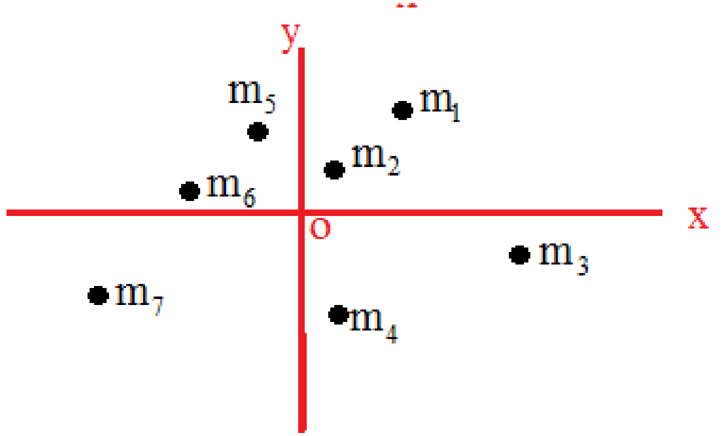
Centro de massa
Dinâmica do corpo rígido

Nota: As fotografias assinaladas com (1) foram retiradas do livro
(1) A. Bello, C. Portela e H. Caldeira "Ritmos e Mudança", Porto editora.
As restantes são retiradas de
Sears e Zemansky – Física I (12ª ed.) Pearson Education, São Paulo.

Centro de massa

Seja um sistema material discreto, formado por n pontos materiais de de massas $m_1, m_2, .., m_n$.



As coordenadas x_g, y_g do seu centro de massa são:

$$x_g = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots\dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots\dots\dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

$$y_g = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots\dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots\dots\dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

Do ponto de vista estatístico pode-se dizer que as coordenadas do centro de massa são as médias ponderadas das respetivas coordenadas dos pontos em que os factores de ponderação são as massas dos pontos.

Num corpo rígido (sólido), para o qual existe uma distribuição contínua de massas aqueles somatórios são substituídos por integrais e as massas são substituídas pelas respetivas massas específicas.

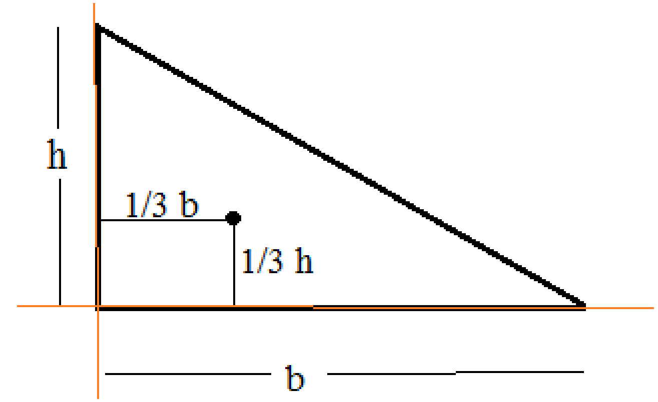
Se um objeto homogéneo possui um eixo de simetria então o centro de massa está sobre esse eixo. Se existir um centro de simetria ou centro geométrico, então esse ponto é o seu centro de massa.

Se um objeto homogêneo possui um centro geométrico, é aí que o centro de massa está localizado.

Em muitos casos, sobretudo quando se utilizam sólidos prismáticos, o problema em vez de três dimensões pode ser estudada em duas ou uma dimensão. Nesse caso usa-se a massa por unidade de área ou a massa por unidade de comprimento.

Quando se usam duas dimensões é muito importante relembrar a localização do centro de simetria de um triângulo retângulo e de um trapézio.

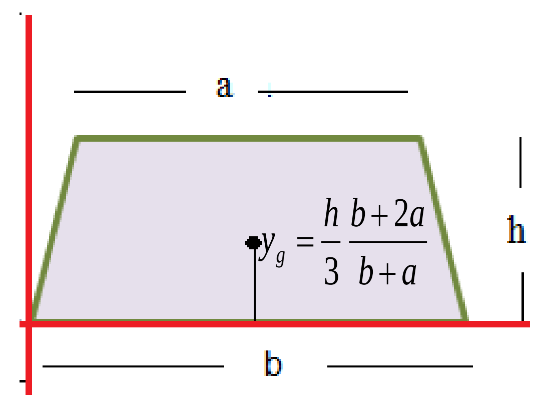
No triângulo está situado, em relação ao vértice do ângulo reto, a 1/3 da base e 1/3 da altura



$$x_g = \frac{1}{3}b \qquad y_g = \frac{1}{3}h$$

$$A = bh/2 \qquad m = A \times \rho_{\text{sup}}$$

Num trapézio de bases *a* e *b* e altura *h*:

