Análise Matemática

Tópicos de Cálculo para Funções de Várias Variáveis

Instituto Superior de Agronomia

2015

Nestes apontamentos expôe-se a componente de Cálculo Diferencial e Integral para Funções de Várias Variáveis da Unidade Curricular *Análise Matemática*, do 1^o Ano das licenciaturas em Engenharia e em Biologia do Instituto Superior de Agronomia.
O texto foi adaptado de "Apontamentos de Análise Matemática II" de Isabel Faria, Ana Isabel Mesquita, Jorge Cadima e Pedro Silva, e de "Lições de Matemática II" de Pedro Silva.

Isabel Faria
Pedro Silva
Ana Isabel Mesquita

Conteúdo

Capítulo 1

Tópicos de cálculo diferencial

O objectivo deste capítulo é generalizar noções e técnicas de cálculo, conhecidas para funções de uma variável, a funções com mais que uma variável.
Vamos limitar-nos a estabelecer as definições para o caso de funções de duas variáveis, o que simplificará muito a notação. A adaptação destes conceitos para as funções com mais do que duas variáveis não introduz, em geral, novas dificuldades.

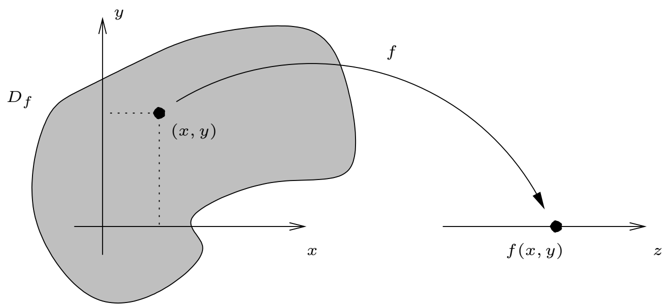
1.1 Domínio, curva de nível e gráfico. Superfícies quádricas. Continuidade

Consideremos uma função real de duas variáveis

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y). \end{array}$$

Designamos o conjunto D_f por *domínio*[1] de f, as variáveis x, y por *variáveis independentes* e a variável z por *variável dependente* (de x e y).

[1]Se nada for dito em contrário, o domínio de uma função é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde a expressão que a define tem significado.



Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

A função $f(x, y) = x + y$ tem domínio $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2

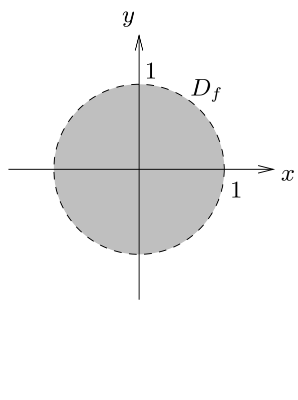
A função $f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma de (x, y)) tem domínio $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3

A função $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ tem domínio

$$\mathrm{D}_f = \{(x, y) : 1 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

que corresponde ao interior do disco de raio um centrado na origem representado na seguinte figura.

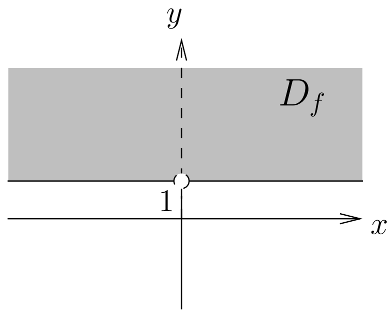


Exemplo 4

A função $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$ tem como domínio a região de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{D}_f = \{(x, y) : x \neq 0, y - 1 \geq 0\} = \{(x, y) : x \neq 0, y \geq 1\},$$

que se encontra representada na seguinte figura.



Exemplo 5

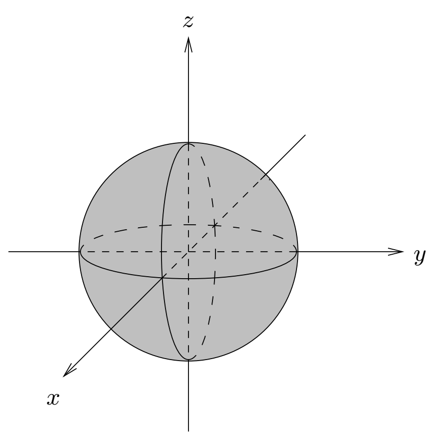
A função $f(x, y, z) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ tem domínio

$$\mathrm{D}_f = \{(x, y, z) : 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

que corresponde à região do espaço delimitada pela esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

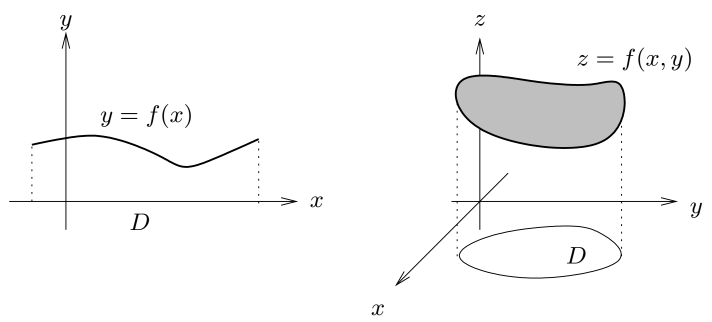
incluindo a própria superfície da esfera.



Definição 1 Consideremos uma função $f : \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Chama-se *gráfico de* f ao subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in \mathrm{D}_f, \ z = f(x, y)\}.$$

É importante constatar que, em geral, os gráficos de funções reais de uma variável são curvas em $\mathbb{R}^2$ e os gráficos de funções reais de duas variáveis são superfícies em $\mathbb{R}^3$.



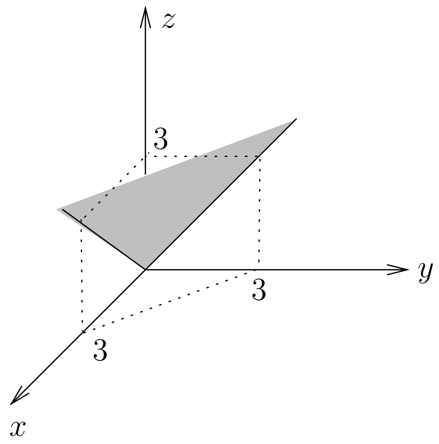
Vejamos alguns exemplos de funções e respectivos gráficos.

Exemplo 6

Consideremos a função $f(x, y) = x + y$ cujo domínio é $\mathbb{R}^2$. O gráfico de f é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}.$$

Reconhece-se imediatamente que o gráfico de f é o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $z = x + y$ representado na figura abaixo.

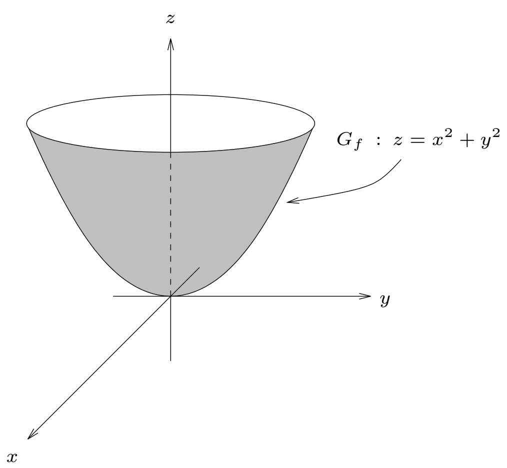


EXEMPLO 7

Consideremos a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+y^2$. O gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

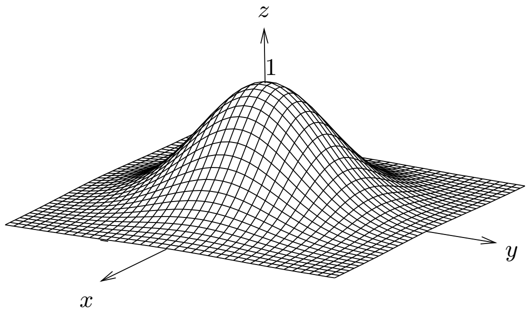
$$G_f=\{(x,y,z)\,:\,(x,y)\in \mathrm{D}_f=\mathbb{R}^2,\quad z=f(x,y)=x^2+y^2\},$$

designado por paraboloide elíptico representado na figura abaixo(ver anexo quádricas).



EXEMPLO 8

O gráfico da função $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ seria difícil de representar sem o auxílio de *software* computacional.



Uma vez que na grande maioria dos casos não é fácil representar o gráfico de uma função, recorre-se muitas vezes aos conjuntos de nível da função.

Definição 2 Consideremos uma função $f : \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e uma constante real k. Chama-se *conjunto de nível k* ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$C_k = \{(x,y) \in D_f \ : \ f(x,y) = k\}.$$

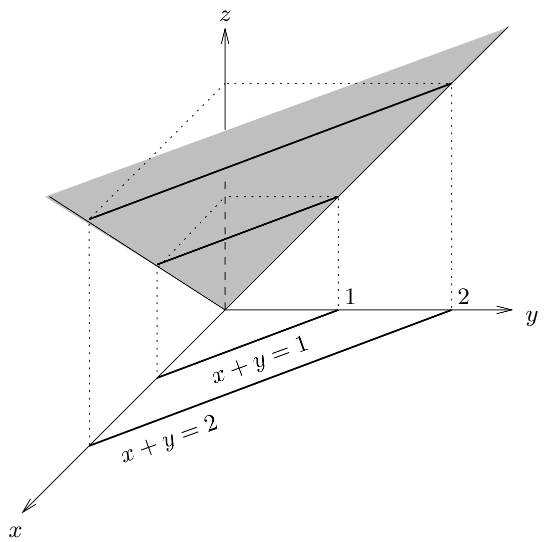
Para funções de duas variáveis os conjuntos de nível chamam-se *curvas de nível*. Para funções de três variáveis os conjuntos de nível, que se definem analogamente, designam-se por *superfícies de nível*.

Os conjuntos de nível podem ser vazios ou reduzirem-se a um ponto.

Vejamos alguns exemplos de identificação dos conjuntos de nível da função, onde se evidencia a sua relação com o gráfico da função.

