simplesmente pesada, o trabalho da gravidade para a deslocar de A até B é:



$W_{A\to B} = mg \times sen(\alpha) \times L$ dado que $\mathrm{h} = \mathrm{L} \times \mathrm{sen}(\alpha)$ $W_{A\to B} = mg \times h$

$W_{A\to B} = U(A) - U(B) = mg(y_A - y_B) = mgh$ O que mostra a 1ª propriedade

Se fizer o percurso até B seguindo o caminho AA'+A'B tem-se:

$\mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{A'}} = 0$ $\mathrm{W}_{\mathrm{A'}\to\mathrm{B}} = \mathrm{mg} \times \mathrm{h}$

O que permite concluir-se que o trabalho é igual se a partícula descer o pano inclinado sem atrito ou, se seguir um outro caminho, sendo uma função apenas da diferença da função potencial .

QUANTIDADE DE MOVIMENTO ou MOMENTO LINEAR

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$\vec{p} = m\vec{v}$ é a **quantidade de movimento ou momento linear**

A taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento de uma partícula é igual à resultante das forças que sobre ela atuam

Como a equação é vetorial, na resolução dos problemas não utilizamos o vetor mas sim as suas componentes:

$$p_x = mv_x$$

$$p_y = mv_y$$

No movimento retilíneo utiliza-se apenas uma das equações.

A 2ª lei de Newton pode escrever-se, para um intervalo de tempo Δt, $\vec{F} = m \times \vec{a}_m$ considerando nesse intervalo a aceleração média

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta(\vec{v})}{\Delta t}$$

Consequentemente:

$$\vec{F} = m \times \vec{a}_m = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})}$$

A $\vec{J} = \vec{F}\Delta t$ chama-se **vetor impulso**

fazendo $\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad e \quad \Delta t = t_2 - t_1$

resulta, por substituição na equação anterior

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$$

$$\vec{J}$$

$$\boxed{\vec{J} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

TEOREMA DO IMPULSO ou DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO – A variação da quantidade de movimento (momento linear) de uma partícula durante um determinado intervalo de tempo é igual ao impulso exercido pela resultante das forças atuantes durante o mesmo intervalo de tempo.

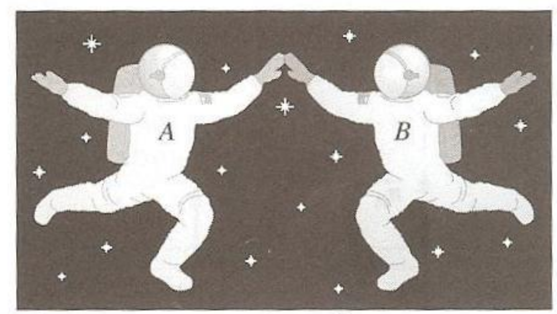
SISTEMAS MATERIAS

Um sistema material pode ser considerado como um conjunto de partículas com uma determinada massa (pontos materiais).

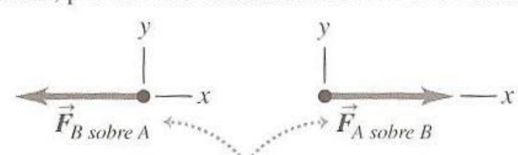
O sistema pode ser **discreto**, como por exemplo o sistema solar, admitindo que cada planeta é um ponto material, ou pode ser **contínuo**.

Designam-se ***forças interiores***, as forças exercidas entre si pelos vários pontos materiais que constituem o sistema. ***Forças exteriores*** são as forças resultantes de interações exteriores ao sistema. Um ***sistema isolado*** é um sistema material que está apenas sujeito à ação de forças interiores

O sistema mostrado na figura, constituído por dois pontos materiais (astronautas) é um sistema isolado, porque não está sujeito a mais nenhuma interação a não ser a que exercem um com o outro.



Nenhuma força externa atua sobre o sistema composto pelos dois astronautas, por isso seu momento linear total é conservado.



As forças que os astronautas exercem mutuamente formam um par de ação e reação.