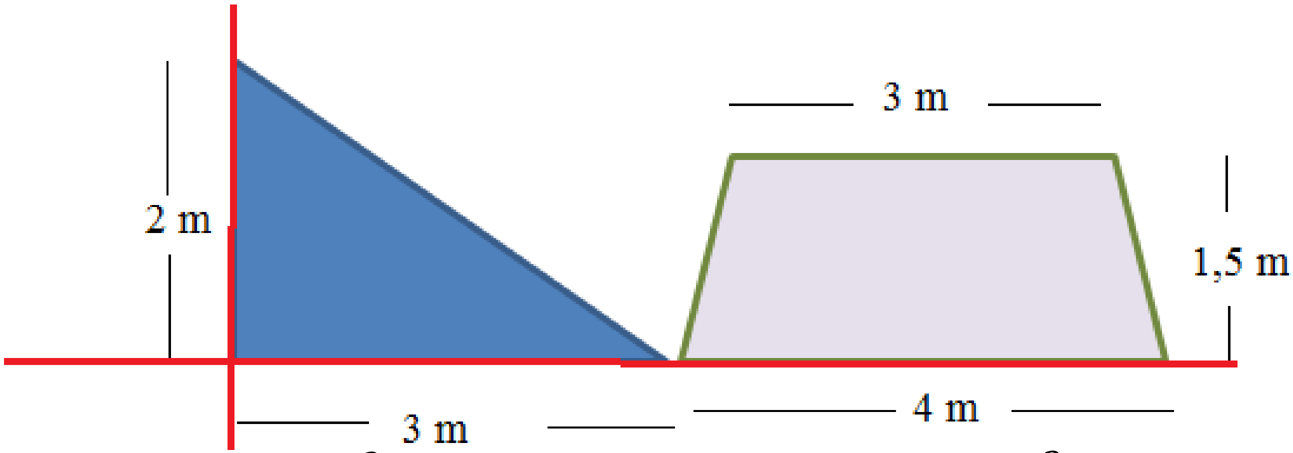


$$x_g = \frac{b}{2} \qquad y_g = \frac{h}{3}\frac{b+2a}{b+a}$$

$$A = bh/2$$

$$m = A \times \rho_{\text{sup}}$$

Para figuras mais complexas considera-se a massa de cada uma das partes concentrada no seu centro de massa e utilizam-se as fórmulas dadas para os sistemas discretos. No exemplo seguinte seria um sistema constituído por dois pontos.



$\rho_1 = 4kg/m^2$ $\rho_2 = 2kg/m^2$

$$x_1 = \frac{1}{3}3 = 1\,m \qquad x_2 = 3 + \frac{4}{2} = 5\,m$$

$$y_1 = \frac{1}{3}2 = 0.667\,m \qquad y_2 = \frac{1{,}5}{3}\,\frac{4+2\times 3}{4+3} = 0{,}71\,m$$

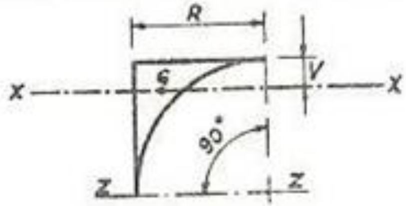
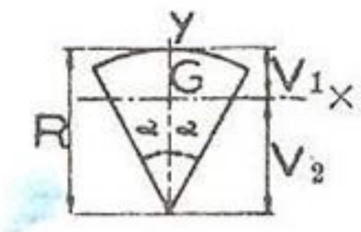
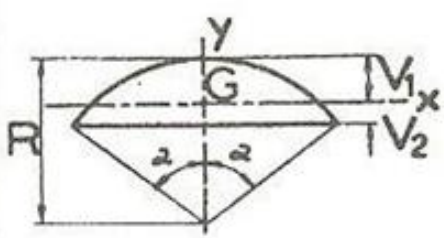
$$A_1 = \frac{3\times 2}{2} = 3\,m^2 \qquad A_2 = \frac{4+3}{2}\times 1.5 = 5{,}25\,m^2$$

$$m_1 = A\times\rho = 12\,kg \qquad m_2 = A\times\rho = 10{,}5\,kg$$

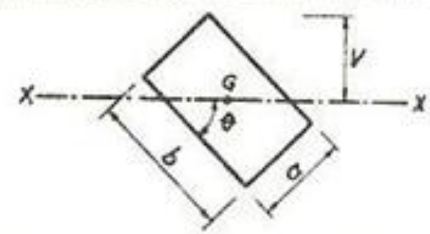
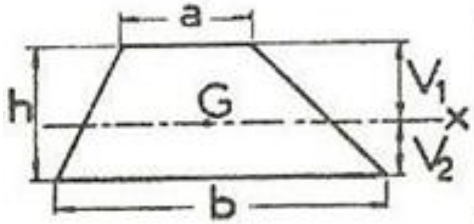
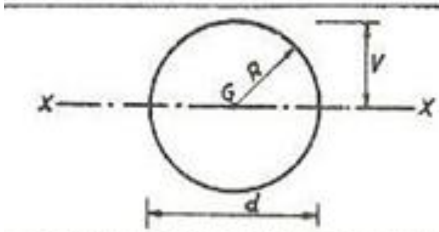
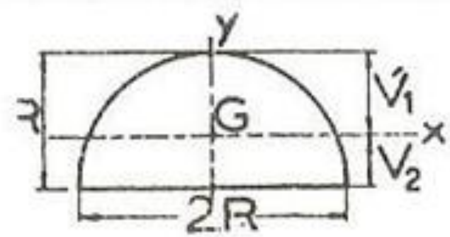
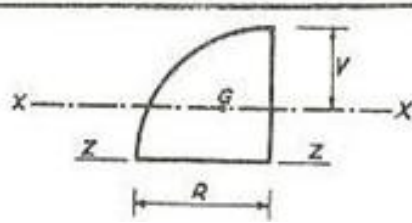
Coordenadas do centro de massa:

$$x_g = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 3{,}54\,m$$

$$y_g = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = 0{,}69\,m$$

Figura	Posição do centro de gravidade G	Área S
	$V = 0{,}2234\ R$	$S = R^2\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0{,}2146\ R^2$
	$V_1 = R\left(1 - \dfrac{2 \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}\right)$ $V_2 = 2R\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	$S = \alpha R^2$ (α em radianos)
	$V_1 = R \times \left(1 - \dfrac{4 \operatorname{sen}^3 \alpha}{6\alpha - 3 \operatorname{sen} 2\alpha}\right)$ $V_2 = R\left(\dfrac{4 \operatorname{sen}^3 \alpha}{6\alpha - 3 \operatorname{sen} 2\alpha} - \cos \alpha\right)$	$S = \dfrac{R^2}{2}(2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$ (α em radianos)

Extraído de A. Lencastre, 1969, Manual de Hidráulica Geral

	$V = \dfrac{a \cos\theta + b \,\mathrm{sen}\,\theta}{2}$	$S = a\,b$
	$V_1 = \dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{2\,b + a}{b + a}$ $V_2 = \dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{b + 2\,a}{b + a}$	$S = h \cdot \dfrac{b + a}{2}$
	$V = R$	$S = \pi R^2 = 3{,}1416\ R^2$
	$V_1 = 0{,}5756\ R$ $V_2 = 0{,}4244\ R$	$S = \dfrac{\pi R^2}{2} = 1{,}5708\ R^2$
	$V = 0{,}5756\ R$	$S = \dfrac{\pi R^2}{4} = 0{,}7854\ R^2$