Exemplo 9

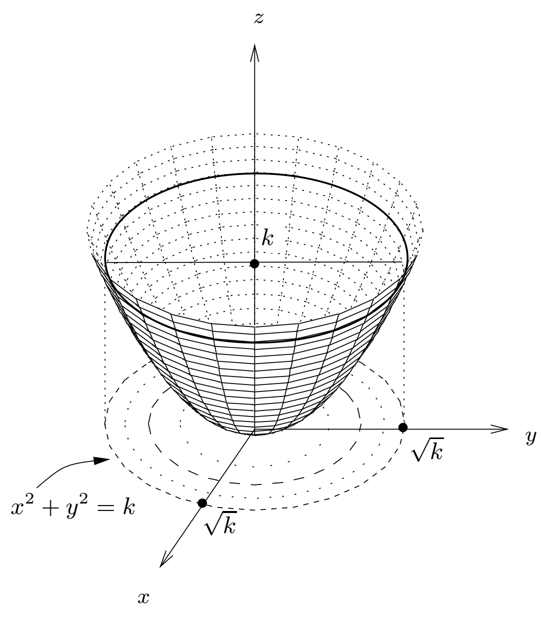
Consideremos de novo a função $f(x,y) = x + y$ cujo domínio é $\mathbb{R}^2$. É fácil de verificar que as curvas de nível $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, são rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$.



EXEMPLO 10

As curvas de nível k da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, são definidas por $x^2 + y^2 = k$, tendo-se,

$$C_k = \{(x, y) \; : \; x^2+y^2 = k\} = \begin{cases} \emptyset, & k < 0 \\ \{(0,0)\}, & k = 0 \\ \text{circunferências centradas na origem de raio } \sqrt{k}, & k > 0 \end{cases}$$

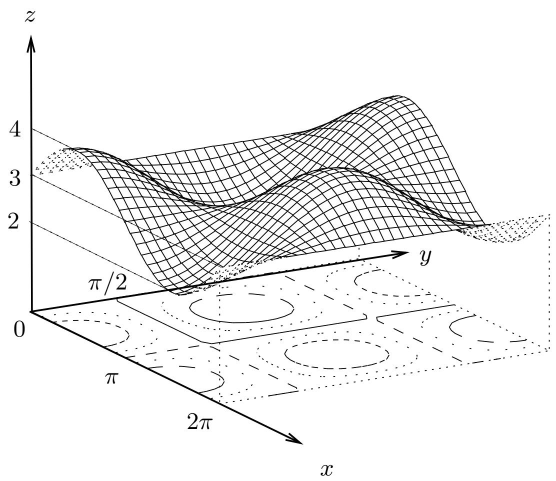


Exemplo 11

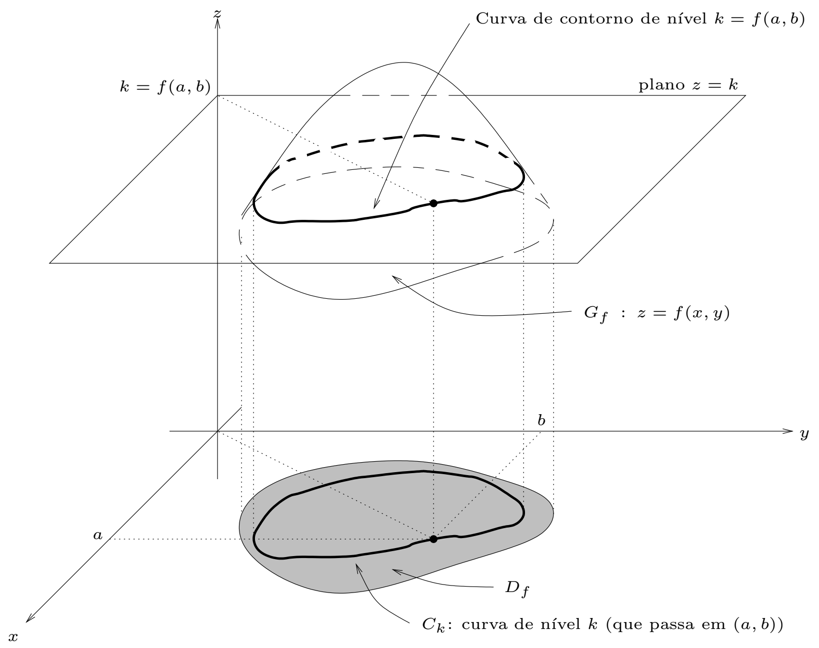
Consideremos

$$z = f(x, y) = \sin(x)\,\cos(y) + 3,$$

definida em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$. O gráfico desta função encontra-se representado na seguinte figura, assim como várias das suas curvas de nível.



A curva de nível k é a projecção no plano $x0y$ da intersecção do gráfico de f com o plano $z = k$.



Exemplo 12

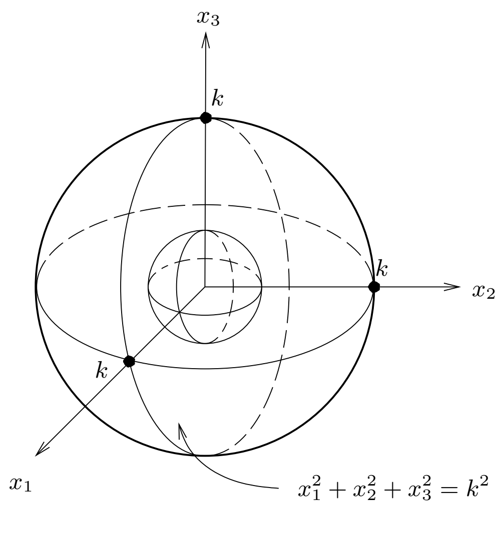
Consideremos por último a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

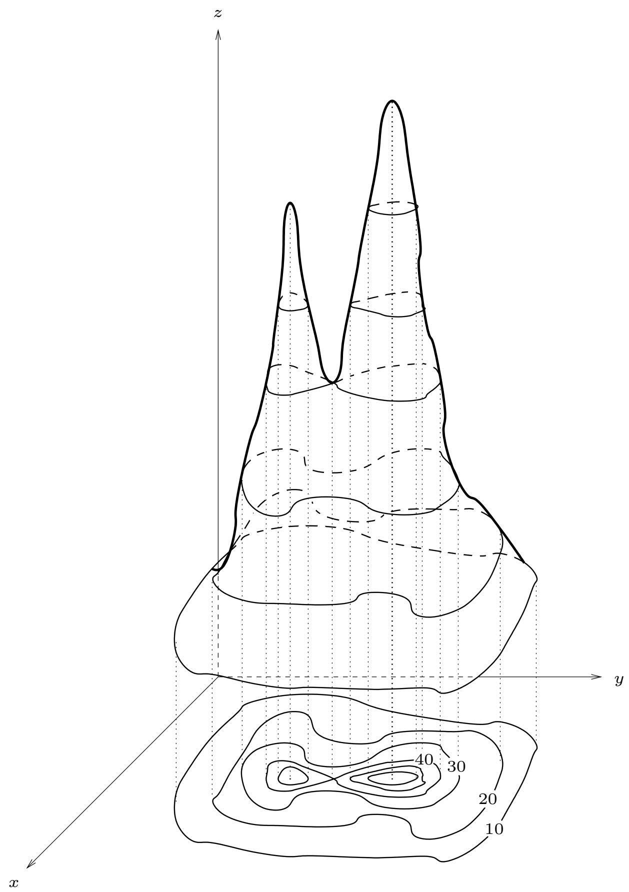
As superfícies de nível $k \geq 0$ são as superfícies

$$C_k = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\right\}, \qquad k \geq 0,$$

que se reconhece serem esferas de raio k, centradas na origem.



A partir das curvas de nível de uma função é possível ter uma ideia de qual o respectivo gráfico, “levantando” as curvas de nível.



Importa nesta altura reter os diferentes modos como curvas e superfícies podem aparecer definidas analiticamente.

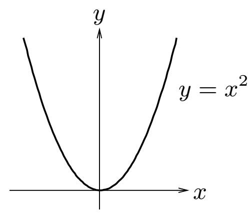
Curvas em $\mathbb{R}^2$

Conjuntos de pontos (x, y) que verificam uma equação da forma:

1. $\boxed{y = f(x)}$

   Neste caso, a curva é o gráfico de uma função de uma variável.

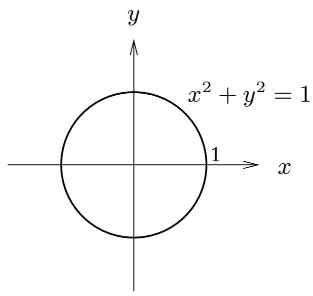
   Ex: $y = f(x) = x^2$



2. $\boxed{f(x,y) = k}$

   Neste caso, temos uma curva de nível de uma função de duas variáveis.

   Ex: $x^2 + y^2 = 1$ é a curva de nível 1 de $f(x,y) = x^2 + y^2$.



> Note que a representação $f(x,y) = k$ é mais geral do que $y = f(x)$. De facto, $y = x^2$ pode ser encarada como a curva de nível zero de $f(x,y) = y - x^2$ enquanto que $x^2 + y^2 = 1$ não pode ser vista como o gráfico de uma função de uma variável.

As curvas referidas anteriormente são exemplos de cónicas (ver Apêndice de cónicas).

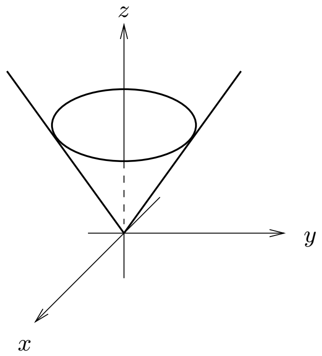
Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Conjuntos de pontos (x, y, z) que verificam uma equação do tipo:

1. $\boxed{z = f(x,y)}$

   Neste caso, a superfície é o gráfico de uma função de duas variáveis.

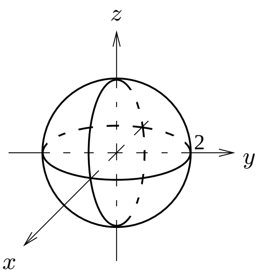
   Ex: $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



2. $\boxed{f(x,y,z) = k}$

   Neste caso, temos uma superfície de nível de uma função de três variáveis.

   Ex: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é a superfície de nível 4 de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.



Entre os gráficos de funções definidas em $\mathbb{R}^2$ (que correspondem a superfícies de $\mathbb{R}^3$) e superfícies de nível de funções definidas em $\mathbb{R}^3$ surgiram-nos algumas superfícies quádricas (ver Apêndice de quádricas).

Continuidade

A noção de continuidade conhecida para funções de uma variável generaliza-se de modo natural para funções com duas (ou mais) variáveis. Intuitivamente, uma função de duas variáveis é contínua se pequenas variações nas variáveis independentes originam uma pequena variação no valor da função, o que se traduz no facto que os gráficos de funções contínuas são superfícies sem "buracos".