Pela terceira lei de Newton a força que A exerce sobre B ($\vec{F}_{A/B}$) é igual e de sinal contrário à força que B exerce sobre A ($\vec{F}_{B/A}$). São um para ação reação.

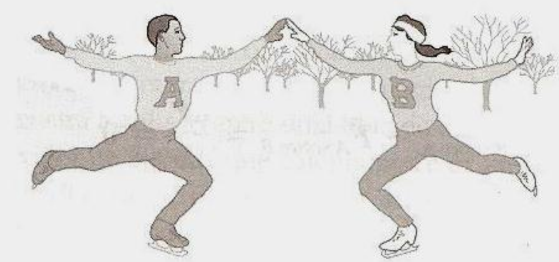
$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} \Rightarrow \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = 0 \qquad \vec{F}_{A/B} = \frac{d\,\vec{p}_A}{dt} \qquad \vec{F}_{B/A} = \frac{d\,\vec{p}_B}{dt}$$

$$\frac{d\,\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\,\vec{p}_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B\right) = 0$$

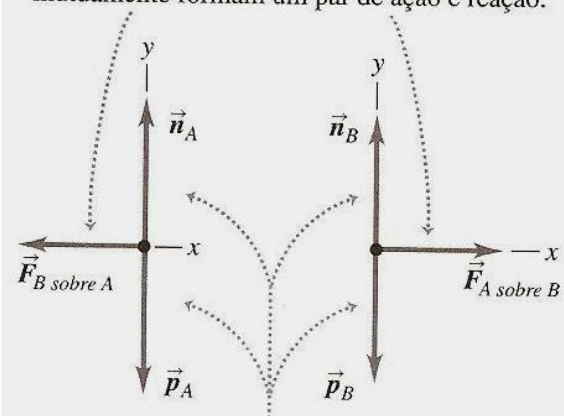
$$\boxed{\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B\right) = const.}$$

Princípio da Conservação do Momento Linear : Quando a resultante das forças exteriores que atuam sobre um sistema material é nula (sistema isolado) o momento linear total do sistema permanece constante.

Note-se que este princípio é mais geral que o da conservação da energia, porque aquele é válido apenas quando as forças são conservativas.

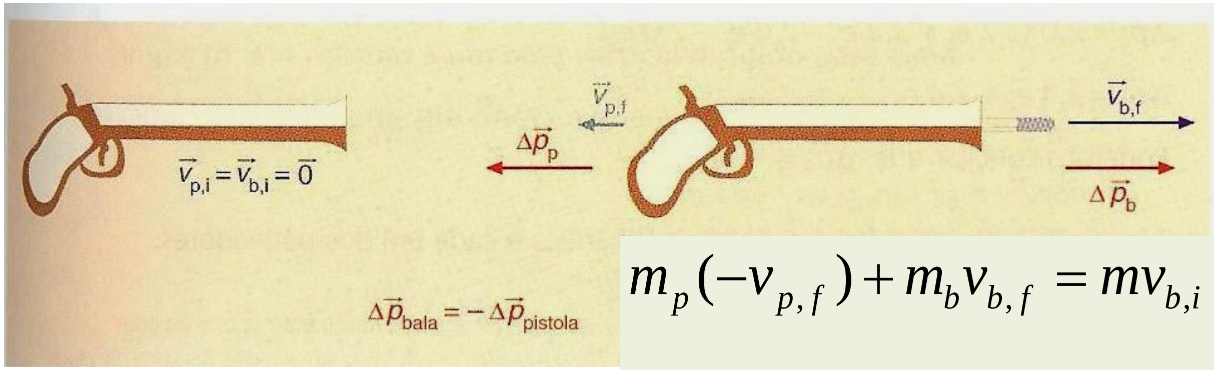


As forças que os patinadores exercem mutuamente formam um par de ação e reação.



Embora a força normal e a força gravitacional sejam externas, sua soma vetorial é igual a zero e o momento linear total se conserva.