Extraído de A. Lencastre, 1969, Manual de Hidráulica Geral

Movimento do centro de massa

A componente do vetor velocidade do centro de massa no eixo das abcissas será:

$$\frac{dx_g}{dt} = \frac{m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} + m_3 \frac{dx_3}{dt} + \ldots\ldots + m_n \frac{dx_n}{dt}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt}}{M}$$

$$v_{gx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \ldots\ldots + m_n v_{nx}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}}{M}$$

Do mesmo modo, a componente do vetor velocidade no eixo das ordenadas será agora:

$$v_{gy} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \ldots\ldots + m_n v_{ny}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy}}{M}$$

O vetor velocidade será:

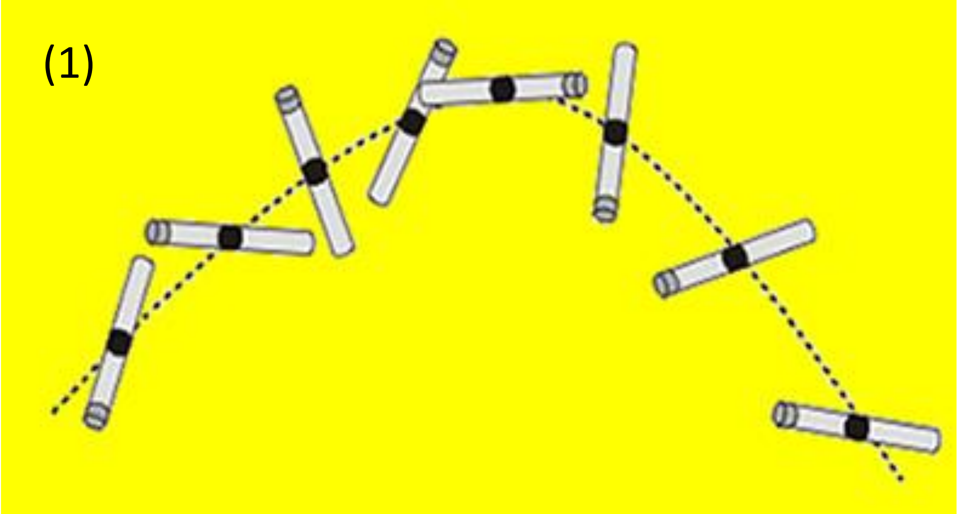
$$\vec{v}_g = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \ldots\ldots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{v}_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$M\ \vec{v}_g = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots\ldots + m_n\vec{v}_n$$

$$\boxed{\vec{p}_g = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots\ldots + \vec{p}_n}$$

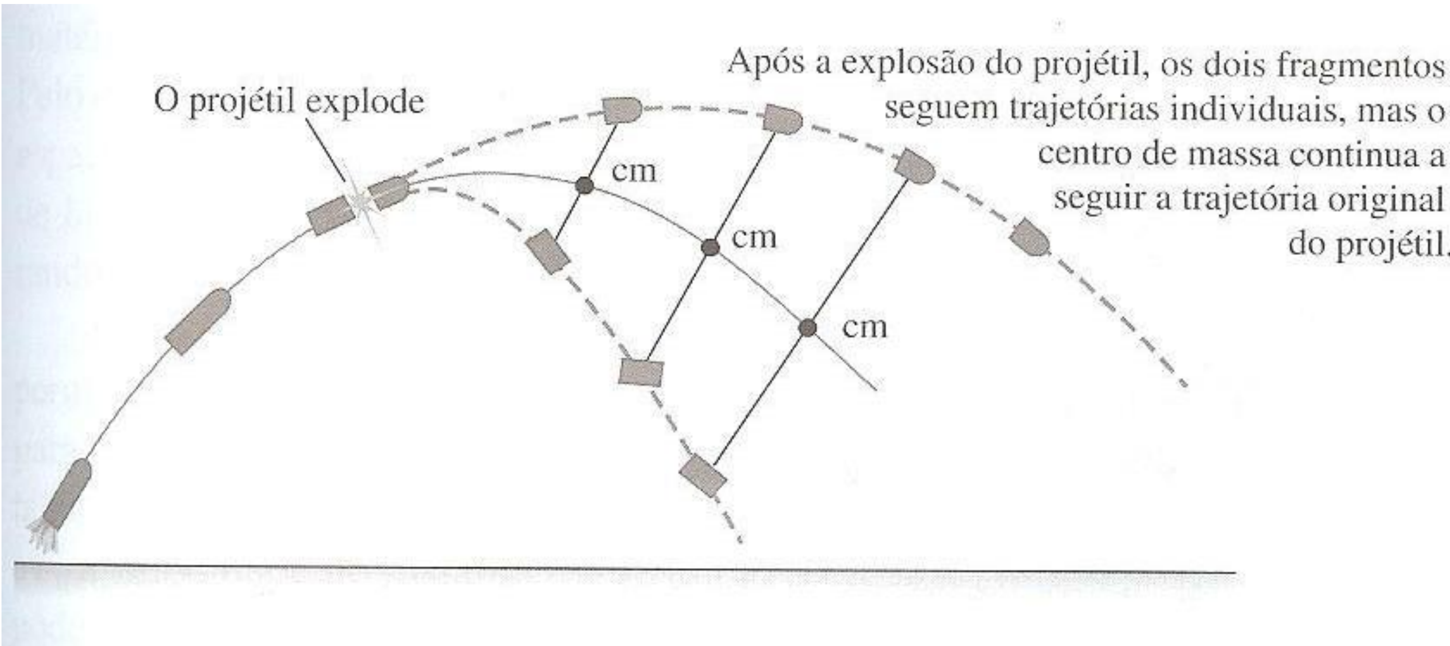
O momento linear (ou quantidade de movimento) do centro de massa de um sistema material é igual à soma dos momento lineares (quantidades de movimento) de cada um dos seus pontos.