Importa registar que qualquer função construída a partir de funções contínuas através de somas, produtos, divisões e composições, é ainda contínua no seu domínio. É o caso das

- funções polinomiais;

  Por exemplo $f(x, y) = x^2y + 2xy$ é uma função polinomial, contínua em $\mathbb{R}^2$.

- funções racionais;

  A função racional $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ é contínua no seu domínio, isto é em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- funções compostas de funções polinomiais, funções racionais, funções potência, função exponencial e logarítmica e funções trignométricas;

  As funções $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $g(x, y) = \operatorname{arctg}(x + e^y)$ são contínuas, respectivamente em $\{(x, y) : x + y > 0\}$ e em $\mathbb{R}^2$.

Tal como até aqui trabalharemos apenas com funções construídas deste modo, ou seja, com funções contínuas.

Exercícios 1

1. Determine o domínio das seguintes funções e represente-o geometricamente:

   (a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

   (b) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \sqrt{1-x}$.

   (c) $f(x, y) = \frac{\ln(3-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

   (d) $f(x, y) = \frac{x}{y-1}$.

   (e) $f(x, y) = \sqrt{x(y-x^2)}$.

   (f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}+1}$.

2. Identifique os conjuntos de nível e esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = 3$.

   (b) $f(x, y) = x$

   (c) $f(x, y) = x^2$.

   (d) $f(x, y) = |x|$.

   (e) $f(x, y) = \|(x, y)\|$

   (f) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   (g) $f(x, y) = e^{-x^2-2y^2}$.

3. Relativamente a cada uma das funções indicadas nas alíneas (f) e (g) do exercício anterior:

   (a) Defina a curva de nível que passa no ponto $(1, 1)$.

   (b) Diga, justificando, se o ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao respectivo gráfico.

   (c) Determine o respectivo contradomínio.

4. Defina analitica e geometricamente as curvas de nível para as seguintes funções, indicando em cada caso o respectivo domínio:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{x+y}}$.

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$.

5. Identifique analitica e geometricamente os conjuntos de nível das seguintes funções:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

6. Determine uma função para a qual:

   (a) $y = 3x + 4$ é uma curva de nível.

   (b) $x^2 - y = 1$ é uma curva de nível.

   (c) $x^2 - y = 1$ é uma superfície de nível.

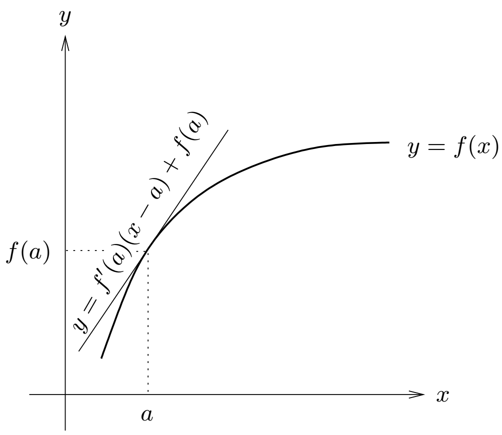
   (d) $x^2 + y^2 = 4$ é uma superfície de nível.

1.2 Derivadas parciais. Plano tangente.

É conhecida para funções de uma variável real, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a definição de derivada[2] num ponto $a \in I$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A existência de $f'(a)$ equivale à existência da recta (não vertical) tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$, sendo $f'(a)$ o valor do seu declive.

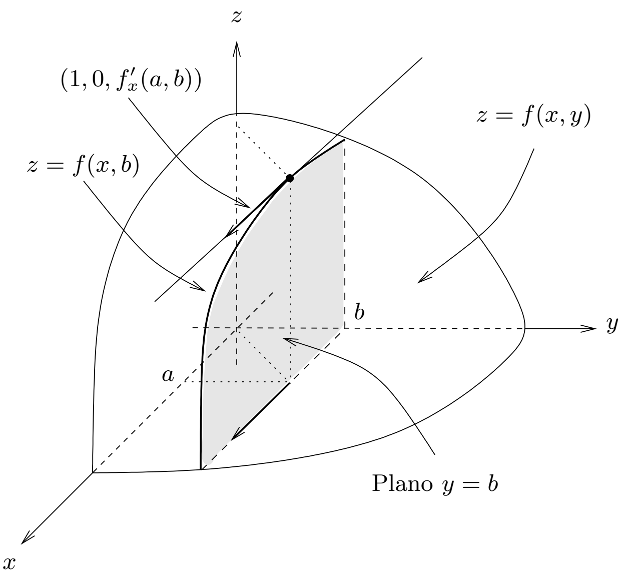


Não menos importante que a interpretação geométrica da derivada é reconhecer que o valor da derivada de f em a, $f'(a)$, pode ser interpretado como a *taxa de variação de f em a*

Para funções de mais do que uma variável começamos por estudar como é que a função varia relativamente a cada uma das variáveis, isto é, qual a variação que a função sofre se alterarmos uma das variáveis mantendo as outras constantes. Isto leva-nos à definição de derivada parcial.

Consideremos $z = f(x, y)$. Se fixarmos, por exemplo, a variável $y = b$ (b constante) obtemos uma função $z = f(x, b)$ de apenas uma variável x. Geometricamente isto corresponde a seccionar a superfície $z = f(x, y)$ pelo plano $y = b$.

[2] A derivada de uma função $y = f(x)$ denota-se por y' ou $f'(x)$ ou $\dfrac{df}{dx}$ ou ainda por $\dfrac{dy}{dx}$.



A derivada de $z = f(x,b)$ em $x = a$ é

$$\frac{df(x,b)}{dx}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

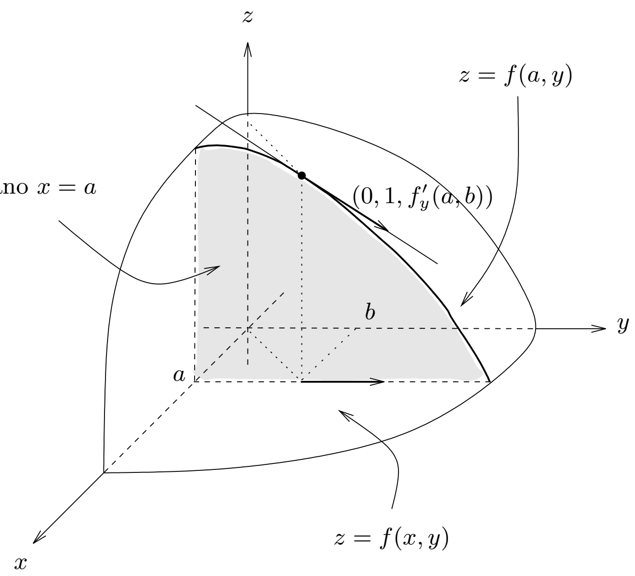
que se designa por *derivada parcial de* f *em ordem a* x *no ponto* (a,b), e que se denota por $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ou por $f'_x(a,b)$, isto é,

$$f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

O valor de $f'_x(a,b)$ é a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção do eixo dos xx.   O valor de $f'_x(a,b)$ é o declive da recta do plano $y = b$, tangente à curva $z = f(x,b)$ em $(a,b,f(a,b))$.

Analogamente se define *derivada parcial em ordem à variável* y *no ponto* (a,b) que se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ou por $f'_y(a,b)$. Mais precisamente, se fixarmos $x = a$ obtemos uma função $z = f(a,y)$ de apenas uma variável y, cuja derivada em $y = b$ é

$$f'_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$



O valor de $f'_y(a,b)$ é a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção do eixo dos yy. O valor de $f'_y(a,b)$ é o declive da recta do plano $x=a$, tangente à curva $z=f(a,y)$ em $(a,b,f(a,b))$.

Na maior parte dos casos, as derivadas parciais calculam-se recorrendo às regras de derivação conhecidas para funções de uma variável, considerando a(s) outra(s) variável (variáveis) constante(s).

Exemplo 13

Pretende-se calcular $f'_x(1,2)$ e $f'_y(1,2)$, para $f(x,y)=x^2y+y^3$. Fixando $y=2$ obtém-se a função de uma variável $f(x,2)=2x^2+8$. Portanto,

$$f'_x(1,2) = (2x^2+8)'|_{x=1} = (4x)|_{x=1} = 4.$$

Analogamente, fixando $x=1$ tem-se $f(1,y)=y+y^3$ e

$$f'_y(1,2) = (y+y^3)'|_{y=2} = (1+3y^2)|_{y=2} = 13.$$

De uma forma geral, se considerarmos uma das variáveis constante e derivarmos em ordem à outra obtemos as funções

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= (x^2y+y^3)'_x = y(x^2)'_x + (y^3)'_x = 2xy + 0 = 2xy, \\ f'_y(x,y) &= (x^2y+y^3)'_y = x^2(y)'_y + (y^3)'_y = x^2 \cdot 1 + 3y^2 = x^2 + 3y^2. \end{aligned}$$

Os valores $f'_x(1,2)$ e $f'_y(1,2)$ obtêm-se substituindo x por 1 e y por 2.

Exemplo 14

Se $f(x,y) = e^{xy} + \dfrac{x}{y}$ as funções derivadas parciais de 1ª ordem são

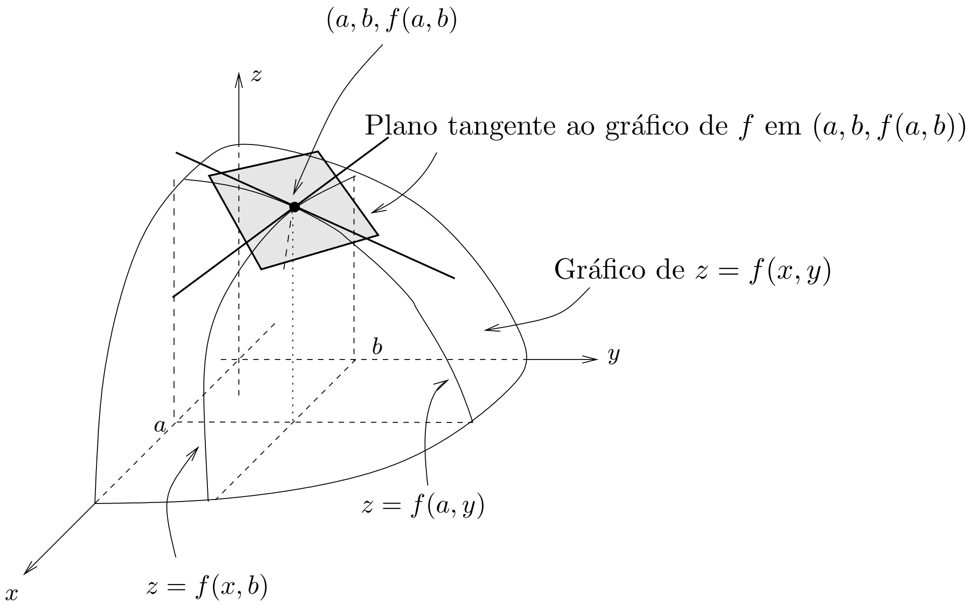
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= f'_x(x,y) = y\,e^{xy} + \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= f'_y(x,y) = x\,e^{xy} - \frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Obviamente f'_x e f'_y só se definem em pontos do domínio de f, isto é, os domínios de f'_x e f'_y estão contidos no domínio de f.

