Álgebra Linear

Soluções de alguns exercícios

Instituto Superior de Agronomia

- 2012 -

Conteúdo

Capítulo 1

Cálculo matricial

1.1 Sistemas de equações lineares

Exercícios 1

1. Para que valores de b o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 + 6x_2 & = & b \end{array}\right.$$

   é impossível?

   Solução: $b \neq 8$.

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

   de forma a obter um sistema impossível.

   Solução: Por exemplo, $3x_1 + 2x_3 = 5$.

EXERCÍCIOS 2 Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

1. $\begin{cases} x+2y+3z &= 0 \\ x+\ \ y+\ \ z &= 10 \\ x \qquad\ \ +2z &= 0 \end{cases}$

Solução: $x_1 = \frac{40}{3}, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = -\frac{20}{3}$.

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 &= 6 \\ 2x_1+5x_2+\ \ x_3 &= 9 \\ x_1+4x_2-6x_3 &= 1 \end{cases}$

Solução: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1$.

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4 &= 4 \\ 2x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 11 \\ x_1+\ \ x_2+2x_3+3x_4 &= 1 \end{cases}$

Solução: x_4 é uma variável livre e $x_1 = 1-5x_4, x_2 = 2+2x_4, x_3 = -1$.

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4-\ \ x_5 &= 2 \\ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5 &= -1 \\ -x_1-2x_2-\ \ x_3+2x_4+\ \ x_5 &= 0 \end{cases}$

Solução: x_2 e x_5 são variáveis livres e $x_1 = 13-2x_2+8x_5, x_3 = -5-3x_5, x_4 = 4+2x_5$

5. $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4 &= 1 \\ 2x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 9 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4 &= -6 \\ x_1+\ \ x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 7 \end{cases}.$

Solução: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = 3$.

Exercícios 3

1. Discuta, para todos os valores dos parâmetros, cada um dos seguintes sistemas.

a) $\begin{cases} x \quad - \quad z = 1 \\ y + \ az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 2a & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \end{array}\right]$$

Se $a = 1$ o sistema é impossível. Caso contrário, i.e. se $a \neq 1$, o sistema é determinado.

b) $\begin{cases} x_1 + \ x_2 - \ x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{cases}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \gamma \\ 1 & \gamma & \gamma & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma) \end{array}\right]$$

O sistema é determinado para qualquer valor de γ.

c) $\begin{cases} ax \quad + 2z = 2 \\ x + 2y \quad = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} a & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 4 & -b & -2 \\ 0 & 0 & 2-\frac{ab}{2} & 2-2a \end{array}\right]$$

Se $ab = 4$ e $a = 1$ o sistema é indeterminado. Se $ab = 4$ e $a \neq 1$ o sistema é impossível. Se $ab \neq 4$ então o sistema é determinado.

d) $\begin{cases} 2x + 4y + bz = 2 \\ x + (d+2)y = 1 \\ x + 2y + bz = 1 \\ x + 2y = c \end{cases}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$.

Solução:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & b & 2 \\ 1 & d+2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & b & 2 \\ 0 & d & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-1 \end{array}\right]$$

Se $d = 0$ então

se $c \neq 1$ o sistema é impossível;

se $c = 1$ então

se $b = 0$ é possível e indeterminado com duas variáveis livres;

se $b \neq 0$ é possível e indeterminado com uma variável livre.

Se $d \neq 0$ então

se $c \neq 1$ o sistema é impossível;

se $c = 1$ então

se $b = 0$ é possível e indeterminado com uma variável livre;

se $b \neq 0$ é possível e determinado.

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   Solução: Falso, pois S pode ser impossível. Exemplo: considerar dois planos paralelos e não coincidentes em $\mathbb{R}^3$.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $n-m$ variáveis livres.

   Solução: Falso pois S pode ter mais do que $n - m$ variáveis livres. Exemplo: considerar dois planos coincidentes em $\mathbb{R}^3$.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   Solução: Falso. Exemplo: considerar três retas em $\mathbb{R}^2$ que se intersectam num ponto.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   Solução: Falso pois pode ser indeterminado. Exemplo trivial: considerar três retas coincidentes em $\mathbb{R}^2$.

   c) Se S é possível e $m = n$, então S é determinado.