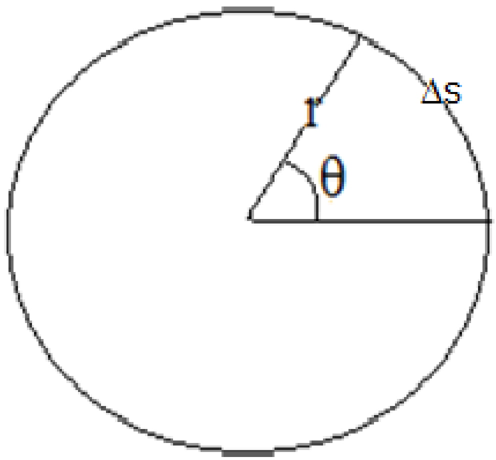
http://www.mundoeducacao.com.br/fisica/centro-massa.htm

Ao ser lançada, a barra de ferro possui movimento de rotação e translação.
A rotação faz-se, em cada instante, em torno do centro de massa e este tem um movimento de translação, no exemplo descrevendo uma parábola bem conhecida quando se estudou o movimento dos projéteis.

Outro exemplo



MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO



Na cinemática vimos que no movimento de rotação de um ponto se poderia utilizar a velocidade linear ou a velocidade angular.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v = r\omega$$

Em que $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ é a **velocidade angular** expressa em rad/s

Movimento uniforme

A velocidade angular (ω) é constante):

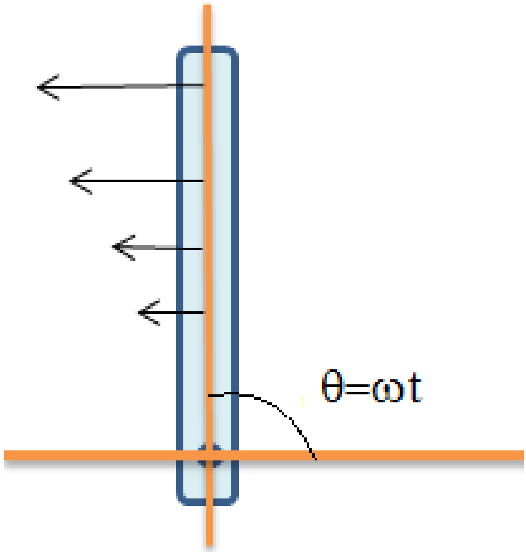
$$\omega = const. \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = w \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega\, t}$$

Movimento uniformemente variado

A aceleração angular (a_θ) é constante:

$$a_\theta = \frac{dw}{dt} = const \Rightarrow \boxed{\omega = w_0 + a_\theta \times t} \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} a_\theta t^2}$$

Num sólido em movimento de rotação, todos os pontos têm a mesma velocidade angular.



A velocidade linear de qualquer ponto é proporcional à sua distância em relação ao eixo de rotação.
<u>Deste modo, num determinado instante, conhecendo a velocidade de um ponto do sólido é possível conhecer a velocidade de todos os outros pontos, se for conhecido o eixo de rotação</u>.

Energia cinética do movimento de rotação:

$$\omega_i$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m r_i^{\,2} \omega_i^2 = \frac{1}{2} \omega_i^{\,2} \sum_{i=1}^{n} m r_i^{\,2}$$

ω_i é constante porque todos os pontos do sólido têm a mesma velocidade angular e, portanto, pode passar para fora do somatório

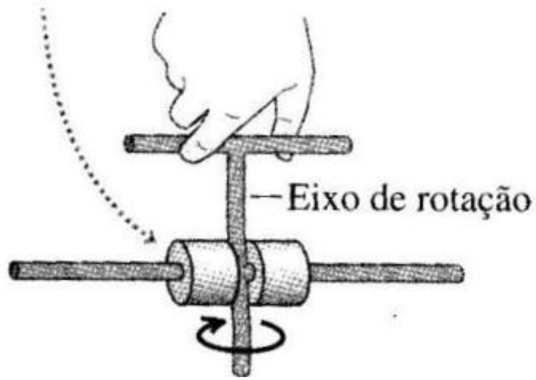
$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m r_i^{\,2}}$$

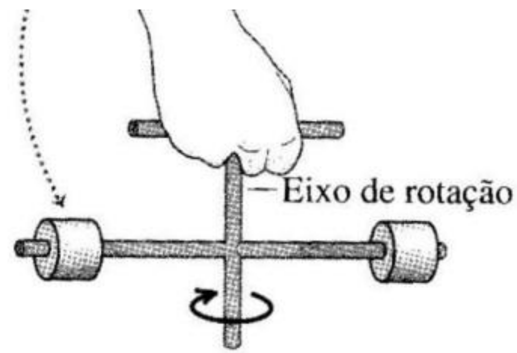
é o **momento de inércia** em relação ao eixo de rotação, e depende só das características do sólido

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Nota: Como o sólido é um sistema material contínuo a soma dos momentos de inércia de cada ponto é uma soma contínua que se faz utilizando o integral estendido ao volume em vez do somatório, e a massa específica em vez da massa dos pontos

O momento de inércia é tanto maior quanto mais as massas estão afastadas do eixo de rotação. O seu valor encontra-se tabelado.