Plano tangente

O análogo, para funções de duas variáveis, da recta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, é o *plano tangente ao gráfico de* $z = f(x,y)$.

Geometricamente o plano tangente a uma superfície num ponto é o plano que "melhor" aproxima a superfície perto desse ponto.



Enquanto que para uma função f de uma variável a existência da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é equivalente à existência de $f'(a)$, não basta, para uma função f de duas variáveis, a existência das derivadas parciais $f'_x(a, b)$ e $f'_y(a, b)$ para garantir a existência de plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$.

Caso exista, o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ em $(a, b, f(a, b))$ deverá conter as rectas tangentes às curvas $z = f(x, b)$ e $z = f(a, y)$ no referido ponto, o que nos vai permitir deduzir uma equação para o plano tangente.

Sendo

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - f(a, b)) = 0,$$

a equação genérica de um plano que passa em $(a, b, f(a, b))$, determinemos A, B, C de forma a que o plano contenha as rectas tangentes referidas, cujas as equações são

$$\begin{cases} y = b, \\ z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a), \end{cases} \tag{1.1}$$

e

$$\begin{cases} x = a, \\ z = f(a, b) + f'_y(a, b)(y - b). \end{cases} \tag{1.2}$$

Substituindo (1.1) e (1.2) na equação do plano, obtém-se respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} A(x-a)+C(f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)-f(a,b))=0 \\ B(y-b)+C(f(a,b)+f'_y(a,b)(y-b)-f(a,b))=0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} A(x-a)+Cf'_x(a,b)(x-a)=0 \\ B(y-b)+Cf'_y(a,b)(y-b)=0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} (x-a)(A+Cf'_x(a,b))=0 \\ (y-b)(B+Cf'_y(a,b))=0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} A=-Cf'_x(a,b) \\ B=-Cf'_y(a,b). \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, obtém-se substituindo A e B na equação do plano,

$$-Cf'_x(a,b)(x-a)-Cf'_y(a,b)(y-b)+C(z-f(a,b))=0.$$

Dividindo por C, resulta finalmente

$$\boxed{z=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b).}$$

Prova-se que para funções f que admitem derivadas parciais de 1^a ordem contínuas para todos os pontos perto de um dado ponto (a,b), os respectivos gráficos admitem plano tangente em $(a,b,f(a,b))$.

Exemplo 15

As derivadas parciais da função $z=9-x^2-y^2$, $f'_x=-2x$ e $f'_y=-2y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Assim podemos escrever a equação do plano tangente ao respectivo gráfico em qualquer ponto $(a,b,f(a,b))$.

Considerando, por exemplo, o ponto $(1,2,4)$, tem-se

$$z=f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2)+f(1,2),$$

isto é,

$$z = -2(x-1) - 4(y-2) + 4.$$

Derivadas parciais de ordem superior

Uma vez que f'_x e f'_y são duas novas funções de duas variáveis podemos derivá-las parcialmente obtendo as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem para f e assim sucessivamente. A notação utilizada é a seguinte.

Derivadas parciais: de 1^a ordem, de 2^a ordem, de 3^a ordem, etc …

- f
  - $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$
    - $f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
      - $f'''_{x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$
      - $f'''_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$
    - $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
      - $f'''_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$
      - $f'''_{xy^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$
  - $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
    - $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
      - $f'''_{yx^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$
      - $f'''_{yxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$
    - $f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
      - $f'''_{y^2x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$
      - $f'''_{y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

tendo-se $D_f \supset D_{f'_x} \supset D_{f''_{x^2}}, D_{f''_{xy}} \supset \cdots$ e $D_f \supset D_{f'_y} \supset D_{f''_{y^2}}, D_{f''_{yx}} \supset \cdots$

Exemplo 16

Vamos determinar as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem para $f(x,y) = x \ln y$. Comecemos por notar que $D_f = \{(x,y) : y > 0\}$. Tem-se para todo $(x,y) \in D_f$,

$$f = x\ln y$$

- $f'_x = \ln\, y$
  - $f''_{x^2} = 0$
  - $f''_{xy} = \frac{1}{y}$
- $f'_y = \frac{x}{y}$
  - $f''_{yx} = \frac{1}{y}$
  - $f''_{y^2} = -\frac{x}{y^2}$

Exemplo 17

Vamos determinar as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem para $f(x,y,z) = x^2y^2\cos z$. Comecemos por notar que $D_f = \mathbb{R}^3$. Tem-se para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f = x^2y^2\cos z$$

- $f'_x = 2xy^2\cos z$
  - $f''_{x^2} = 2y^2\cos z$
  - $f''_{xy} = 4xy\cos z$
  - $f''_{xz} = -2xy^2\sin z$
- $f'_y = 2x^2y\cos z$
  - $f''_{yx} = 4xy\cos z$
  - $f''_{y^2} = 2x^2\cos z$
  - $f''_{yz} = -2x^2y\sin z$
- $f'_z = -x^2y^2\sin z$
  - $f''_{zx} = -2xy^2\sin z$
  - $f''_{zy} = -2x^2y\sin z$
  - $f''_{z^2} = -x^2y^2\cos z$

Podemos constatar nos exemplos anteriores que se tem para as $2^{\underline{as}}$ derivadas parciais "mistas",

$$f''_{xy} = f''_{yx}, \qquad f''_{xz} = f''_{zx}, \qquad f''_{yz} = f''_{zy},$$

isto é, que a ordem pela qual se calculam as derivadas parciais de ordem superior não é relevante. Embora esta propriedade não se verifique para funções arbitrárias, é válida para as funções com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas.

Matriz Jacobiana e gradiente. Matriz Hessiana

Definição 3 Chamamos *matriz Jacobiana de f em (a, b)* à matriz linha das derivadas parciais de f em (a, b), ou seja,

$$J_f(a,b) = \begin{bmatrix} f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Chamamos *gradiente de f em (a, b)* e representa-se por $\operatorname{grad} f(a, b)$ ou $\nabla f(a, b)$, ao vector das suas derivadas parciais de f em (a, b),

$$\operatorname{grad} f(a,b) = \begin{bmatrix} f'_x(a,b) \\ f'_y(a,b) \end{bmatrix} = \Big(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\Big).$$

Note que $\operatorname{grad} f(a, b)$ coresponde à matriz transposta da matriz Jacobiana $J_f(a, b)$, *i.e.*,

$$\operatorname{grad} f(a,b) = J_f(a,b)^T.$$

Exemplo 18

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2\, e^{3\,y}$. Tem-se

$$\begin{aligned} J_f(x,y) &= \begin{bmatrix} 2\,x\,e^{3\,y} & 3\,x^2\,e^{3\,y} \end{bmatrix}, \\ \operatorname{grad} f(x,y) &= \big(2\,x\,e^{3\,y},\ 3\,x^2\,e^{3\,y}\big) = \begin{bmatrix} 2\,x\,e^{3\,y} \\ 3\,x^2\,e^{3\,y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 19

Seja $f(x, y, z) = -x\,y^2$. Tem-se

$$\begin{aligned} J_f(x,y,z) &= \begin{bmatrix} -y^2 & -2\,x\,y & 0 \end{bmatrix}, \\ \operatorname{grad} f(x,y,z) &= (-y^2,\ -2\,x\,y,\ 0) = \begin{bmatrix} -y^2 \\ -2\,x\,y \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 4 Chamamos *matriz Hessiana de f em* (a, b) e denota-se por $H_f(a, b)$ à matriz das derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem de f em (a, b) i.e.,

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{y^2}(a,b) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 20

Consideremos a função $f(x, y) = x \ln y$ do exemplo 16. A matriz Hessiana de f em $(3, 4)$ é,

$$H_f(3,4) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{bmatrix}_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 21

Consideremos a função $f(x, y, z) = x^2y^2 \cos z$ do exemplo 17. A matriz Hessiana de f é,

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2\cos z & 4xy\cos z & -2xy^2\sin z \\ 4xy\cos z & 2x^2\cos z & -2x^2y\sin z \\ -2xy^2\sin z & -2x^2y\sin z & -x^2y^2\cos z \end{bmatrix}$$

Note que, para funções com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, a matriz Hessiana é simétrica.

Exercícios 2

1. Determine as derivadas parciais de $1^{\underline{a}}$ ordem das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = x^3\, y - 2x\, y^2 + x^4$.

   (b) $f(x, y) = 2x\, \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

   (c) $f(x, y) = x^3 + \cos(x + 3y)$.

   (d) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

   (e) $f(x, y) = e^{-y^2} \cos(x^2 + y^2)$.

   (f) $f(x, y) = \ln(\frac{x}{y^2})$.

(g) $f(x,y,z) = (2x - y + z)e^{x-y}$.

2. Considere a função $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

   Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,0) = x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(1,y) = y + e^{-y}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$.

   Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

4. Indique uma equação do plano tangente ao gráfico de:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$ em $(1,3,f(1,3))$.

   (b) $f(x,y) = x^3 - xy + e^y$ em $(-1,0,0)$.

   (c) $f(x,y) = \sin(3x + ye^x)$ em $(0,0,f(0,0))$.

5. Calcule as derivadas parciais até à 2ª ordem e indique as matrizes Jacobiana e Hessiana de:

   (a) $f(x,y) = x$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y\ln x$.

   (c) $f(x,y,z) = \ln(x + y^2 + z^2)$.

