INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Álgebra Linear (1ª Chamada)

17 de Janeiro de 2017 - Duração: 2 h

[6v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = [\, u \; v \; w \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de α e β.

b) Indique, justificando, para que valores de α

i) $(1, 1, 1)$ é vetor próprio de A.

ii) A é invertível.

No que se segue considere $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

c) Indique dois vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que v_1 e v_2 sejam solução de $Ax = b$ e $d(v_1, v_2) = 1$.

d) Calcule os valores próprios de A.

[7v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Descreva analiticamente $\mathcal{N}(A)$.

b) Indique um vetor unitário ortogonal a $\mathcal{N}(A)$.

c) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

d) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de $\mathcal{C}(A)$.

e) Calcule o vetor de $\mathcal{C}(A)$ mais próximo de b.

[3v] **3.** a) Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 \rangle$.

b) Seja A uma matriz quadrada de ordem n e v um vetor próprio unitário de A associado ao valor próprio λ. Mostre que $\|Av\|^2 = \lambda^2$.

[4v] **4.** Considere o seguinte problema de PL nas variáveis x_1, x_2, x_3,

$$\begin{array}{rl} & \max z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ s.a. & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma standard.

b) Determine uma solução ótima do problema que se obtém a partir do problema inicial adicionando a restrição $x_3 = 0$ e indique as correspondentes restrições saturadas.

c) A solução da alínea anterior corresponderá a um vértice da região admissível do problema inicial? Justifique.