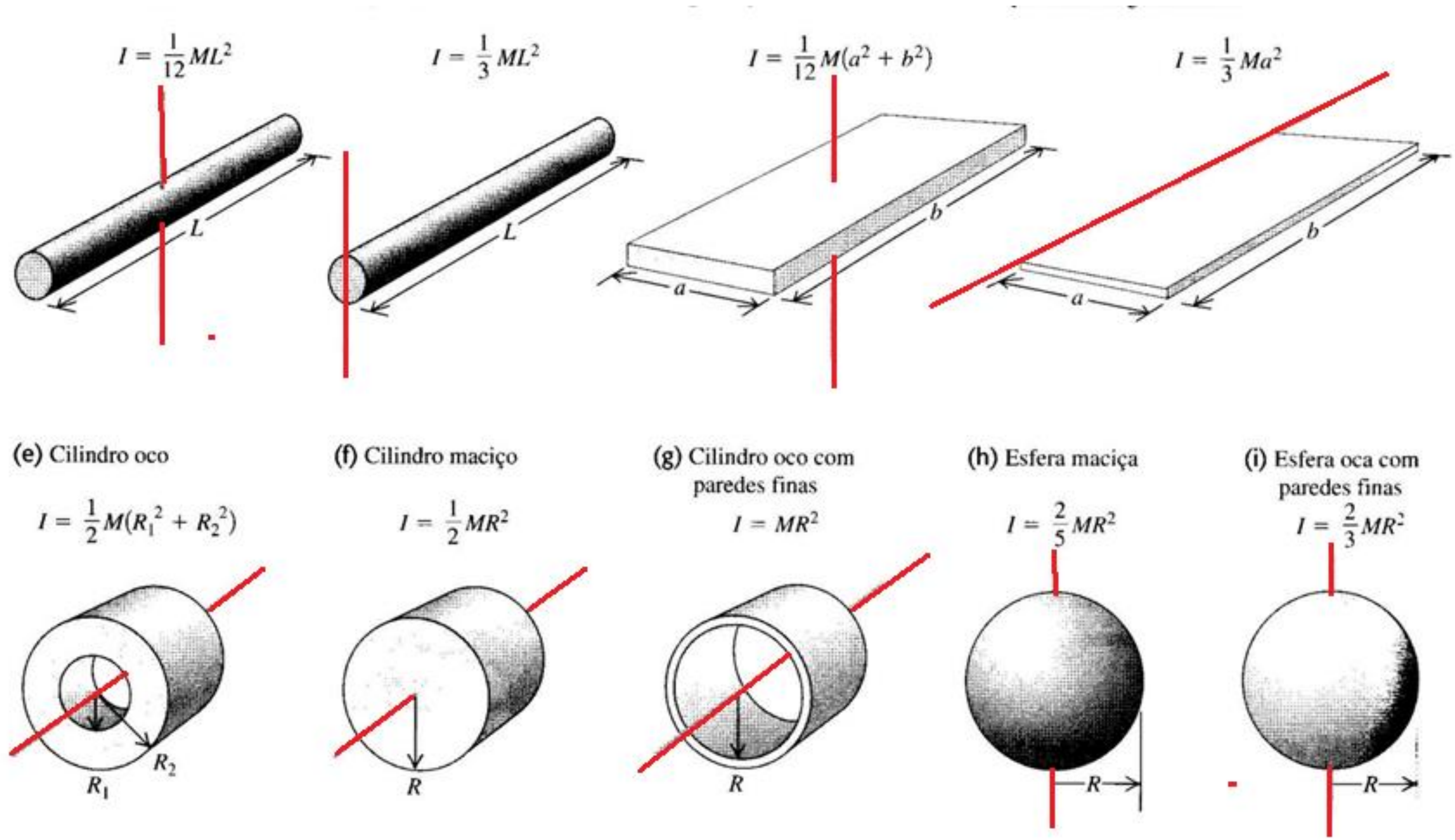




É mais fácil rodar o eixo da figura da esquerda porque o corpo tem menor momento de inércia, e portanto energia cinética menor para a mesma velocidade angular.

Nota: Pelo teorema do trabalho energia, a energia cinética de um corpo num dado instante, é igual ao trabalho necessário para levar o corpo desde o repouso até à velocidade que ele tem nesse instante.

Momentos de inércia de vários sólidos relativamente aos eixos indicados na figura



TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

$$\boxed{I_E = I_G + M\Delta^2}$$

O momento de inércia em relação a um eixo é igual ao momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa mais o momento de inércia, em relação a esse eixo, das massa suposta concentrada no centro de massa

Quando a rotação se faz em torno de um eixo que é paralelo ao eixo para o qual as tabelas fornecem os valores de I, o teorema anterior aplica-se diretamente quando um dos eixos passam pelo centro de massa.
Quando nenhum dos eixos paralelos passa pelo centro de massa é necessário aplicar o teorema duas vezes:

$$I_G = I_{E1} - M\Delta_1^{\ 2}$$

$$I_{E2} = I_G + M\Delta_2^{\ 2}$$

Dinâmica do movimento de rotação

Quais os aspetos de uma força capazes de alterar o movimento de rotação de um corpo?

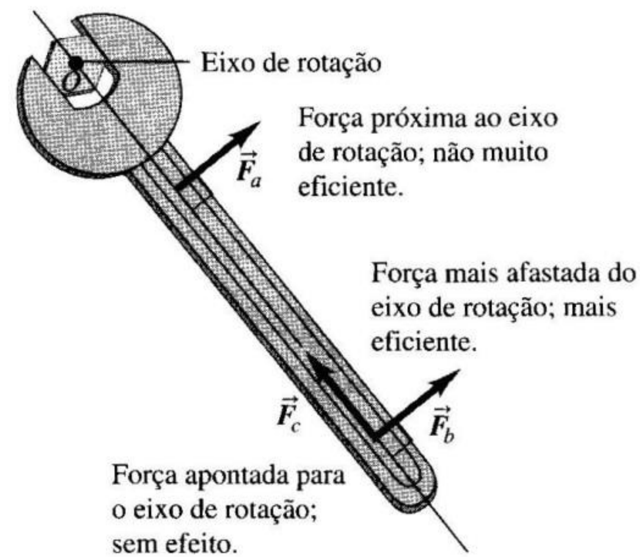


Figura 10.1 Qual das três forças indicadas é mais eficiente para xar a porca presa firmemente?