Exemplo de aplicação: disparo de uma pistola



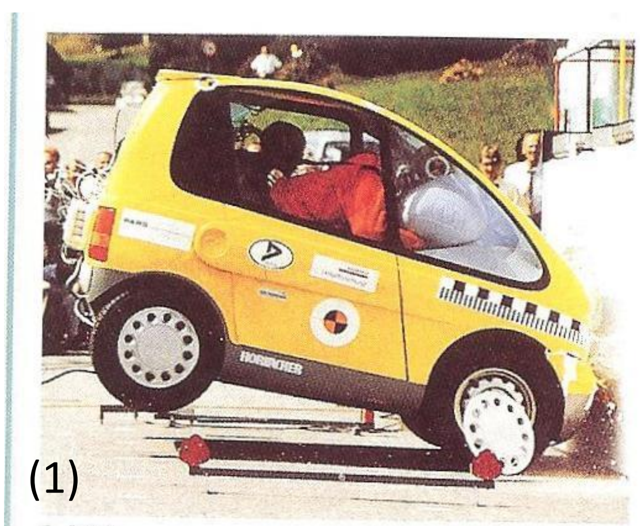
(1)

$$m_p(-v_{p,f}) + m_b v_{b,f} = m v_{b,i} + m_p v_{p,i} = 0$$

$$m_b v_{b,f} = m_p v_{p,f} \Rightarrow v_{p,f} = v_{b,f}\,\frac{m_b}{m_p}$$

O recuo da pistola é função da relação entre a massa da pistola e da bala.

Nota: Na resolução deste problema utilizou-se o módulo do vetor, ao qual se atribui um sinal, em vez do vetor, porque os movimentos acontecem numa mesma direção. **Esta simplificação será sempre utilizada no movimento retilíneo**



(1)

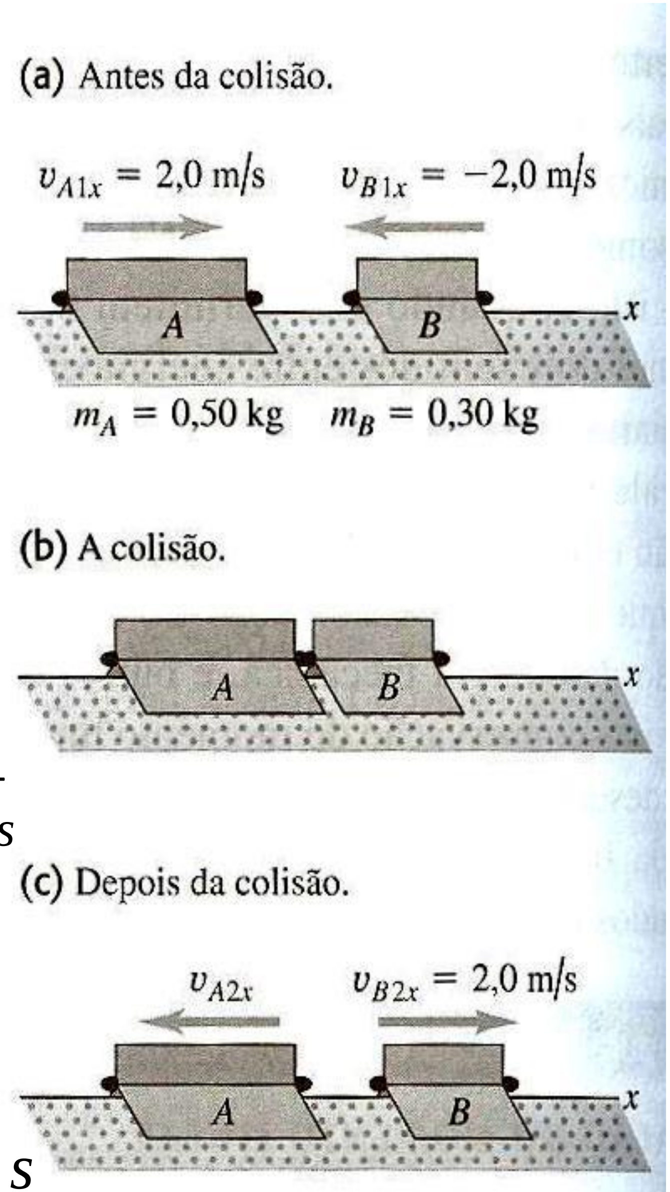
COLISÕES

Utiliza-se o termo colisão quando existe uma interação vigorosa entre dois corpos com uma duração curta.