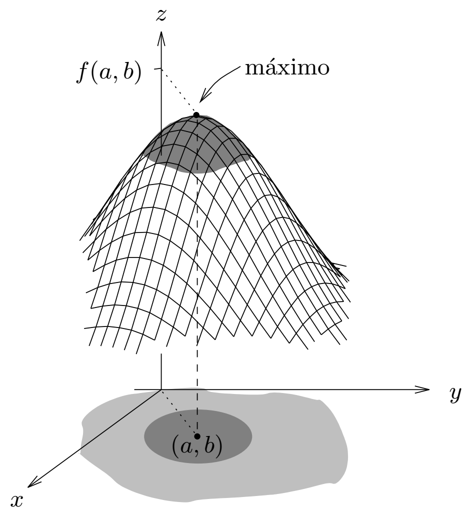
   (d) $f(x,y) = \|(x,y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (e) $f(x,y) = x\,\|(x,y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.3 Extremos livres

Uma das aplicações do cálculo diferencial é a determinação de extremos de uma função. Comecemos por definir *extremo* (local) de uma função de duas variáveis.

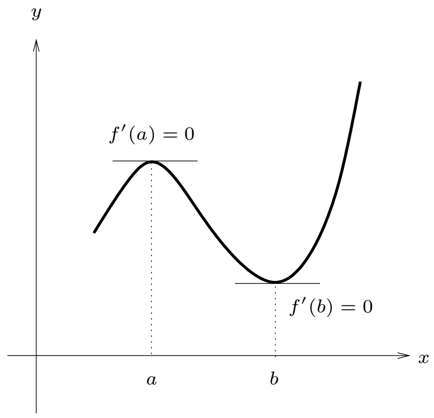
Definição 5 Uma função $z = f(x, y)$ tem um *máximo* [*mínimo*] (local) no ponto (a, b) se para pontos próximos de (a, b) se tem $f(x, y) \leq f(a, b)$ [resp. $f(x, y) \geq f(a, b)$].

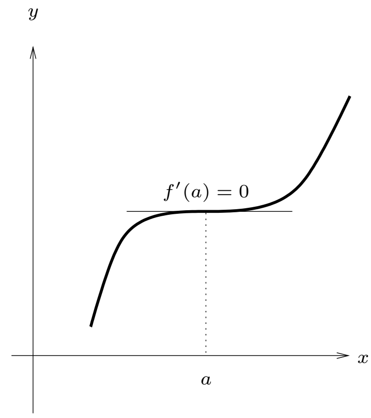


Para funções deriváveis de uma variável sabe-se que

$$\boxed{\text{Se } f \text{ tem um extremo (relativo) em } a \text{ então } f'(a) = 0}$$

i.e, a é um ponto crítico de f. Por outras palavras, se f tem um extremo, o respectivo gráfico tem nesse ponto uma recta tangente horizontal.





Este facto permite-nos reduzir os pontos candidatos a pontos onde ocorrem extremos aos pontos críticos de f.

Se f admite 2^a derivada, é à 2^a derivada que se recorre para decidir se um dado ponto crítico a é um ponto onde ocorre um extremo ou um ponto de inflexão:

– Se $f''(a) > 0$ então $f(a)$ é um mínimo;

– Se $f''(a) < 0$ então $f(a)$ é um máximo;

– Se $f''(a) = 0$ nada se pode concluir e temos que recorrer à definição de extremo.

A procura de extremos para funções de duas variáveis com 2^{as} derivadas parciais contínuas faz-se de forma análoga.

Comecemos por notar que se $z = f(x, y)$ tem um extremo em (a, b) então as funções de uma só variável $f(x, b)$ e $f(a, y)$ também terão um extremo respectivamente em $x = a$ e $y = b$. Assim,

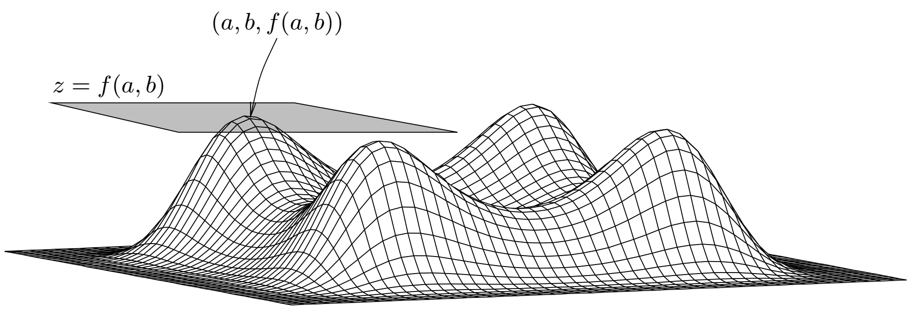
$$[f(x,b)]'\,|_{x=a} = 0 \qquad \text{e} \qquad [f(a,y)]'\,|_{y=b} = 0.$$

Como vimos em 1.2 as derivadas referidas são precisamente as derivadas parciais de f e portanto

Se f tem um extremo em (a, b) então

$$\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

o que significa que o plano tangente ao gráfico de f em (a, b) é horizontal.



Definição 6 Um ponto (a,b) diz-se um ponto *crítico* (ou de *estacionaridade*) de f se $\operatorname{grad} f(a,b) = \vec{0}$.

É entre os pontos críticos que devemos procurar os extremos de uma função de duas variáveis.

Exemplo 22 Considerando $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$ é fácil ver que $(0,0)$ é o único ponto crítico de f. De facto,

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Além disso,

$$f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 + 4 - 4 = x^2 + y^2 > 0, \qquad \forall\,(x,y) \neq (0,0).$$

Conclui-se então que $(0,0)$ é um ponto onde ocorre um mínimo de f.

Nem todos os pontos críticos são extremos.

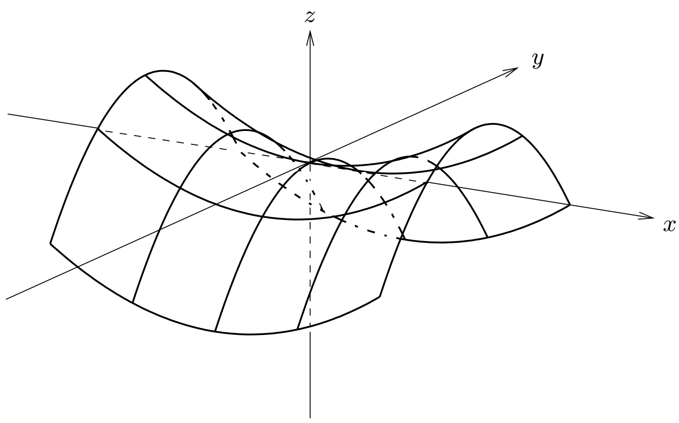
Exemplo 23 Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Tem-se

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e consequentemente $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.
Para analisar o sinal de $f(x,y) - f(0,0)$ começamos por considerar pontos da forma $(x,0)$ (pontos que estão no eixo dos xx) e da forma $(0,y)$ (pontos que estão no eixo dos yy). Assim

$$\begin{aligned} f(x,0) - f(0,0) = x^2 &\geq 0, \qquad \forall x, \\ f(0,y) - f(0,0) = -y^2 &\leq 0 \qquad \forall y, \end{aligned}$$

o que basta para concluir que $f(x,y) - f(0,0)$ não mantém o sinal constante perto de $(0,0)$ e portanto que em $(0,0)$ não ocorre um extremo de f.



Definição 7 Um ponto crítico de f onde não ocorre um extremo diz-se um ponto de *sela*.

Para determinar a natureza de um ponto crítico, isto é, para saber se um ponto crítico é um ponto onde ocorre um extremo (e nesse caso se o extremo é um mínimo ou um máximo) ou se é um ponto de sela, vamos recorrer a um teste em que a matriz Hessiana de f vai desempenhar um papel análogo ao papel desempenhado pela 2^a derivada de f para funções de uma variável.

Critério da matriz Hessiana para a classificação de extremos

Seja f uma função com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas e (a, b) um ponto crítico de f. Então:

1. Se $\det H_f(a, b) > 0$ então $f(a, b)$ é um extremo:
   - máximo, se $f''_{x^2}(a, b) < 0$;
   - mínimo, se $f''_{x^2}(a, b) > 0$.
2. Se $\det H_f(a, b) < 0$ então (a, b) é um ponto de sela.
3. Se $\det H_f(a, b) = 0$ o critério não é conclusivo e é necessário recorrer à definição de extremo.

Exemplo 24 Consideremos $f(x, y) = 4x^3 + 4xy - y^2 - 4x$. Comecemos por determinar os pontos críticos de f. Ora,

$$\begin{cases} f'_x = 12x^2 + 4y - 4 = 0 \\ f'_y = 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ 2x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ 2x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Os pontos críticos de f são $(-1, -2)$ e $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. A matriz Hessiana de f é $\begin{bmatrix} 24x & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Para o ponto $(-1, -2)$ tem-se $H_f(-1, -2) = \begin{bmatrix} -24 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\det H_f(-1, -2) = 32 > 0$ e $f''_{x^2}(-1, -2) < 0$, e portanto $f(-1, -2) = 4$ é um máximo de f que ocorre em $(-1, -2)$.

Para o ponto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ tem-se $H_f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $\det H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -32 < 0$ e portanto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um ponto de sela.

Exemplo 25 Seja $f(x, y) = (x - 1)e^{xy}$. Comecemos por determinar os pontos críticos de f. Ora,

$$\begin{cases} f'_x = e^{xy} + (x - 1)ye^{xy} = 0 \\ f'_y = (x - 1)x \underbrace{e^{xy}}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{xy}(1 + xy - y) = 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \bigvee \underbrace{\begin{cases} 1 + y - y = 0 \\ x = 1 \end{cases}}_{\text{Impossível}}$$

Portanto $(0, 1)$ é ponto crítico de f. Tem-se

$$H_f = \begin{bmatrix} ye^{xy} + ye^{xy} + (x - 1)y^2e^{xy} & xe^{xy} + (x - 1)e^{xy} + x(x - 1)ye^{xy} \\ xe^{xy} + (x - 1)e^{xy}(x - 1)ye^{xy} & (x - 1)x^2e^{xy} \end{bmatrix}.$$

Logo, $H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det H_f(0,1) = -1$ e portanto $(0,1)$ é um ponto de sela.