   Solução: Falso. Exemplo trivial: considerar duas retas coincidentes em $\mathbb{R}^2$.

1.2 Matrizes e vetores

Exercícios 4

1. Discuta e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

a) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema é impossível. Corresponde a quatro retas em $\mathbb{R}^2$ que não se intersectam num mesmo ponto.

b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

Solução:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 8/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 8/5 \end{array}\right]$$

O sistema é possível e determinado. Corresponde a três planos em $\mathbb{R}^3$ que se intersectam num único ponto.

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right].$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]. \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema é possível e indeterminado. Corresponde a três planos em $\mathbb{R}^3$ que se intersectam sobre uma reta.

2. Considere os sistemas de equações lineares cujas correspondentes matrizes ampliadas são

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } \ a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ 0 & 0 & a-1 & b_3+b_1-b_2 \end{array}\right]$$

Se $a \neq 1$ os sistemas são possíveis.

b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

Solução: Se $b_3 + b_1 - b_2 = 0$ os sistemas são possíveis.

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que façam o sistema

c1) impossível, **Solução**: $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 \neq 0$.

c2) indeterminado. **Solução**: $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 = 0$.

3. É correto afirmar que um sistema de equações lineares do tipo $n \times n$ é possível e determinado se e só se a matriz reduzida que se obtem quando se aplica o método de Gauss à matriz dos coeficientes é a matriz identidade? Justifique.

   Solução: Sim. Se a matriz reduzida é a matriz identidade, então o sistema é obviamente possível e determinado. Se a matriz reduzida não é a matriz identidade, então existe pelo menos uma linha nula na matriz reduzida. Nesse caso o sistema só poderá ser impossível ou indeterminado.

4. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

   Solução: O número máximo de pivots da matriz é $\min\{m, n\}$ pois em cada linha há no máximo um pivot e em cada coluna há no máximo um pivot.

   b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

   Solução: O número de pivots é igual ao número de linhas não nulas de E. Portanto o número de pivots é igual à diferença entre m e o número de linhas nulas de E.

1.3 Operações com matrizes

Exercícios 5

1. Para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

calcule, sempre que possível, o valor de cada uma das seguintes expressões.

a) $(5A - A) - (B - 2B)$

Solução: $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$

b) $(2A - B)^\top - C$

Solução: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 18 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

c) $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$

Solução: $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

d) $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$

Solução: Não está definido.

e) $D + D^\top$

Solução: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

f) $D - D^\top$.

Solução: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

Solução: $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -12 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

A solução é $\alpha = -3$ e $\beta = 1/2$.

Exercícios 6

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $Ab + Ib$, $(A+I)b$, $(A + A^\top)2b$ e $b^\top b$.

Solução: $Ab + Ib = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$, $(A+I)b = Ab + Ib = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$,

$$(A+A^T)2b = \begin{bmatrix} 32 \\ -30 \\ 28 \end{bmatrix}, \; b^Tb = 14.$$

b) Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

Solução: $Ax = 3x + b \Leftrightarrow (A - 3I)x = b$. $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \cdots \to$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 \end{array}\right]$. A solução é $x_1 = 3/10$, $x_2 = -6/5$ e $x_3 = 7/5$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o vetor genérico de $\mathbb{R}^2$ $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de x e y, o vetor Av e represente geometricamente v e Av.

Solução: $Av = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$.

b) Qual é a relação entre os vetores v e Av?

Solução: Os vetores v e Av são perpendiculares.

3. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

Solução: Para $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$.

b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

Solução: $(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda Iv = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av = \lambda v$.

c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções e a relação estabelecida na alínea b).

Solução: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O conjunto de soluções é $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = -x_3, x_3 = \forall\}$. O lugar geométrico das soluções é a reta em $\mathbb{R}^3$ com a direção do vetor $(-1, -1, 1)$.

Exercício 7 Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, $AA^\top$, $a^\top a$ e $a\,a^\top$.