1. Colisão numa linha reta

Quando as forças entre os corpos forem muito maiores do que as forças externas, como em geral acontece, podemos desprezar as forças exteriores e considerar o sistema isolado. Então existe conservação do momento linear na colisão

$$m_A\vec{v}_{A,1}+m_B\vec{v}_{B,1}=m_B\vec{v}_{B,2}+m_A\vec{v}_{A,2}$$



Como o movimento é retilíneo podemos utilizar a velocidade escalar, convencionando um sentido como positivo e o outro como negativo (da esquerda para a direita os valores de *v* consideram-se positivos) $v_{A1}=2m/s;\ v_{B1}=-2m/s;\ v_{B2}=2m/s$

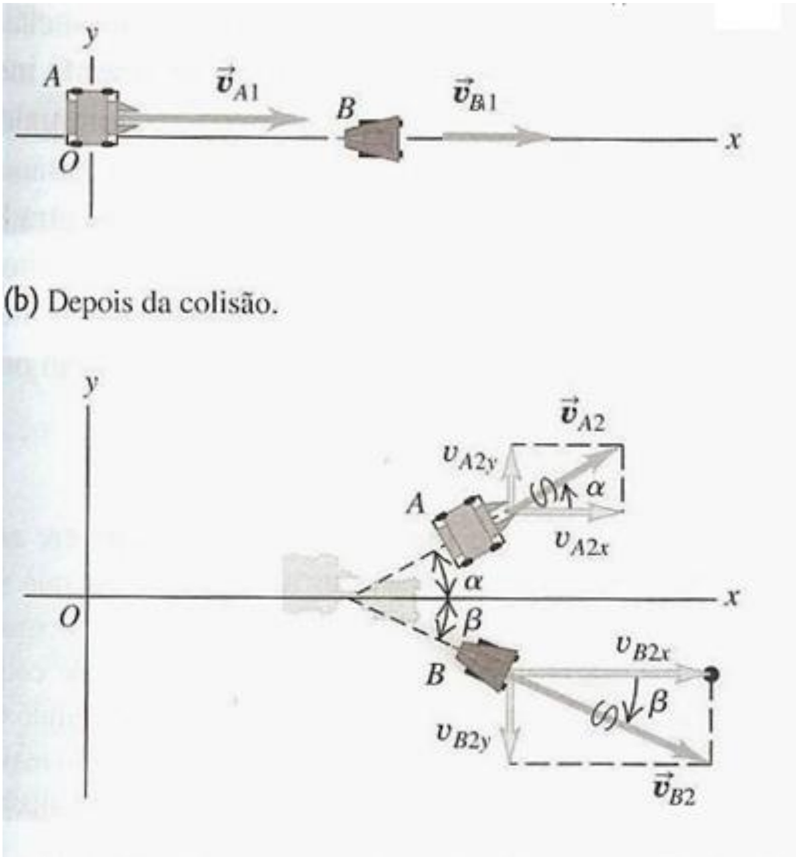
$$m_Av_{A,1}+m_Bv_{B,1}=m_Av_{A,2}+m_Bv_{B,2}$$

$$\frac{m_Av_{A,1}+m_Bv_{B,1}-m_Bv_{B,2}}{m_A}\Rightarrow v_{A,2}=-0{,}4m/s$$

2. Colisão num plano horizontal

O momento linear do sistema antes da colisão é igual ao momento linear do sistema depois da colisão.

$$m_A\vec{v}_{A,1} + m_B\vec{v}_{B,1} = m_A\vec{v}_{A,2} + m_B\vec{v}_{B,2}$$



a 8.13 Vistas de topo das velocidades (a) antes e (b) depois

O problema resolve-se através de um sistema de 2 equações obtido pela igualdade das 2 componentes do momento linear

$$m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x} = m_A v_{A,2x} + m_B v_{B,2x}$$

$$m_A v_{A,1y} + m_B v_{B,1y} = m_A v_{A,2y} + m_B v_{B,2y}$$

ou:

$$m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x} = m_A v_{A,2x} + m_B v_{B,2x}$$