Exemplo 26 Consideremos por último $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2y$. Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 8xy = 0 \\ 4y^3 - 4x^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8x(x^2 - y) = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ y = x^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = x^6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \bigvee \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^2(1 - x^2)(1 + x^2) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

obtemos os pontos críticos de f, $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$. Para investigar a natureza destes pontos críticos vamos calcular a matriz Hessiana de f

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 12y \end{bmatrix}.$$

Então

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \det H_f(1,1) = 16 \times 12 - 8^2 = 128 > 0, \quad f''_{x^2}(1,1) = 16 > 0,$$

e portanto $f(1,1)$ é um mínimo de f.

Para o ponto $(-1,1)$ tem-se

$$H_f(-1,1) = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \det H_f(-1,1) = 128, \quad f''_{x^2}(-1,1) = 16$$

e portanto $f(-1,1)$ é também um mínimo local.

Finalmente,

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det H_f(0,0) = 0.$$

Neste caso temos que estudar o sinal de

$$f(x,y) - f(0,0) = 2x^4 + y^4 - 4x^2y.$$

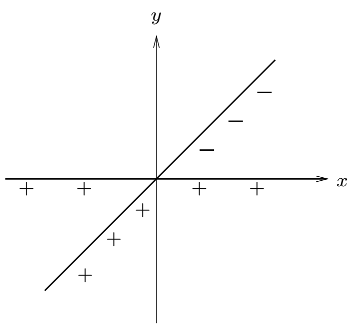
Considerando pontos da recta $y = 0$,

$$f(x,0) - f(0,0) = 2x^4 \geq 0.$$

Considerando pontos da recta $y = x$, tem-se

$$f(x,x) - f(0,0) = 3x^4 - 4x^3 = x \cdot \underbrace{x^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(3x-4)}_{<0 \text{ perto de } (0,0)}.$$

Daqui resulta que o sinal de $f(x,y) - f(0,0)$ não é constante para pontos próximos de $(0,0)$. Logo $(0,0)$ é um ponto de sela de f.



O estudo dos extremos de uma função de 3 variáveis com 2^{as} derivadas parciais contínuas faz-se de forma análoga.

Considerando $w = f(x, y, z)$ começa-se por determinar os pontos críticos de f resolvendo o sistema

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$$

Para determinar a natureza dos pontos críticos recorre-se a um critério que envolve a matriz Hessiana de f, de que o critério estabelecido anteriormente para funções de duas variáveis é um caso particular.

Antes de estabelecermos esse critério necessitamos de fixar alguma notação.

Dada uma matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

denotamos por

$$d_1 = \det[a_{11}] = a_{11}, \quad d_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad d_3 = \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

<u>Critério da matriz Hessiana para a classificação de extremos</u>

Seja f uma função com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas e (a, b, c) um ponto crítico de f. Então:

1. Se $\det H_f(a, b, c) \neq 0$ e

   - se $d_1,\ d_2,\ d_3 > 0$ então $f(a, b, c)$ é um mínimo de f;

   - se $d_1 < 0,\ d_2 > 0,\ d_3 < 0$ então $f(a, b, c)$ é um máximo de f;

   - Em qualquer outro caso, (a, b, c) é um ponto sela.

2. Se $\det H_f(a, b, c) = 0$ o critério não é conclusivo e é necessário recorrer à definição de extremo.

Exemplo 27 Seja $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 + 3z^2$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ f'_y = 2xy + 2y = 0 \\ f'_z = 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ y(x+1) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \bigvee \underbrace{\begin{cases} y^2 = -1 \\ x = -1 \\ z = 0 \end{cases}}_{\text{Impossível}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

obtemos os pontos críticos $(0,0,0)$ e $\left(-\dfrac{2}{3}, 0, 0\right)$.

Tem-se

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x+2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para $(0,0,0)$ tem-se

$$H_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$d_1 = 2, \qquad d_2 = 4, \qquad d_3 = \det H_f(0,0,0) = 24$$

e portanto $f(0,0,0)$ é um mínimo de f.

Para $\left(-\dfrac{2}{3}, 0, 0\right)$ tem-se

$$H_f\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$d_1 = -2, \qquad d_2 = -\frac{4}{3}, \qquad d_3 = \det H_f\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right) = -8$$

e $\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ é um ponto de sela.

Exercícios 3

1. Determine os pontos críticos das seguintes funções e estude a sua natureza:

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

   (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 8x^2y^2 + 12x^3$.

   (c) $f(x, y) = (x - 1)(3 - x)\, y^3 - y$.

   (d) $f(x, y) = x + y + 1/x + 4/y$.

   (e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + ay^2$, com $-1 \leq a \leq 1$.

   (a) Analise, para os diferentes valores de a, a existência de extremos locais da função f.

   (b) Interprete geometricamente o problema.

3. Seja $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$, em que k é uma constante.

   (a) Mostre que f admite um ponto crítico em $(0, 0)$ independente do valor de k.

   (b) Para que valores de k o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela? Justifique a resposta.

4. Calcule, justificando convenientemente, os valores de a, b e c para que

   $$f(x, y) = a - (x^2 + bx + y^2 + cy)$$

   tenha um máximo de valor 15 no ponto $(-2, 1)$.

5. Prove que $(1, 1, 1)$ é um ponto crítico de $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ e determine a sua natureza.

Capítulo 2

Integrais duplos

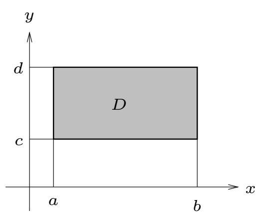
Pretende-se estender a noção já conhecida de integral (definido) de uma função de uma variável real ao caso de duas variáveis (o caso de três ou mais variáveis é análogo). A noção de integral num contexto mais geral está fora do âmbito deste curso, pelo que vamos restringir-nos ao estudo de funções contínuas em certos tipos de domínios.

Relembremos que o estudo do integral definido foi motivado pelo cálculo de áreas de regiões delimitadas por gráficos de funções não negativas. Agora vamos estar interessados em volumes.

Consideremos $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, $f(x, y) \geq 0$, sendo $D = [a, b] \times [c, d]$.

Recordemos que $[a, b] \times [c, d]$ designa o *produto cartesiano* dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, isto é,

$$D = [a, b]\times[c, d] = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b], \ y \in [c, d]\Big\}.$$



Se fixarmos a variável x, fazendo $x = \alpha$, obtemos uma função contínua $f(\alpha, y)$ de uma só variável y e faz sentido calcular,

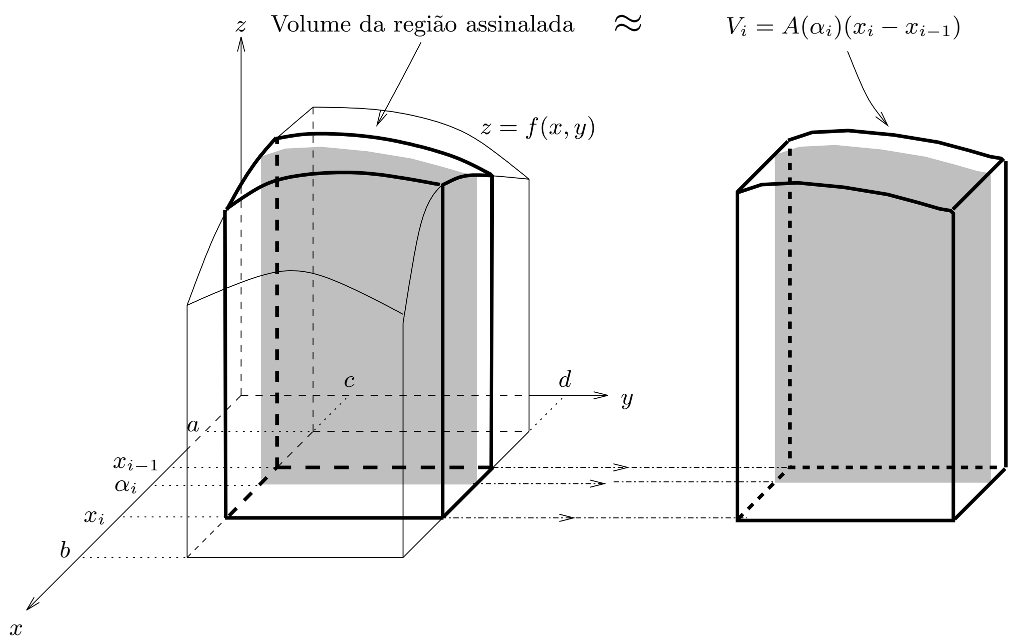
$$A(\alpha) = \int_c^d f(\alpha, y)dy,$$

que é exactamente a área da região do plano $x = \alpha$ delimitada superiormente por $z = f(\alpha, y)$ e inferiormente por $z = 0$ no intervalo $[c, d]$.

Considere-se $n+1$ pontos do intervalo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, escolha-se em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto arbitrário α_i e defina-se

$$V_i = A(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Note que V_i dá uma aproximação ao volume da região delimitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = c$ e $y = d$.



As somas

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n,$$

dão-nos uma aproximação ao volume da região do espaço delimitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$. Se tomarmos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de amplitudes cada vez menores, prova-se que as somas $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ vão convergir para

$$V = \int_a^b A(x)dx,$$

que define rigorosamente o volume da região delimitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$. Como $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, tem-se

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

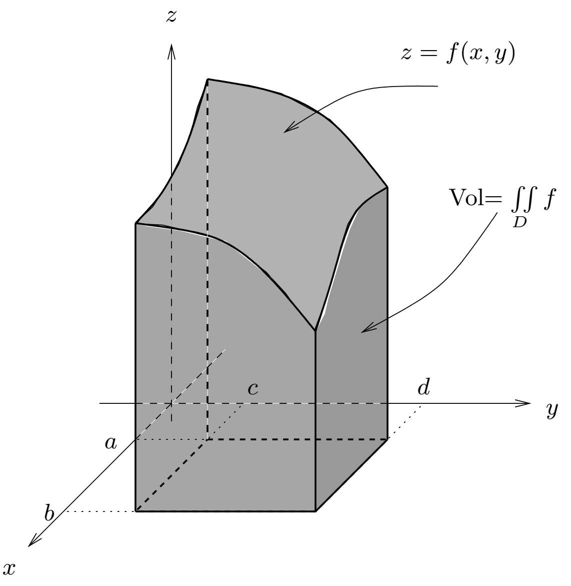
Se tivessemos fixado inicialmente, não a variável x, mas a variável y fazendo $y = \beta$ e se tivéssemos procedido de modo análogo obtínhamos

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Em resumo,

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

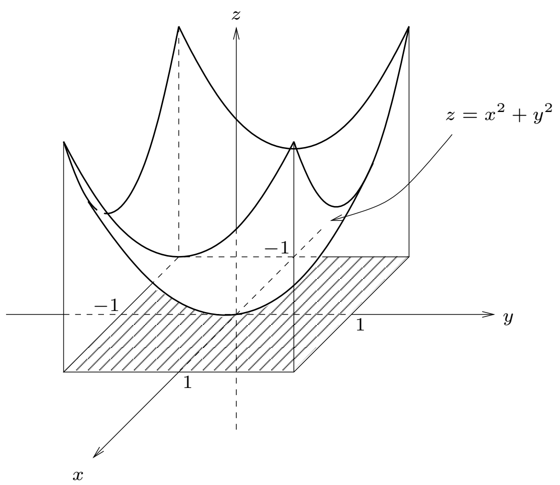
A este integral chamamos *integral duplo de f em D*.