Solução: $AB = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -11 & -2 & 9 \end{bmatrix}$, BA não está definida, $BA^\top = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$,

$CC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $AA^\top = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$, $a^\top a = 14$, e $aa^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Exercício 8 Calcule B^3 com $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: $B^3 = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -1 \\ 10 & 8 & -23 \\ 15 & 10 & 10 \end{bmatrix}$.

Exercício 9 Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Solução: Verificar que o produto das duas matrizes é a matriz identidade.

Exercício 10 Prove os resultados da Proposição 1.7.

1. Uma matriz não singular tem uma única inversa.

   Solução: Seja A a matriz não singular e sejam A' e A'' duas inversas de A. Então $AA' - AA'' = I - I = 0 \Rightarrow A(A' - A'') = 0 \Rightarrow A'A(A' - A'') = A'0 \Rightarrow A' - A'' = 0 \Rightarrow A' = A''$.

2. Se A e B são matrizes não singulares da mesma ordem, então AB é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (a inversa do produto é o produto das inversas por ordem inversa).

   Solução: $B^{-1}A^{-1}$ é de facto a inversa de AB pois $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$.

3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, para $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

   Solução: $(A^{-1})^k$ é de facto a inversa de A^k pois $A^k(A^{-1})^k = A...AA^{-1}...A^{-1} = I$.

4. $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$.

Solução: $(A^{-1})^\top$ é de facto a inversa de $A^\top$ pois $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I^\top = I$.

Exercícios 11

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: As respostas são, respetivamente, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$, não é invertível, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1/4 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. A solução é $x = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A + B$ é invertível?

Solução: Não. Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?

Solução: Sim, a inversa é a matriz $CB^{-1}(A^{-1})^3$.

c) Mostre que $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

d) Prove que se $AB = AC$, então $B = C$.

4. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e b e c vetores de $\mathbb{R}^3$.

a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.

Solução: São possíveis e determinados com soluções $A^{-1}b$ e Ac respetivamente.

b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.
Solução: $A^{-1}b = Ac \Leftrightarrow b = A^2c$.

c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

respetivamente. Determine, em termos dos vetores u, v e w, a matriz inversa de A.

Solução: A matrix inversa é $A^{-1} = UB^{-1}$ onde U é uma matrix 3×3 cujas colunas são os vetores u, v e w, e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

   a) A é invertível.

   b) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   c) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

   Solução: A é invertível $\Leftrightarrow$ não existem linhas nulas na matriz em escada que se obtém aplicando o método de Gauss a $A \Leftrightarrow Ax = b$ é possível para qualquer $b \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \operatorname{car}(A) = n \Leftrightarrow$ o sistema $Ax = 0$ é determinado.

6. Calcule $A^2 + 3bb^\top$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Solução: $\begin{bmatrix} 13 & -6 & 7 \\ -5 & 7 & 22 \\ 7 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3+\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

   Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha & 3+\beta \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha & 4+\beta \\ 0 & 0 & \alpha+2 & -4-\alpha-2\beta \end{array}\right]$$

   Se $\alpha = -2$ e $\beta = -1$ o sistema é indeterminado. Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq -1$ o sistema é impossível. Se $\alpha \neq -2$ então o sistema é determinado.

b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

Solução: $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1$.

c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

Solução: Por exemplo $\alpha = 0$, porque a matriz em escada resultante de aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A não tem linhas de zeros.

8. Seja $Ax = b$ um sistema que admite as soluções não nulas u e v. Em que condições o vetor $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

Solução: Para $b = 0$. $A(u + v) = b \Leftrightarrow Au + Av = b \Leftrightarrow b + b = b \Leftrightarrow b = 0$.

Capítulo 2

Espaços vetoriais

Exercícios 12

1. Quais dos seguintes conjuntos são fechados para a adição e multiplicação escalar?

   a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

   b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$.

   c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 1\}$.

   d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$.

   e) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$.

2. Quais são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ fechados para a adição e multiplicação escalar?

Exercícios 13 Identifique geometricamente $\mathcal{N}(A)$, com $A = [a \;\; b]$, $A = [a \;\; b \;\; c]$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

Exercícios 14

1. Determine os espaços nulo e das colunas das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Verifique se o vetor $(-3, 12, 12)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (-1, 3, 1)$, $v_2 = (0, 2, 4), v_3 = (1, 0, 2)$.