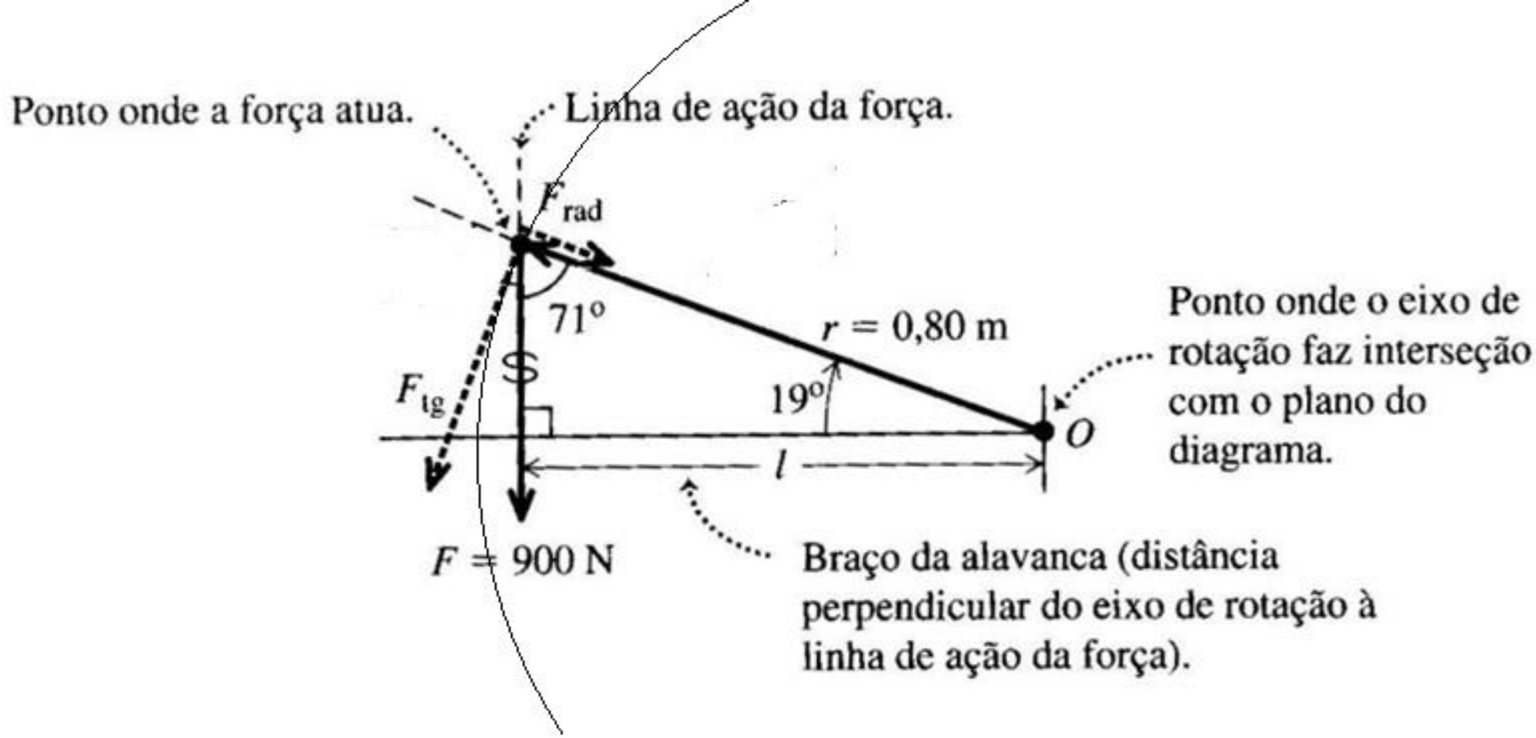
O que caracteriza a influência de uma força em relação ao movimento de rotação é o **momento da força em relação ao eixo de rotação**

O momento de uma força em relação a um eixo é um vetor cujo módulo é diretamente proporcional ao módulo da força e à distância da força ao eixo

$$|\vec{\tau}_E| = |\vec{F}| \times b$$

Atribui-se o sinal "+" quando a rotação provocada pela força se dá no sentido contrário ao da rotação dos ponteiros de um relógio. Quando se dá no sentido dos ponteiros do relógio atribui-se o sinal "-".
À distância entre a linha de ação da força e o eixo chama-se BRAÇO DO MOMENTO

A este momento também se chama **BINÁRIO** (Torque em português do Brasil)



$$|\vec{\tau}_E| = F \times l = F \times r \cos 19^{o} = 680{,}8N$$

$$F_{tg} = F \cos 19^{o}$$

$$|\vec{\tau}_E| = F_{tg} \times r = F \cos 19^{o} \times r = 680{,}8N$$

A expressão anterior mostra que se pode calcular o módulo do momento da força (binário) multiplicando o módulo da força pela distância da sua linha de ação ao eixo de rotação ou multiplicando a componente tangencial da força pelo raio.

