INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Álgebra Linear (2ª Chamada)

3 de fevereiro de 2017 - Duração: 2 h

[6v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = [\, u\; v\; w\,]$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função de α, β.

b) Indique, justificando, para que valores de α

i) $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$.

ii) O paralelogramo definido por u e w tem área 4.

No que se segue considere $\alpha = 1$ e $\beta = -1$.

c) Determine um vetor de $\mathbb{R}^3$ que seja solução de $Ax = b$ e seja ortogonal a $(1, 2, 3)$.

d) Mostre que $\lambda = 3$ é valor próprio de A e determine o correspondente subespaço próprio.

[7v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $b \notin \mathcal{C}(A)$.

b) Indique uma base ortogonal para $\mathcal{C}(A)$.

c) Calcule a projeção de b sobre $\mathcal{C}(A)$ e indique a distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

d) Mostre que $\mathcal{N}(A) = \langle (1, 1, -1) \rangle$.

e) Calcule a matriz de projeção sobre $\mathcal{N}(A)$.

[3v] **3.** a) Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^3$ e A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível. Mostre que $\{Av_1, Av_2, Av_3\}$ é linearmente independente.

b) Sejam u e v vetores unitários de $\mathbb{R}^n$ tais que $u|v = 1$. Mostre que $u = v$.

[4v] **4.** Uma estação de tratamento de águas abastece, através de duas condutas, povoações A e B. A conduta que abastece a povoação A tem capacidade máxima (de transporte de água) de 260 m^3/dia e a conduta que abastece a povoação B tem capacidade máxima de 140 m^3/dia. A povoação A cede água a B através de uma conduta com capacidade diária máxima de 80 m^3. Por seu lado, B fornece água a uma terceira povoação C através de uma conduta com capacidade diária máxima de 70 m^3. Os consumos mínimos das povoações A, B e C são, respectivamente, 130, 160 e 40 m^3/dia. O custo de fornecimento de água a partir da estação de tratamento é de 0.08 euro/m^3 e o custo de cedência de água entre povoações é de 0.1 euro/m^3.

Pretende-se determinar o plano diário de transporte da água de modo a minimizar os custos.

a) Formule o problema em programação linear, atribuíndo significado às variáveis.

b) Supondo que A recebe 260 m^3 da estação de tratamento e cede 80 m^3 a B e que C recebe 60 m^3 de B, determine a quantidade de água que B recebe da estação de tratamento de modo a que a solução seja admissível.

c) Justifique que a solução da alínea anterior corresponde a um vértice da região admissível do problema.