Exercícios variados - Capítulo 3 - Produto interno, ortogonalidade e projeção

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathcal{C}(A)$.

c) Qual a dimensão de $\mathcal{N}(A)$?

d) Classifique o sistema $Ax = b$.

e) A matriz A é invertível?

f) Determine o versor de b.

g) Calcule a distância entre a 1ª e a 2ª colunas de A.

h) Calcule a projeção de b sobre $\mathcal{C}(A)$.

2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y\}$

a) Indique uma base e a dimensão de V.

b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.

c) Calcule a matriz de projeção sobre V.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $b \notin \mathcal{C}(A)$.

b) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas, as seguintes afirmações:

i) O conjunto das colunas de A é uma base para $\mathcal{C}(A)$.

ii) A matriz $[A|b]$ é invertível.

iii) O sistema $Ax = 0$ é determinado.

iv) $\dim \mathcal{C}^{\perp}(A) = 1$.

v) $\mathcal{N}^{\perp}(A) = \mathbb{R}^2$.

vi) O ângulo formado pelas colunas de A é $\frac{\pi}{3}$.

vii) O vector de $\mathcal{C}(A)$ à menor distância de b é o vetor $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. Considere $W = \langle (1, 1, 1, -1), (0, 1, 2, -1) \rangle$ e $b = (4, -1, 0, 3)$.

a) Determine uma base e a dimensão de $W^{\perp}$.

b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.

c) Calcule $\mathrm{proj}_{W^{\perp}}(b)$.

d) Calcule as distâncias de b a W e $W^{\perp}$.

5. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2, 3, 1, 0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

a) Qual a característica de A?

b) Indique as soluções de $Ax = 0$.

c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathcal{N}(A)$.

d) Calcule a distância de $b = (0, 2, 1, 0)$ a $\mathcal{N}(A)$.