Exemplo 28

Pretende-se calcular $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$,

$$D = [-1,1]\times[-1,1] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; -1\le x\le 1, \quad -1\le y\le 1\,\}.$$



Ora,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dx\right)dy\\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{-1}^{1}dy\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy\\
&= \frac{2}{3}\left[y+y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 29

Calcular $\displaystyle\iint_D y\sin x\,dx\,dy$,

$$D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 0\le x\le \frac{\pi}{2}, \quad 0\le y\le 2\,\}.$$

Tem-se,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D y\sin x\,dy\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 y\sin x\,dy\right)dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\sin x\,dx\\
&= -2\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= -2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=2.
\end{aligned}$$

Exemplo 30

Calcular

$$\iint\limits_D \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy,$$

sendo $D=[0,2]\times[0,1]$. Tem-se,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}dx\,dy &= \int_0^2\left(\int_0^1 \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx\\
&= \int_0^2\left[\frac{-2x}{x^2+y^2+1}\right]_0^1 dx\\
&= \int_0^2\left(-\frac{2x}{x^2+2}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\\
&= \Big[-\ln(x^2+2)+\ln(x^2+1)\Big]_0^2\\
&= -\ln\ 6+\ln\ 5+\ln\ 2-\ln\ 1=\ln\ \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

As propriedades operatórias estudadas para o integral definido admitem uma generalização para o integral duplo.

Propriedades do integral duplo

Sejam $f,g:D\to\mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então:

1. $\displaystyle\iint_D (f+g) = \iint_D f + \iint_D g.$

2. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\iint_D (\alpha f) = \alpha \iint_D f.$

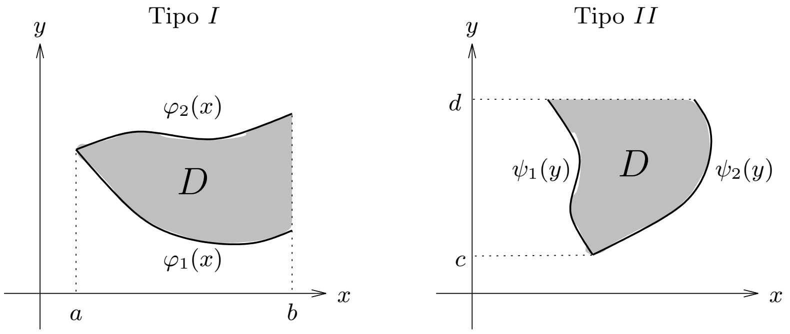
3. Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in D$, então $\displaystyle\iint_D f \quad \geq \quad \iint_D g.$

Vejamos agora como podemos estender a noção de integral duplo a domínios de um certo tipo designados por *domínios elementares*.

Definição 8 Dizemos que um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é *elementar* se for de um dos seguintes dois tipos:

(I) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\Big\}$, com φ_1 e φ_2 duas funções contínuas em $[a,b]$ com $\varphi_2 \geq \varphi_1$.

(II) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\Big\}$, com ψ_1 e ψ_2 duas funções contínuas em $[c,d]$ com $\psi_2 \geq \psi_1$.



Por outras palavras, um conjunto D é elementar se uma das variáveis tomar valores num intervalo fechado e limitado e a outra variável tomar valores entre os gráficos de duas funções contínuas. Os rectângulos são exemplos de conjuntos elementares simultaneamente dos dois tipos.

O integral duplo admite uma generalização natural para conjuntos elementares.
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num conjunto elementar D. Então:

1. Se D é do tipo I,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

2. Se D é do tipo II,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Se D é simultâneamente dos dois tipos,

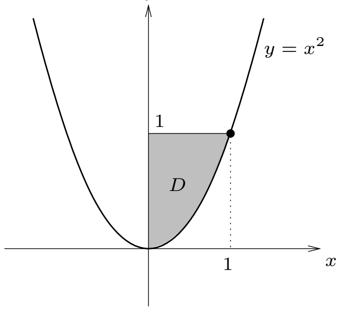
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplo 31

Pretende-se calcular

$$\iint\limits_D (x+y^3)dx\,dy,$$

em que $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1\}$



Daqui resulta que

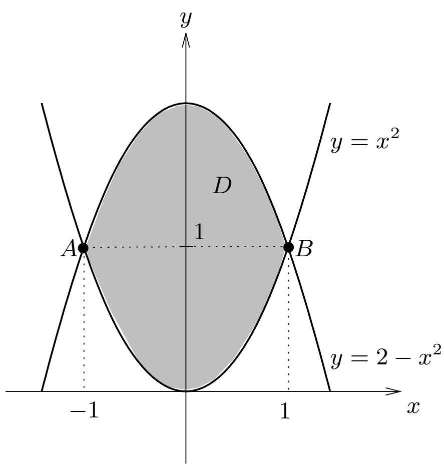
$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y^3)dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(x+y^3\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^4}{4}\right]_{x^2}^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{4} - x^3 - \frac{x^8}{4}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^9}{36}\right]_0^1 = \frac{17}{36}.
\end{aligned}$$

Exemplo 32

Pretende-se calcular

$$\iint\limits_D xe^{2y}\,dx\,dy,$$

em que D é o subconjunto elementar delimitado pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.



Para determinar os pontos de intersecção entre as duas curvas resolve-se o sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Obtemos os dois pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (1, 1)$. Daqui resulta que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D xe^{2y}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x^2}\left(xe^{2y}\right)dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{xe^{2y}}{2}\right]_{x^2}^{2-x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\left(e^{4-2x^2} - e^{x^2}\right)dx = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, quando o domínio do integral é um conjunto elementar dos dois tipos podemos escolher a ordem pela qual queremos efectuar a integração. Essa escolha prende-se, essencialmente, por duas razões: a primitivação ser mais fácil (ou ser possível) em ordem a uma das variáveis; os domínios de integração terem uma descrição mais simples enquanto conjuntos elementares de um dos tipos (I) ou (II).
Vejamos exemplos para os quais não é indiferente a ordem de integração.

Exemplo 33

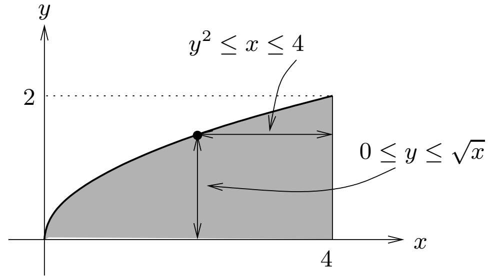
Pretende-se calcular

$$\int_0^2\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)dx\,dy.$$

A primitiva em ordem a x da função $y\cos(x^2)$ não é imediata nem pode ser calculada recorrendo à primitivação por partes nem por substituição, enquanto que a primitiva em ordem a y da função $y\cos(x^2)$ é $\frac{y^2}{2}\cos(x^2)$. Por essa razão vamos efectuar uma mudança na ordem de integração. O domínio de integração D é a região de $\mathbb{R}^2$,

$$\{(x,y) : y^2 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 2\} = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}\},$$

atendendo a que $x = y^2$ com $x \ge 0$ é equivalente a $y = \sqrt{x}$.



Assim teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)dx \right) dy \quad &\overset{\text{Mud. ordem integ.}}{=\!=} \quad \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)dy \right) dx \\
&= \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2}\cos(x^2) \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^4 \frac{x}{2}\cos(x^2)dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^4 \cos(x^2)2xdx \\
&= \frac{1}{4}\Big[\sin(x^2)\Big]_0^4 \\
&= \frac{1}{4}\sin(16).
\end{aligned}$$

Exemplo 34

Pretende-se calcular

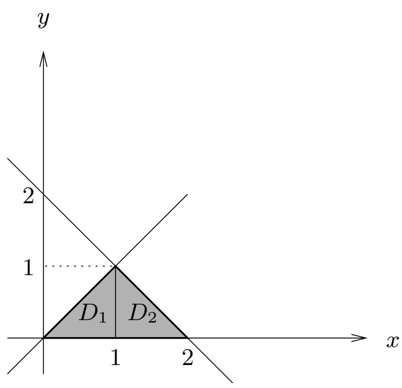
$$\iint_D 2xydx\,dy,$$

onde $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x,\ x+y \le 2\}$. Vamos começar por calcular o integral, integrando em primeiro lugar em ordem à variável y. Para isso temos que considerar a partição de D nos conjuntos

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\},$$

e

$$D_2 = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2-x\}.$$



Nessa altura vem

$$\begin{aligned}\iint_D 2xy\,dx\,dy &= \iint_{D_1} 2xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} 2xy\,dx\,dy\\ &= \int_0^1\int_0^x 2xy\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} 2xy\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Se trocarmos a ordem de integração o cálculo do integral fica simplificado:

$$\begin{aligned}\iint_D 2xy\,dx\,dy &= \int_0^1\int_y^{2-y} 2xy\,dx\,dy\\ &= \int_0^1 [x^2y]_y^{2-y}dy\\ &= \int_0^1 \left[(2-y)^2y - y^3\right]dy\\ &= \int_0^1 (4y-4y^2)dy\\ &= \left[2y^2 - \frac{4}{3}y^3\right]_0^1\\ &= 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

A escolha da ordem de integração facilitou o cálculo do integral.

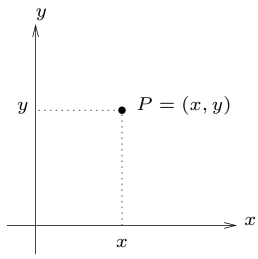
Mudança de variável para coordenadas polares

No cálculo do integral definido era por vezes necessário proceder a uma mudança de variável (integração por substituição) de modo a facilitar (possibilitar) o cálculo da primitiva da função integranda.

