1 Exercícios suplementares de integrais duplos

1. Representar o domínio de integração e calcular os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-x}^0 (\mathrm{e}^y + x)\, dy\, dx.$

   (b) $\displaystyle\iint_D x\, dx\, dy \,,$ com $D = \{\, (x, y) : \quad y \leq 3x \quad , \quad y \leq 4 - x^2 \quad , \quad y \geq 0 \,\}.$

   (c) $\displaystyle\iint_D y\, dx\, dy \,,$ com $D = \{\, (x, y) : \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad , \quad y \geq x \quad , \quad y \geq -x \,\}.$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{3}{4 + y^3}\, dy\, dx.$

   (e) $\displaystyle\iint_D x\, dx\, dy \,,$ com $D = \{\, (x, y) : \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad , \quad y \geq x \quad , \quad x \geq 0 \,\}.$

2. Trocar a ordem de integração no seguinte integral duplo: $\displaystyle\int_1^2 \int_x^{2x} f(x, y)\, dy\, dx.$

3. Determinar a área da região delimitada pelas curvas $xy = 2$, $y = 1$ e $y = x + 1$.

4. Calcular o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano $z = x + y$ e inferiormente pelo triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$.

5. Calcular o volume do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + z^2 = 9$.

6. Representar graficamente a região $D = \{\, (x, y) \,:\, x \geq 0 \,,\, y \geq x^2 + 5 \,,\, y - 2x \leq 8 \,\}$. Calcular a respectiva área através dum integral duplo.

7. Calcular o volume da região limitada pelo parabolóide $z = 2x^2 + y^2$ e pela superfície cilíndrica $z = 4 - y^2$.

8. Calcular o volume da região $V = \{(x, y, z) \,:\, y \geq 0 \,,\, z \geq 0 \,,\, x^2 + z^2 \leq 1 \,,\, x + y \leq 2\}$.

2 Soluções

1. (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{\mathrm{e}}$ (b) $\frac{13}{4}$ (c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (d) $\ln \frac{5}{4}$ (e) $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. $\displaystyle\int_1^2 \int_x^{2x} f(x, y)\, dy\, dx \;=\; \int_1^2 \int_1^y f(x, y)\, dx\, dy \;+\; \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y)\, dx\, dy.$

3. $2 \ln 2 - \frac{1}{2}$.

4. $\frac{1}{3}$.

5. 144.

6. 9.

7. 4π.

8. π.