Exercícios variados - Capítulo 2 - Espaços vetoriais

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathcal{C}(A)$.

b) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathcal{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathcal{C}(A)$ indicada em b).

d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathcal{C}(A)$.

e) Indique $\dim \mathcal{N}(A)$.

f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathcal{C}(A)$? Justifique.

g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Determine $\mathcal{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.

b) Indique uma base para $\mathcal{C}(A)$.

c) Indique $\text{car}(A)$.

d) Mostre que $\mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \,]$.

a) Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?

b) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

4. Considere $V = \langle (1, 1, 0), (-1, 1, 1), (1, 3, 1) \rangle$.

a) Indique $\dim V$.

b) Mostre que $(2, 4, 1) \in V$.

c) Indique uma matriz A tal que $\mathcal{C}(A) = V$.

5. Considere os vetores $u = (1, 2, 1)$ e $v = (0, 3, 1)$.

a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v \rangle = \langle w, z \rangle$.

b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathcal{C}(A) = \langle u, v \rangle$.

c) Determine $\mathcal{N}(A)$.

6. Sejam $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 0)$ e $v_4 = (1, 1, 0)$.

a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$?

c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \ x_2 = x_3\}$

a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analitica e geometricamente.

b) Indique uma base e a dimensão de V.

c) Mostre que $\mathcal{C}(A) = V$.