

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Álgebra Linear (1ª Chamada)

13 de Janeiro de 2015 - Duração: 2 h

[4.5v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix} = [u|v|w]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

- a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- b) Indique, justificando, um valor de α para o qual:
 - i) b pertence a $\mathcal{C}(A)$ qualquer que seja β ;
 - ii) $\{u, v, w\}$ seja linearmente independente;
 - iii) A distância entre u e v seja 1.
 - iv) $\det(A^{-1}) = -1$;
 - v) 1 seja valor próprio de A .

[7v] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- a) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.
- b) Defina e interprete geometricamente $\mathcal{N}(A)$.
- c) Determine os valores próprios de A .
- d) Calcule um vetor próprio de A .
- e) Mostre que $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{C}(A)$.

[4.5v] 3. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_2 = 2x_4\}$ e $b = (1, 4, 3, 2)$.

- a) Determine uma base ortogonal para V .
- b) Determine o vetor de V à menor distância de b .
- c) Indique um vetor $u \in \mathbb{R}^4$, $u \neq b$, tal que $\text{proj}_V(u) = \text{proj}_V(b)$.

[4v] 4. Um agricultor pretende produzir milho, soja e trigo numa área de 180 hectares, não podendo a área destinada à produção de trigo exceder a área destinada aos restantes produtos. As operações agrícolas necessárias à produção destas culturas (lavar e gradar a terra, semear e colher), bem como as horas de trabalho necessárias e o custo dispendido nestas operações encontram-se na tabela que segue.

Operações necessárias	Lavar e gradar	Semear e colher		
		milho	soja	trigo
Trabalho (h/ha)	4	6	2	4
Custo (euros/ha)	50	400	150	250

O total de horas de trabalho disponíveis é 1200 e a receita obtida por cada hectare de milho, soja e trigo é 850, 700 e 600 euros, respetivamente. O agricultor pretende determinar qual a área que deve destinar a cada cultura de forma a maximizar o lucro (receita – despesa).

- a) Formule o problema em termos de PL, atribuindo significado às variáveis.
- b) Caso o agricultor decida não produzir milho, determine um plano óptimo de produção.