INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada de Álgebra Linear

17 de janeiro de 2018 - Duração: 2h

[12v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$ e $b = (\beta, 0, 1)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) A é invertível.

ii) $d(u_1, u_3) = 6$.

iii) $b \perp \mathcal{C}(A)$.

iv) $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = b$.

v) $\langle u_1, u_2, u_3, b \rangle = \mathbb{R}^3$.

No que se segue considere $\alpha = 4$ e $\beta = 8$.

c) Defina analítica e geometricamente $\mathcal{N}(A)$.

d) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

e) Mostre que $\mathcal{C}(A) = \langle (-2, 1, 2), (1, 1, 1) \rangle$.

f) Calcule o vetor de $\mathcal{N}(A)$ mais próximo de b.

g) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

h) Determine um vetor próprio unitário de A.

[4v] **2.** Considere $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \, : \, x_1 + x_3 - 3x_4 = 0, \ x_1 = -x_2\}$.

a) Indique uma base ortogonal de V.

b) Defina $V^{\perp}$.

c) Escreva o vetor $(2, 0, 2, 1)$ como combinação linear de um vetor de V e de um vetor de $V^{\perp}$.

[4v] **3.** Considere o seguinte problema de PL nas varáveis x_1, x_2, x_3:

$$\begin{array}{ll} & \max\, z = x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & -2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

e o ponto $P = (0, 2, 4)$.

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Determine, caso exista, um valor de α para o qual P é vértice da região admissível e indique o correspondente valor da função objectivo.

c) Sabendo que P é uma solução ótima, indique, justificando, um valor de $\beta \in \mathbb{R}$ para o qual o plano $x_1 - x_2 + x_3 = \beta$ não intersecta a região admissível do problema.

d) Considerando $\alpha = 5$ determine uma solução ótima do problema que se obtém a partir do problema inicial adicionando a restrição $x_1 = 0$.