Relação entre o binário e a aceleração angular

$$F_{1,tg} = m_1 a_{1,tg} \qquad (10.4)$$

A 2ª lei de Newton permite escrever para o ponto P1 representado na figura

$$F_{1,tg} = m_1 \; a_{1,tg}$$

Multiplicando ambos os membros por r_1

$$F_{1,tg} r_1 = \tau_{1,E} = m_1 r_1 \; a_{1,tg}$$

Atendendo a que $a_{1,tg} = r_1 a_\theta$

$$\tau_{1,E} = m_1 r_1 \times r_1 a_\theta = m_1 r_1^2 a_\theta$$

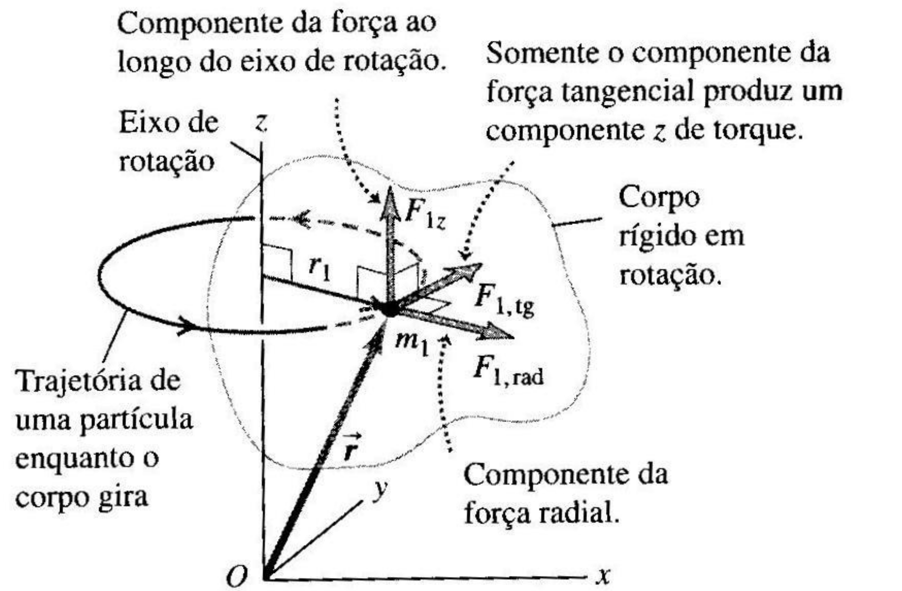


Figura 10.6 Enquanto um corpo rígido gira em torno do eixo z, uma força resultante $\vec{F}_1$ atua sobre uma partícula do corpo. Somente o componente da força $F_{1,tg}$ pode afetar a rotação, porque somente ele exerce um torque em torno de O com um componente z (ao longo do eixo de rotação).

Generalizando para todos os pontos do sólido e considerando que todos os pontos têm a mesma aceleração angular

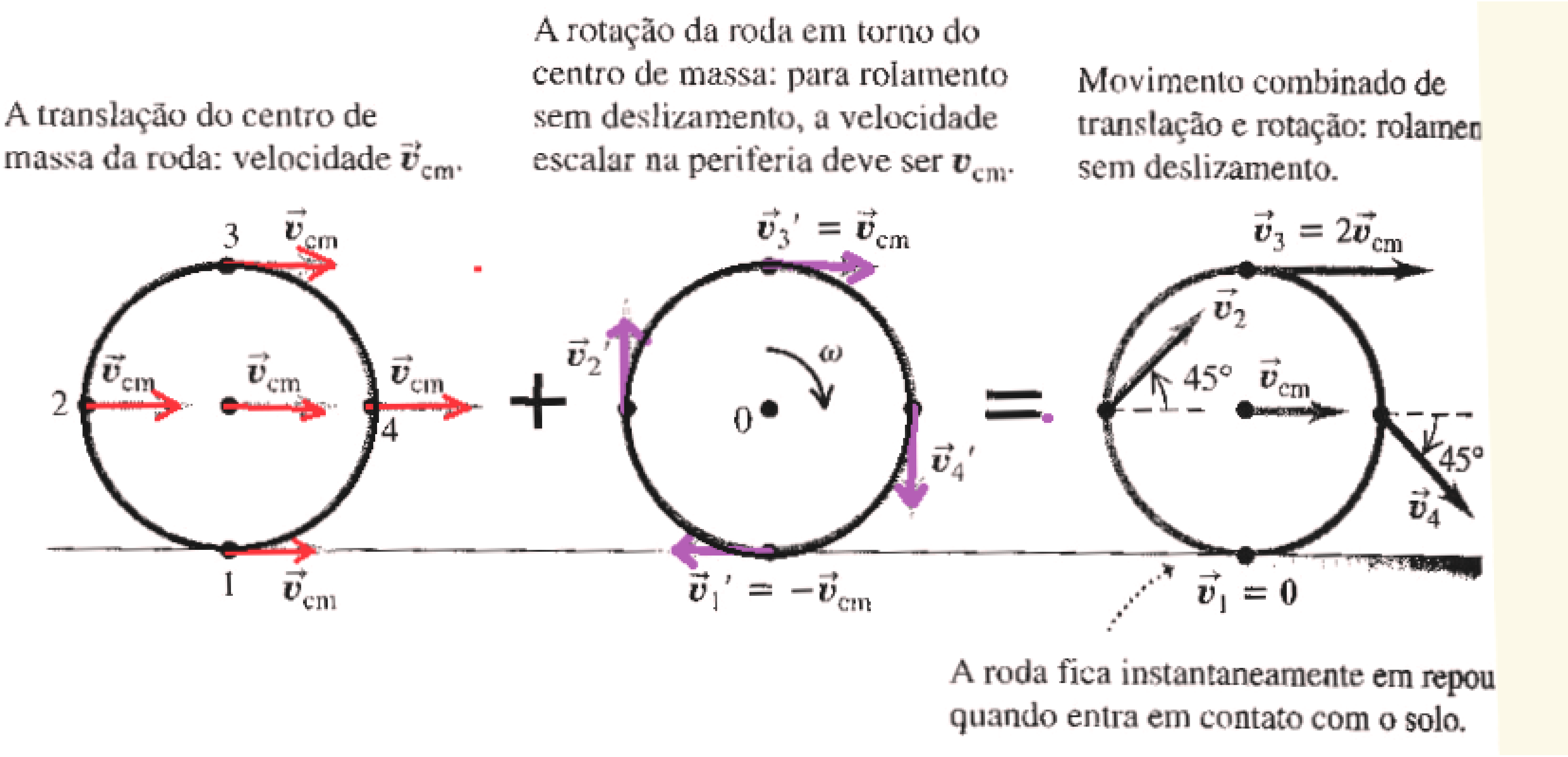
$$\sum \tau_{i,E} = \sum \left(m_i r_i^2 a_\theta \right) = \left(\sum m_i r_i^2 \right) a_\theta$$

$$\boxed{\tau_E = I_E a_\theta}$$

A aceleração angular de um corpo é proporcional ao momento (binário) responsável pelo seu movimento de rotação . O fator de proporcionalidade é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação.

Momento mais geral de um sólido

O movimento mais geral de um sólido pode sempre ser decomposto num movimento de translação do seu centro de massa, considerando que nele está localizada toda massa do corpo, e um movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa.



Condições de equilíbrio de um corpo rígido.

