

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Álgebra Linear (2ª Chamada)

26 de janeiro de 2016 - Duração 2h

[11v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 | v_2 | v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todo o α, β .
- b) Indique, justificando, para que valores de α :
 - i) a distância de v_1 a v_3 é 3.
 - ii) 1 é valor próprio de A .
 - iii) $b \in \mathcal{C}(A)$ para todo o $\beta \in \mathbb{R}$.
 - iv) $(-1, 0, 1)$ é perpendicular a $\mathcal{C}(A)$.

Nas alíneas que se seguem considere $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.

- c) Descreva analítica e geometricamente $\mathcal{C}(A)$.
- d) Mostre que $\mathcal{C}(A) = \langle (-1, 1, 5), (0, 1, 3) \rangle$.
- e) Determine $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ de modo a que a distância de $\gamma(-1, 1, 5) + \delta(0, 1, 3)$ a b seja mínima.
- f) Calcule os valores próprios de A .
- g) Mostre que $(2, 1, -1)$ é vetor próprio de A e indique o valor próprio associado.

[2v] 2. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 = -2x_3\}$.

- a) Indique $\dim V$ e $\dim V^\perp$.
- b) Determine uma base ortogonal para V .

[3v] 3. a) Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $x^T Ax > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$.
Mostre que os valores próprios de A são positivos.

- b) Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de \mathbb{R}^n .
Indique, justificando, $\dim \langle u, u + v, u + v + w \rangle$.

[4v] 4. Uma empresa pretende planejar o corte das árvores de uma floresta em dois períodos de tempo consecutivos. As árvores estão divididas em duas classes, A e B, de acordo com a idade. As árvores das classe A e B ocupam, respectivamente, 200 e 300 hectares. O volume de madeira a cortar no 2º período deve ser pelo menos 25% superior ao volume de madeira cortada no período anterior, não podendo a área total de árvores a cortar exceder 400 ha. A tabela seguinte indica o volume de madeira existente na floresta em cada período, em m^3/ha , para cada classe de idade. Pretende-se determinar a área de árvores a cortar de cada uma das classes e em cada um dos períodos, de forma a maximizar o volume de madeira cortada.

Classe de idade	Volume (m^3/ha)	
	Período 1	Período 2
A	80	150
B	120	200

- a) Formule o problema em termos de programação linear, atribuindo significado às variáveis.
- b) Escreva o problema na *forma standard*.
- c) Determine uma solução ótima do problema considerando que se optou por não cortar árvores no 1º período.
- d) Indique, justificando, um vértice da região admissível do problema inicial.