3. Verifique se o vetor $(3, 1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

4. Verifique se o vetor $(0, 1, 4)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u = (3, -5), \quad V = \{(1, 2), (-2, 6)\}$;

   b) $u = (1, 1, 1), \quad V = \{(1, 0, 1), (0, 3, 5)\}$;

   c) $u = (2, -2, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}), \quad V = \{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 3, 1, 1)\}$;

   d) $u = (0, 1, 0, 1, 0), \quad V = \{(1, 2, 2, 1, 1), (\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3})\}$.

2.1 Independência linear

Exercício 15 Decida sobre a independência linear de $U = \{(1, 2, -1), (0, 2, 1), (2, -1, 3)\}$ e $U' = \{(1, 2, -1), (0, 2, 1), (2, -1, 3), (4, 5, -2)\}$.

Exercícios 16

1. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes?

    a) $\{(3, 1), (4, -2)\}$

    b) $\{(3, 1), (4, -2), (7, 2)\}$

    c) $\{(-1, 2, 0, 2), (5, 0, 1, 1), (8, -6, 1, -5)\}$

    d) $\{(0, -3, 1), (2, 4, 1), (-2, 8, 5)\}$.

2. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1, 0, 3, 1), (-1, 1, 0, 1), (2, 3, 0, 0), (1, 1, 6, 3)\}$ é linearmente dependente.
   Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

3. Discuta em função dos parâmetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

    a) $\{(1, -2), (\alpha, -1)\}$

    b) $\{(\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (1, 1, \alpha)\}$

    c) $\{0, \gamma, -\beta), (-\gamma, 0, \alpha), (\beta, -\alpha, 0)\}$.

4. Sabendo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independente, decida sobre a independência linear do conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$.

2.2 Base

Exercícios 17 Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. $\mathbb{R}^3$.

2. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$.

3. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0$.

Exercícios 18

1. Determine uma base para o espaço nulo e para o espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 1, 1)$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

   Verifique que $v = (0, 3, 3, -1) \in \mathcal{N}(A)$ e indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que inclua v.

2.3 Dimensão e característica

Exercício 19

1. Calcule $\dim S$, com $S =< \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (3, -1, 2)\} >$ e $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço $S =< \{(1, \alpha, -1), (-1, 1, 1), (\alpha, 0, -1)\} >$ é 3?

Exercícios 20

1. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1, 0, 2, 3), (7, 4, -2, 1), (5, 2, 4, 1), (3, 2, 0, 1)\}$

   b) $\{(1, 3, 2, -1), (2, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 0), (5, 6, 2, 0)\}$

2. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

   a) Mostre que V é subespaço vetorial.

   b) Indique uma base de V.

3. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1, -1), (3, 0)\}$

   b) $U = \{(1, 1), (0, 2), (2, 3)\}$

   c) $W = \{(1, 1), (0, 8)\}$.

4. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) $V = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 0, 2)\}$

   b) $U = \{(1, 0, 1), (2, 4, 8)\}$

   c) $W = \{(3, 0, 1), (1, 1, 1), (4, 1, 2)\}$.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha, 6, -1)$, $v_2 = (1, \alpha, -1)$ e $v_3 = (2, \alpha, -3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1, 1, 2)$ em relação à base correspondente.

6. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{N}(\mathcal{A}^{\mathcal{T}})$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

7. Responda às alíneas seguintes utilizando a informação, respeitante a uma matriz A do tipo $m \times n$, fornecida na tabela seguinte.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2
car$(A\|b)$	3	3	1	2	3	0	2

a) Classifique os sistemas lineares $Ax = b$.

b) Indique o número de variáveis livres dos sistemas $Ax = 0$.

c) Qual é a dimensão de $\mathcal{N}(\mathcal{A})$?

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

9. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1, 0, 5), (1, 1, 1), (0, 3, 1), (-3, 0, -2)\}.$$

a) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

c) Escreva o vetor $(-2, 3, 4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

10. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão do espaço nulo da matriz A.

b) Mostre que o espaço nulo de A é gerado pelos vetores $(1, 2, 0, -1)$ e $(-1, 3, 1, -1)$.

c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

11. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique uma base de S.

c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

12. Considere o sistema $Ax = b$ em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto das soluções do sistema $Ax = b$.

b) Utilizando a resposta da alínea anterior, indique o espaço nulo de A. Interprete geometricamente o resultado obtido.

13. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base $\mathcal{N}(\mathcal{A})$.

b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$.

d) Interprete geometricamente os resultados obtidos nas alíneas anteriores e conclua que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.

Capítulo 3

Norma, produto interno, ângulo, ortogonalidade e projeção

Exercícios 21

1. Calcule as normas dos seguintes vetores.

   a) $(1, -1, 2)$ **Solução**: $\sqrt{6}$

   b) $(-1, 0, \pi, 0)$ **Solução**: $\sqrt{1+\pi^2}$

   c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$. **Solução**: 6

2. Calcule as distância entre os seguintes pares de vetores.

   a) $(1, -1, 2)$ e $(0, -1, 0)$ **Solução**: $\sqrt{5}$

   b) $(-1, 0, 2, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$ **Solução**: 3

   c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$ e $(-1, 2, 0, 1, 1, 0)$. **Solução**: $\sqrt{51}$

3. Determine todos os vetores unitários que fazem ângulos de $\frac{\pi}{3}$ com cada um dos seguintes pares de vetores.

   a) $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ **Solução**: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

   b) $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. **Solução**: $(\frac{\sqrt{2}+2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{4})$ e $(\frac{\sqrt{2}-2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{4})$

4. Identifique um vetor não nulo que seja ortogonal a ambos os vetores de cada um dos seguintes pares.

   a) $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, -1)$ **Solução**: $(-1, 2, 1)$

   b) $(1, -1, 2)$ e $(2, 1, -1)$. **Solução**: $(-1, 5, 3)$

5. Sejam x e y vetores de $\mathbb{R}^m$. Prove os seguintes resultados.

   a) $\|x + y\| = \|x - y\|$ sse x e y são ortogonais.

   b) Os vetores $x - y$ e $x + y$ são ortogonais sse $\|x\| = \|y\|$.

   c) Se x e y são ortogonais, então $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

   d) Se x e y são unitários e ortogonais, então $\|x - y\| = \sqrt{2}$.

6. Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *ortogonal* se as colunas são unitárias e quaisquer duas colunas distintas são ortogonais. Prove os seguintes resultados.

   a) A matriz A é ortogonal sse $A^{-1} = A^\top$.

   b) Se a matriz A é ortogonal, então é simétrica sse $A^2 = I$.

3.1 Ortogonalidade

EXERCÍCIO 22 Mostre que o vetor $(2, 1, 1, -1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 23

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Verifique que o vetor $(4, 2, -1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual é o complemento ortogonal de $\mathcal{C}(A)$?

3. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 0)\}$ e por $\{(1, 1, 2, -1)\}$.

4. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   a) $< \{(1, 1)\} >$ b) $< \{(1, 1, 3), (1, 1, 2)\} >$ c) $< \{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 4, 5)\} >$

   d) $< \{(2, 2, 1, 0), (2, 4, 0, 1), (4, -2, 1, -1)\} >$.

5. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1, 1, 3), (1, 1, 2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

3.2 Projeção ortogonal

EXERCÍCIO 24 Determine a projeção do vetor $(4, -1, 1)$ sobre $V =< \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\} >$.

Exercícios 25

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.

2. Determine a projeção do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $< (1,-1,3) >$.

3. Identifique o vetor do subespaço vetorial $< \{(1,0,1),(1,1,0)\} >$ a menor distância do vetor $(1,2,3)$.

4. Considere o vetor $b = (1,1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

$$V =< \{(1,0,1),(0,1,1)\} > \quad \text{e} \quad U = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}.$$

   a) Determine a projeção ortogonal de b sobre o vetor (1,0,1).

   b) Determine as projeções ortogonais de b sobre V, U, $V^\perp$ e $U^\perp$.

   c) Calcule as distâncias de b a V e a U.

5. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.

6. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$

   e o vetor $v = (2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.

7. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.

8. Considere o vetor $w = (1,-2,2,2)$ e o subespaço $V =< \{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\} >$.

   a) Defina a matriz de projeção sobre o subespaço V.

   b) Determine a projeção de w sobre V.

