INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Álgebra Linear (2ª Chamada)

27 de Janeiro de 2015 - Duração: 2 h

[3v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Para $\alpha = 2$ calcule A^{-1}.

[3v] **2.** Sejam $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, -1, 1)$ e $w = (-1, 2, 1)$.

a) Calcule o ângulo entre u e v.

b) Determine um vetor unitário ortogonal a u e v.

c) Mostre que $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle$.

[7.5v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

b) Defina e interprete geometricamente $\mathcal{C}^{\perp}(A)$.

c) Calcule a projeção de b sobre $\mathcal{C}^{\perp}(A)$.

d) Determine a distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

e) Calcule a matriz de projeção sobre $\mathcal{C}(A)$.

f) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

g) Indique dois vetores próprios de A linearmente independentes.

[2.5v] **4.** Seja uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 = A$ e sejam x_1 e x_2 duas soluções do sistema $Ax = b$.

a) Mostre que 0 e 1 são os únicos valores próprios possíveis de A.

b) Mostre que $x_1 - Ax_2$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

[4v] **5.** Considere o seguinte problema de PL nas variáveis x_1, x_2, x_3,

$$\begin{array}{rl} & \min 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_3 \leq 3 \\ & 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma standard.

b) Mostre que $(1, 0, 3)$ é um vértice da região admissível do problema.

c) Suponha que a restrição $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ é substituída por $x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Será que $(1, 0, 3)$ é uma solução ótima do problema? Justifique.