Há duas condições necessárias e suficientes para o equilíbrio do corpo rígido;

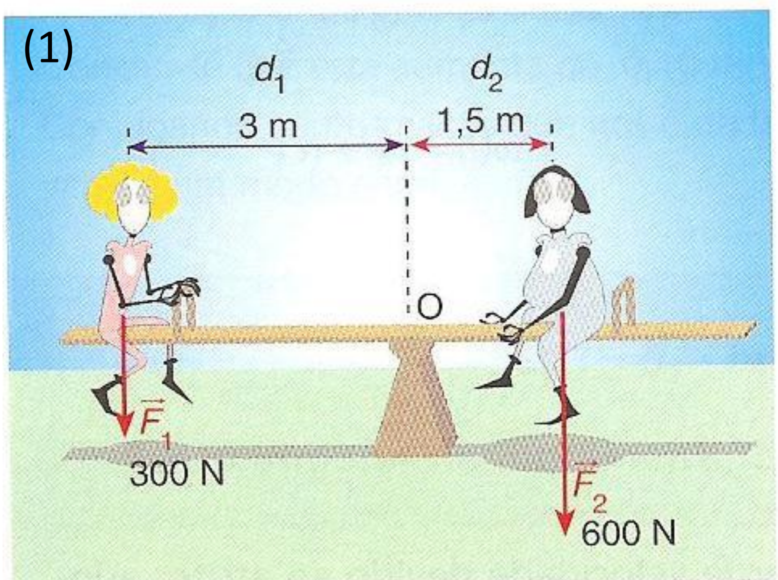
- Anulamento da resultante das forças exteriores (EQUILÍBRIO DE TRANSLAÇÃO)
- Anulamento do momento resultante dos momentos das forças exteriores – EQUILÍBRIO DE ROTAÇÃO.

$$\sum F_i = 0$$

Garante o equilíbrio do centro de massa se inicialmente em repouso

$$\sum \tau_{i,E} = 0$$

Garante o equilíbrio de rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa



1.228

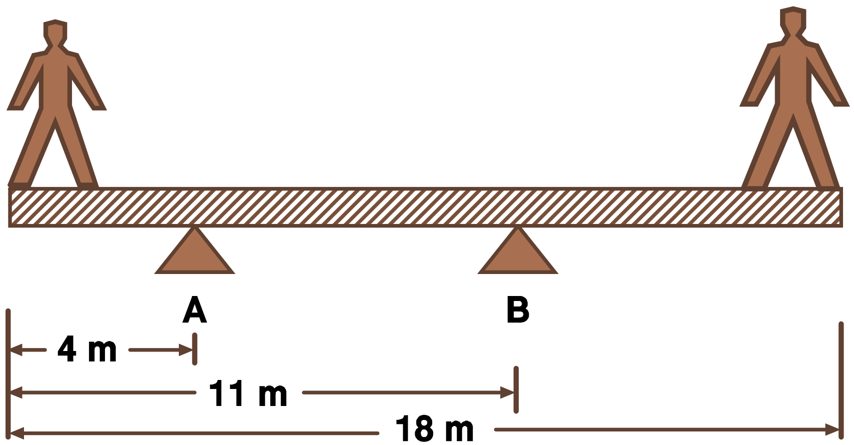
Se os momentos das forças exercidas pelos dois meninos no baloiço se equilibrarem, o sistema mantém o seu estado de repouso.

$$-600 \times 1.5 + 300 \times 3 = 0$$

Para que o baloiço esteja em equilíbrio é ainda necessário que a resultantes das forças exteriores seja nula, pelo que a reação do apoio em O será igual a 900 N, orientada na vertical, de baixo para cima.

F2= 600 N; F1=300N; R=-900 N

Exemplo: Equilíbrio da barra (corpo rígido)

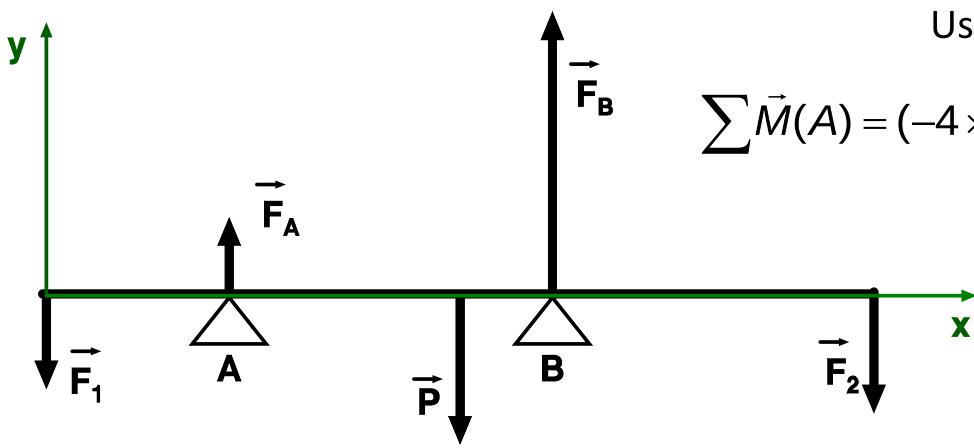


1ª condição: $\sum \vec{F}_i = 0$

$$(F_A + F_B - 400 - 600 - 500)\vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$F_A + F_B = 1500 \text{ N}$$

2ª condição: $\sum \vec{M}_{Fi} = 0$



F1 = 400 N

P = 600 N

F2 = 500 N

Usando o ponto A para centro dos momentos

$$\sum \vec{M}(A) = (-4\times(-400))\vec{e}_3 + (0\times F_A)\vec{e}_3 + (5\times(-600))\vec{e}_3 + $$
$$+ (7\times F_B)\vec{e}_3 + (14\times(-500))\vec{e}_3 = 0$$

$$\sum \vec{\mathbf{M}} = (-8400 + 7F_B)\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$F_B = 8400/7 = 1200 \text{ N}$$

$$F_A = 1500 - 1200 = 300 \text{ N}$$