9. Verifique que $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y,\ z = t\}$.

10. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$, com característica n e $P = A\,(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathcal{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

    a) $P^\top = P$.

    b) $P^2 = P$.

11. Considere os vetores $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.

    a) Calcule o ângulo definido pelos vetores u e v.

    b) Determine a projeção ortogonal do vetor b sobre o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores u e v.

12. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

    a) Mostre que o conjunto $\{a, b, c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

    b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear dos vetores a, b e c. Interprete geometricamente os coeficientes da combinação linear.

13. a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.

    b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

14. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ :\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

    a) Utilizando o processo de ortogona1ização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.

b) Seja $b = (2, 1, 0, 1)$. Calcule a projeção de b sobre o subespaço V.

Capítulo 4

Introdução à programação linear

Exercício 26 Considere o seguinte problema de problema de programação linear.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 & & \\
\text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

b) Indique uma solução ótima, o valor da função objetivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

Solução: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ é a única solução ótima. O valor da função objetivo neste ponto é 17. As restrições saturadas são a primeira e a segunda.

c) Indique o maior intervalo de variação do membro direito da terceira restrição que mantém ótima a solução que refiriu na alínea b).

Solução: $[3, +\infty[$.

d) Dê exemplo de uma outra função objetivo relativamente à qual se mantém ótima a solução que indicou na alínea b).

Solução: $z = x_1 + 3x_2$.

EXERCÍCIOS 27

1. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque de 100 ha destinando-o a área florestal, parque de campismo e reserva de caça. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 Euros e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (Euros)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 60 e 80 Euros por cada hectare de terreno destinado a área florestal, parque de campismo e reserva de caça, respetivamente. Pretende determinar-se o número de hectares a destinar a cada tipo de ocupação de solo de forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e indique uma solução básica admissível.

c) Determine uma solução que proporcione o maior lucro quando 40 ha do terreno são destinados a reserva de caça.

2. Formule e resolva o seguinte problema.

   Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (Euros/Kg)	3.5	5.0	

   Sabendo que todo o café será vendido, pretende determinar-se a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta.

   Solução: Sejam x_1 e x_2 as variáveis que indicam a quantidade, em Kgs, de café de lote A e de lote B, respetivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma

$$\begin{array}{lrl} \max & 3.5x_1 + 5.0x_2 & \\ \text{s.a} & 0.25x_1 + 0.25x_2 & \leq 100 \\ & 0.75x_1 + 0.25x_2 & \leq 150 \\ & 0.5x_2 & \leq 175 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

   Devem ser produzidos 50 Kg de café do lote A e 350 Kg de café do lote B, que dão uma receita bruta máxima de 1925.0 Euros.

3. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respetivamente. Para este efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores (em milhares de quilos) indicados na tabela seguinte.

	Aumentar 1 m altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respetivamente, 10 e 7 mil euros. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objetivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Determine a solução ótima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

4. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 Euros. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 Euros. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende

determinar-se a quantidade a transportar de cada produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

5. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de A, B, C e D requer para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, respetivamente. São cobrados 200, 300, 400 e 700 Euros, respetivamente, por cada tonelada de A, B, C e D.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

Solução:
$$\begin{array}{ll} \max & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} & a + 4b + c + 2d \leq 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d \leq 150 \\ & a \geq 2 \\ & a, b, c, d \geq 0 \end{array}$$

em que a, b, c e d são as quantidades, em toneladas, dos materiais dos tipos A, B, C e D, respetivamente, a armazenar.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

Solução: $\begin{array}{ll} \max & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} & a + 4b + c + 2d + t = 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d + e = 150 \\ & a - a' = 2 \\ & a, b, c, d, t, e, a' \geq 0 \end{array}$

As variáveis de folga t, e e a' são os valores das diferenças entre o tempo de armazenagem, a área total ocupada e as toneladas de material do tipo A definidos por cada solução admissível e os membros direitos das restrições correspondentes.

c) Mostre que é admissível a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, mas não corresponde a um vértice da região admissível.

