INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Álgebra Linear (1ª Chamada)

12 de janeiro de 2016 - Duração 2h

[13v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todo o α, β.

b) Indique, justificando, para que valores de α:

i) $\{v_1, v_2\}$ é ortogonal.

ii) $v_1 \times v_3$ é colinear com $(2, -2, 4)$.

iii) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

iv) $det(A^{-1}) = 4$.

Nas alíneas que se seguem considere $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

c) Defina analitica e geometricamente $\mathcal{C}(A)^{\perp}$.

d) Calcule a matriz de projeção sobre $\mathcal{C}(A)^{\perp}$.

e) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

f) Calcule a distância de b a $\mathcal{C}(A)^{\perp}$.

g) Calcule os valores próprios de A.

h) Indique um vetor próprio de norma 2 de A.

[4v] **2.** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ s.a & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq \frac{3}{2} \\ & x_1 + x_2 \geq x_3 \\ & x_2 + 2x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Verifique que $(0, 1, 0, \frac{1}{2})$ é vértice da região admissível.

c) Determine uma solução ótima do problema que se obtém a partir do problema inicial adicionando a restrição $x_4 = 1$ e indique o correspondente valor da função objetivo.

d) Justifique que a solução $(0, 1, 0, \frac{1}{2})$ não é uma solução ótima para o problema inicial.

[3v] **3.** Sejam x, y, z vetores não nulos de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

a) $\text{proj}_z(x + y) = \text{proj}_z(x) + \text{proj}_z(y)$.

b) Se $x + y + z = \vec{0}$ então $\langle x, y \rangle = \langle y, z \rangle$.