

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Teste (A) de Álgebra Linear

16 de dezembro de 2016 - Duração 1h30

Número:

Nome:

Turma:

[6v] 1. Considere  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [u_1 | u_2 | u_3]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

a) Indique, justificando, para que valores de  $\alpha$

i) 3 é valor próprio de  $A$ .

ii)  $(1, 1, 1)$  é vetor próprio de  $A$ .

iii)  $u_1 \times u_2$  é colinear com  $u_3$ .

**No que segue considere  $\alpha = 1$ .**

b) Descreva, analítica e geometricamente,  $\mathcal{C}(A)^\perp$ .

c) Determine uma base ortogonal de  $\mathcal{C}(A)$ .

d) Escreva  $b$  como soma de um vetor de  $\mathcal{C}(A)$  e de um vetor de  $\mathcal{C}(A)^\perp$ .

e) Determine a distância de  $b$  a  $\mathcal{C}(A)$ .

f) Calcule os valores próprios de  $A$  indicando as respectivas multiplicidades algébricas.

[1v] 2. Considere  $A_{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  tal que  $A^T y = 0$ . Mostre que se  $Ax = b$  é um sistema possível, então  $b|y = 0$ .

[3v] 3. Uma empresa pretende fabricar um refrigerante usando três tipos de fruta, I, II e III. Cada litro de refrigerante deve ter pelo menos 0.9 litros de sumo de fruta e, pelo menos, 1 mg de vitamina C. De cada quilo de fruta do tipo I, II e III, extraem-se, respetivamente, 0.5, 0.4 e 0.5 litros de sumo e cada quilo de fruta do tipo I, II e III, contém 0.5, 0.6 e 1 mg de vitamina C. Para manter o sabor agradável, em cada litro de sumo não pode haver mais do que 800 g de fruta dos tipos I e II em conjunto. A empresa pretende determinar a quantidade de fruta de cada tipo a utilizar em cada litro de refrigerante de modo a minimizar os custos, sabendo que cada quilo de fruta custa 12, 20 e 30 cêntimos, respetivamente.

a) Formule o problema em programação linear, atribuindo significado às variáveis.

b) Escreva o problema na forma *standard*, atribuindo significado às variáveis de folga.

c) Mostre que a opção de utilizar 0.8 kg de fruta do tipo I e 1 kg de fruta do tipo III é admissível. Será que corresponde a um vértice da região admissível? Justifique.