Solução: Para $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2$ tem-se

$$\begin{array}{rl} a + 4b + c + 2d = 9 & \leq 10 \\ 15a + 16b + 20c + 30d = 150 & \leq 150 \\ a = 2 & \geq 2 \\ a, b, c, d & \geq 0 \end{array}$$

que mostra que $(2, 0, 3, 2)$ é solução admissível. Na forma *standard* a solução correspondente é $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2, t = 1, e = 0, a' = 0$, com mais do que 3 variáveis não nulas, o que permite concluir que $(2, 0, 3, 2)$ não é vértice.

6. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exatamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível.

7. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12 e 8 euros e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respetivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

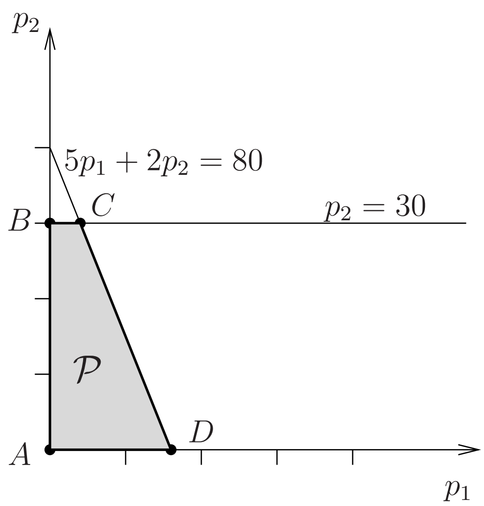
a) Descreva o problema de forma linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

Solução:
$$\begin{array}{lrl} \max & 12p_1 + 8p_2 & \\ \text{s.a} & 5p_1 + 2p_2 & \leq 80 \\ & p_2 & \leq 30 \\ & p_1, p_2 & \geq 0 \end{array}$$

em que p_1 e p_2 são, respetivamente, as toneladas de P_1 e P_2 a produzir semanalmente.

b) Represente graficamente a região admissível.

Solução: A figura representa a região admissível $\mathcal{P}$. Os vértices são $A = (0, 0)$, $B = (0, 30)$, $C = (4, 30)$, $D = (16, 0)$.



c) Identifique uma solução ótima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: C, que representa a opção de produzir semanalmente 4 toneladas de P_1 e 30 de P_2, é solução ótima. A solução básica admissível correspondente é $(4, 30, 0, 0)$.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter ótima a solução determinada na alínea anterior.

Solução: Entre 0 e 20 euros.

8. Considere o problema de programação linear seguinte.

$$\text{maximizar} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4$$

$$\text{com } x \in \mathcal{P} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & \geq & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \quad & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

b) Verifique que $v = (2,3,0,0)$ é vértice de $\mathcal{P}$ e indique o valor da função objetivo em v.

9. Considere o problema

$$\begin{array}{rrcr} \text{maximizar} & 20x_1 + 30x_2 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ & x_1 \qquad & \leq & 60 \\ & x_2 & \leq & 50 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Represente graficamente a região admissível e as soluções admissíveis a que correspondem valores da função objetivo iguais a 600.

b) Indique uma solução ótima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ é a única solução ótima. A solução básica admissível correspondente é (60,30,0,0,20).

c) Se os coeficientes da função objetivo coincidissem e fossem positivos, quais seriam as soluções ótimas?

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ continuaria a ser a única solução ótima.

Capítulo 5

Determinantes

Exercícios 28 Prove os seguintes resultados.

1. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

2. Uma matriz com uma linha ou uma coluna de zeros tem determinante igual a zero.

3. É nulo o determinante de uma matriz com linhas proporcionais.

Exercícios 29

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes indicando se é invertível.

   a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ **Solução**: 1. Matriz invertível.

   b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **Solução**: 18. Matriz invertível.

   c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **Solução**: -9. Matriz invertível.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **Solução**: 11. Matriz invertível.

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ **Solução**: 65. Matriz invertível.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **Solução**: 42. Matriz invertível.