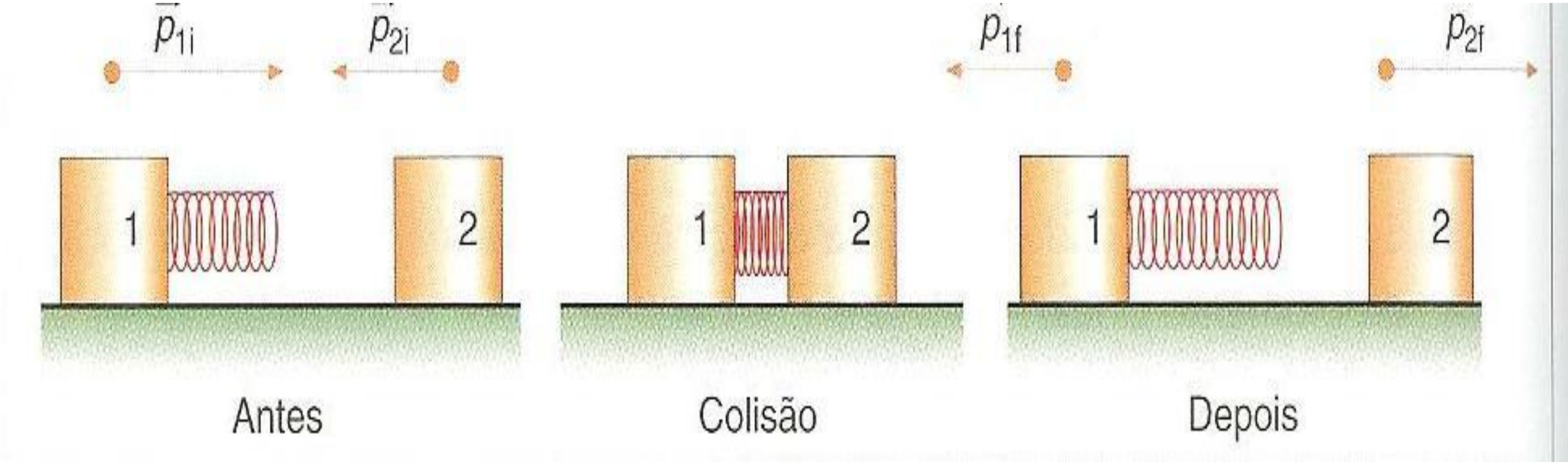
$$0 = m_A v_{A,2y} + m_B v_{B,2y}$$

Conhecida a velocidade de A depois da colisão pode-se calcular $v_{B,2x}$ e $v_{B,2y}$ pelo sistema de equações.

3. A energia das colisões

a) Colisões elásticas

Quando as forças entre os corpos forem conservativas, de modo que nenhuma energia mecânica é perdida ou adquirida durante a colisão, A ENERGIA CINÉTICA TOTAL DO SISTEMA É A MESMA ANTES E DEPOIS DA COLISÃO



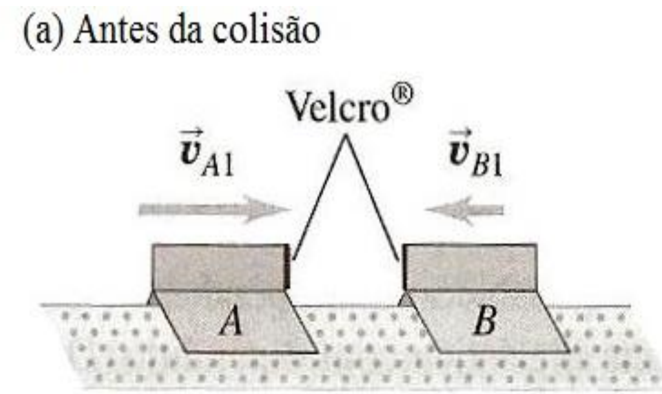
(1)

Durante a colisão, parte da energia cinética inicial transforma-se em energia potencial elástica que, depois da colisão se transforma de nova em energia cinética, de modo que a quantidade de movimento do ponto 2 quando volta à posição inicial é simétrica da que tinha quando partiu. Em consequência a energia cinética é a mesma.