2. Utilizando a noção de produto externo, indique

   a) um vetor ortogonal aos vetores $u = (1, 1, 2)$ e $v = (1, 0, 1)$,

      Solução: $(1, 1, -1)$

   b) uma equação cartesiana do plano definido por

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\,(1, 1, 2) + \mu\,(1, 0, 1)\,,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

      Solução: $x + y - z = 0$

3. Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a equação

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

   define o plano que passa no ponto P_0 e que contém as direções dos vetores u e v.

Capítulo 6

Valores e vetores próprios

Exercícios 30

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   a) Verifique que $(1, 5, 10)$ é vetor próprio. **Solução**: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

   b) Verifique que 1 é valor próprio. **Solução**: $\det(A - 1I) = 0$.

2. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e determine os vetores próprios associados a -1.

3. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **Solução**: Valores próprios: 1 e 2; vetores próprios: $E(1) = \{(x,y) : x = -y,\ y = \forall\}$ e $E(2) = \{(x,y) : x = \forall,\ y = 0\}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, **Solução**: Valores próprios: $\pm i$; vetores próprios: $E(+i) = \{(x,y) : x = yi,\ y = \forall\}$ e $E(-i) = \{(x,y) : x = -yi,\ y = \forall\}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, **Solução**: Valor próprio: 1; vetores próprios: $E(1) = \{(x,y,z) : x = 0,\ y = 0,\ z = \forall\}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, **Solução**: Valores próprios: 1 e 6; vetores próprios: $E(1) = \{(x,y,z) : x = \forall,\ y = 0,\ z = 0\}$ e $E(6) = \{(x,y,z) : x = \frac{1}{10}z,\ y = \frac{1}{2}z,\ z = \forall\}$

$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **Solução**: Valores próprios: $1-2\sqrt{2}$, $1+2\sqrt{2}$ e 1; vetores próprios: $E(1-2\sqrt{2}) = \{(x,y,z) : x = \sqrt{2}z,\ y = -z,\ z = \forall\}$, $E(1+2\sqrt{2}) = \{(x,y,z) : x = -\sqrt{2}z,\ y = -z,\ z = \forall\}$, $E(1) = \{(x,y,z) : x = 0,\ y = z,\ z = \forall\}$

$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, **Solução**: Valores próprios: 2 e 4; vetores próprios: $E(2) = \{(x,y,z) : x = -y,\ y = \forall,\ z = \forall\}$ e $E(4) = \{(x,y,z) : x = y,\ y = \forall,\ z = 0\}$

$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **Solução**: Valores próprios: -2, 1 e 2; vetores próprios: $E(-2) = \{(x,y,z,w) : x = y = w = 0,\ z = \forall\}$, $E(1) = \{(x,y,z,w) : x = \forall,\ y =$

$z = w = 0\}$ e $E(2) = \{(x, y, z, w) : x = y = z = 0,\ w = \forall\}$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

   a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero. **Solução**: $a = 1$.

   b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.
   Solução: Valores próprios: 0 e 2; vetores próprios: $E(0) = \{(x, y, z) : x = -y,\ y = \forall,\ z = 0\}$ e $E(2) = \{(x, y, z) : x = 0,\ y = z,\ z = \forall\}$.

   c) Discuta, em função do parâmetro a, a invertibilidade da matriz A.
   Solução: Para $a \neq 1$, A é invertível; para $a = 1$, A é singular.

5. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A.

   a) Mostre que, para todo o real α, v é um vetor próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado. **Solução**: O valor próprio associado é $\lambda - \alpha$.

   b) Mostre que, para todo o inteiro n, v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado. **Solução**: O valor próprio associado é λ^n.

Exercícios 31

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

   b) Indique um vetor próprio de A.

d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

2. Indique, justificando, quais das seguintes matrizes são diagonalizáveis.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   a) verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \dfrac{1}{4})$.

   b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

   a) Indique uma matriz de diagonalização.

b) Prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

6. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.

   b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?

   c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.

7. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1, com de multiplicidade algébrica 2 e $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ vetores próprios associados a 1.

   a) Justifique que A é diagonalizável.

   b) Determine $E(1)$.

   c) Sabendo que $(-1, 1, 0)$ é um vetor próprio de A associado a 2, determine a matriz A.

8. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

9. Prove os seguintes resultados.

   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.

   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de $v^T Av$.