b) Colisões completamente inelásticas

Nestas colisões há conservação do momento linear **mas a energia cinética diminui após a colisão**.
O princípio da conservação da quantidade de movimento permite escrever

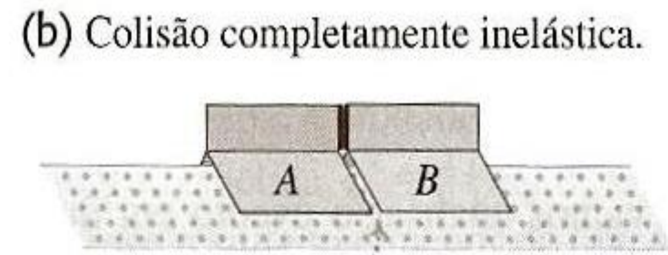
$$m_A\vec{v}_{A,1} + m_B\vec{v}_{B,1} = (m_B + m_A)\vec{v}_{AB,2}$$



Como a colisão se dá numa reta tem-se, mantendo para a velocidade *v* a regra de sinais referida:

$$m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1} = (m_B + m_A) v_{AB,2}$$

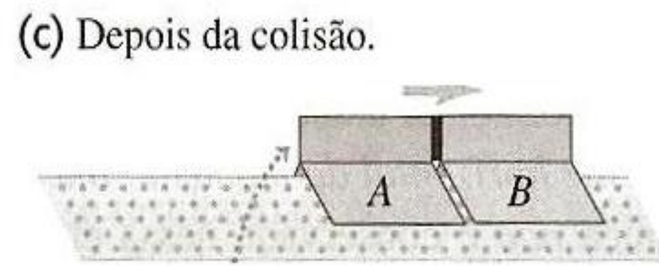
$$\frac{m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1}}{(m_B + m_A)} = v_{AB,2}$$



Os corpos ficam unidos

Para simplificar a demonstração considere- se que um corpo estava parado ($v_{B,1} = 0$). Pelo princípio da conservação da quantidade de movimento:

$$m_A v_{A,1} = (m_B + m_A) v_{AB,2}$$



Os corpos movimentam-se unidos

A energia cinética do sistema antes da colisão era:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A,1}^2$$

A energia cinética do sistema depois da colisão, considerando $v_{AB2} = \dfrac{m_A v_{A,1}}{(m_B + m_A)}$ é:

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{AB2}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\left[\frac{m_A v_{A,1}}{(m_A + m_B)}\right]^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \frac{(m_A v_{A,1})^2}{(m_A + m_B)}$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{(m_A v_{A,1})^2}{(m_A + m_B)}}{\frac{1}{2} m_A v_{A,1}^2} = \frac{m_A \ m_A v_{A,1}^2}{(m_A + m_B) \ m_A v_{A,1}^2} = \frac{m_A}{m_B + m_A}$$

O que mostra que $K_1 > K_2$, havendo portanto perda de energia cinética na colisão.

O **coeficiente de restituição** numa colisão frontal é o quociente entre a velocidade relativa de afastamento (após o choque) e a velocidade relativa de aproximação (antes do choque). Este coeficiente é adimensional e define-se como:

$$e = \frac{v_{rel.\,afastamento}}{v_{rel.\,aproximação}}$$

Nota: A velocidade relativa é calculada como a soma das velocidades quando têm sentidos opostos e a subtração delas quando têm o mesmo sentido.

Este coeficiente varia entre 0 e 1.
Colisões elástica: e=1, porque a vel. relativa de aproximação iguala à de afastamento
Colisões completamente inelásticas: e=0, porque a vel. relativa de afastamento é nula

Choques	Coeficiente de restituição (e)
Vidro com vidro	0,93
Chumbo com chumbo	0,20
Ferro com chumbo	0,12
Madeira com madeira	0,50
Marfim com marfim	0,90

Este coeficiente introduz mais uma equação relacionando as velocidades, o que permite resolver os problemas utilizando-a com a equação da conservação do momento linear.