Também no integral duplo é preciso, por vezes, recorrer a mudanças de variável agora com o duplo objectivo de simplificar (possibilitar) a integração e a descrição do domínio de integração.

Estudaremos apenas a mudança de variável para coordenadas polares, que passamos a definir.

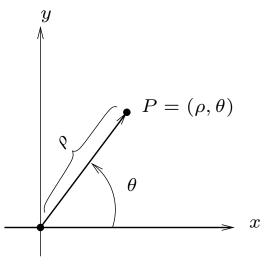
É usual referenciar um ponto P de $\mathbb{R}^2$ pelas suas *coordenadas cartesianas*, (x, y), isto é, $P = (x, y)$.



Vejamos como referenciar um ponto num sistema dito de coordenadas polares.

Seja O a origem do referencial. Um ponto $P \neq O$ fica referenciado pela respectiva distância a O, que designamos por ρ ($\rho > 0$) e pelo ângulo que $\vec{OP}$ fez com o eixo xx, que designamos por θ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

Ao par (ρ, θ) chamamos *coordenadas polares de* P.



É fácil de ver as relações entre as coordenada cartesianas e as polares de um ponto:

$$(x, y) \mapsto (\rho, \theta) : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{e} \quad (\rho, \theta) \mapsto (x, y) : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

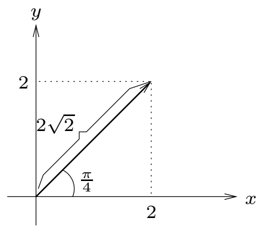
Exemplo 35

Mudança de coordenadas cartesianas para polares:

$$(x, y) = (2, 2) \mapsto (\rho, \theta) = \left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2}, \qquad \theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

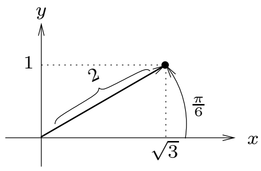
isto é, $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Exemplo 36

Mudança de coordenadas polares para cartesianas:

$$(\rho, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right) \mapsto (x, y) = \left(2\cos\frac{\pi}{6}, \ 2\sin\frac{\pi}{6}\right) = (\sqrt{3}, \ 1).$$



O sistema de coordenadas polares adapta-se particularmente bem à descrição de certos tipos de conjuntos. Por exemplo, o conjunto dos pontos descritos pela equação $x^2+y^2 = 1$ é descrito em coordenadas polares pela equação $\rho = 1$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$. O conjunto dos pontos descritos pela inequação $x^2 + y^2 \leq 1$ é descrito em coordenadas polares pela inequação $\rho \leq 1$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$.

Quando o domínio de integração D é facilmente descrito com recurso às coordenadas polares (por exemplo no caso de círculos ou sectores circulares, etc. . .) e a função integranda f tem uma expressão simples em coordenadas polares, uma mudança de variáveis para coordenadas simplifica, em geral, o cálculo do integral. Tem-se o seguinte resultado:

> Sejam D' um conjunto elementar descrito em coordenadas polares (ρ, θ) e D o mesmo conjunto descrito em coordenadas cartesianas (x, y).
> Seja f é uma função contínua em D. Então:
>
> $$\iint_D f(x, y)dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta.$$

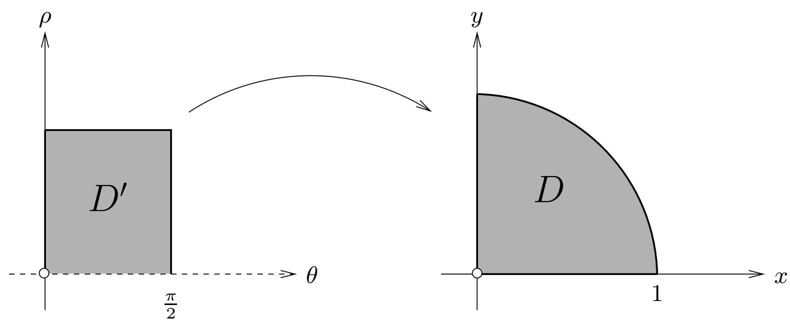
Exemplo 37

Calcular

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dx\,dy,$$

onde $D = \Big\{(x,y) \ : \ x,y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1\Big\}$. Em coordenadas polares este domínio de integração vem dado por

$$D' = \Big\{(\rho,\theta) \ : \rho \in]0,1], \quad \theta \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]\Big\}.$$



Fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dx\,dy &= \iint\limits_{D'} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 e^{-\rho^2}(-2\rho)d\rho\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[e^{-\rho^2}\Big]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{2}(e^{-1}-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= (1-e^{-1})\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Aplicação do integral duplo ao cálculo de volumes e de áreas

Como vimos atrás, se $f(x,y) \geq 0$ em D, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ é o volume da região limitada, em D, superiormente pelo gráfico de f e inferiormente por $z=0$.

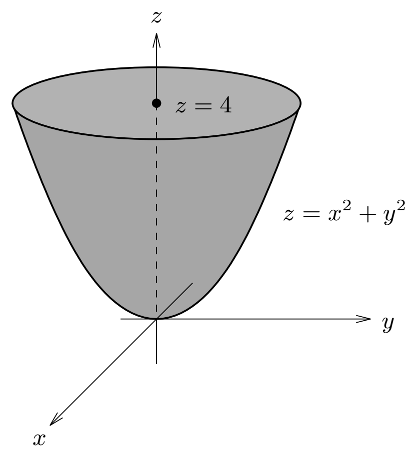
Este resultado generaliza-se (tal como foi feito para o integral definido para o cálculo de áreas): considerando duas funções f e g definidas em D e tais que $f \geq g$ em D,

$$\iint\limits_D (f-g)dxdy,$$

é exactamente o volume da região V delimitada, em D, superiormente pelo gráfico de f e inferiormente pelo gráfico de g, sendo D a projecção no plano $x0y$ da região V.

Exemplo 38

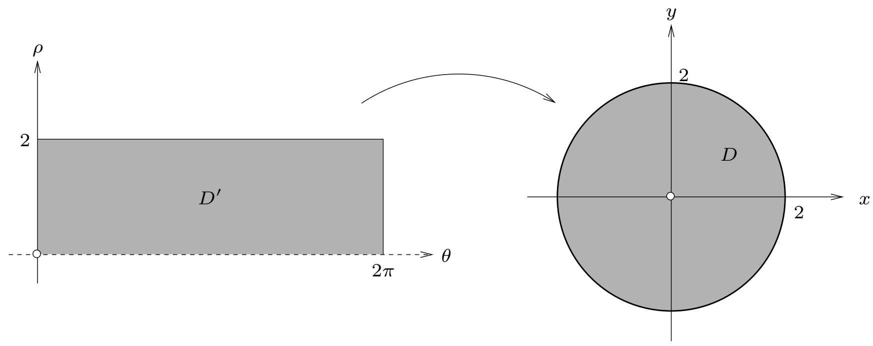
Pretendemos calcular o volume do sólido V limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.



A região V está limitada superiormente pela função constante $z = 4$ e inferiormente pela função $z = x^2 + y^2$. A intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = 4$ define circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Daqui concluímos que a projecção de V no plano $x0y$ é o círculo $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Portanto o volume de V é dado pelo integral

$$\iint\limits_D (4 - (x^2 + y^2))dx\,dy.$$

Efectuando a mudança de variável para coordenadas polares

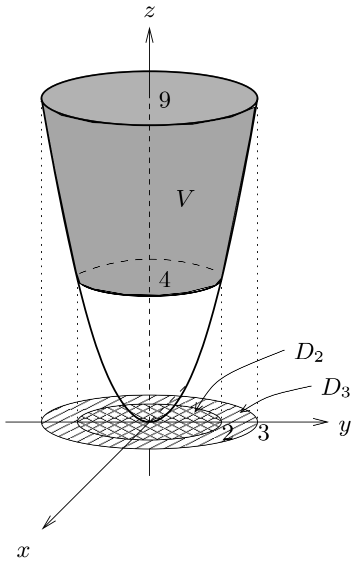


obtemos

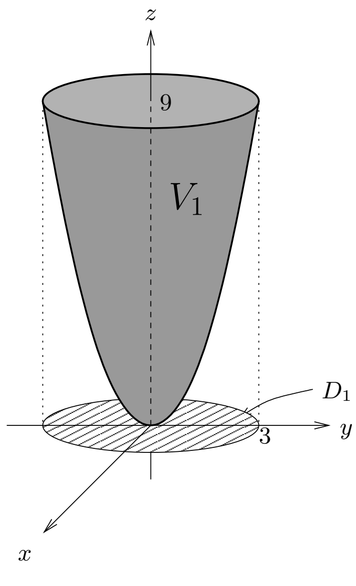
$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \iint\limits_D (4-x^2-y^2)dx\,dy \\
&= \iint\limits_{D'} (4-\rho^2)\rho d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (4-\rho^2)\rho\, d\rho\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(8-\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\right) d\theta \\
&= 16\pi - 4\,[\theta]_0^{2\pi} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

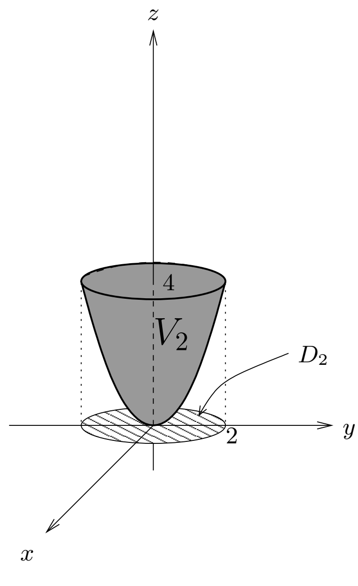
Exemplo 39

Pretende-se determinar o volume do sólido V limitado pelo paraboloide elíptico $z = x^2+y^2$ e pelos planos $z=4$ e $z=9$.



O volume de V obtém-se fazendo a diferença dos volumes dos sólidos V_1 e V_2, sendo V_1 [resp. V_2] limitado superiormente pelo plano $z = 9$ [resp. $z = 4$] e ambos limitados inferiormente pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.





A intersecção do plano $z = 9$ com o paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$ define a circunferência de raio 3, situada no plano $z = 9$ cujo centro é $(0, 0, 9)$. Daqui resulta que a projecção de V_1 no plano $x0y$ é o círculo centrado na origem de raio 3 que vamos denotar D_3. Analogamente a intersecção do plano $z = 4$ com o paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$ define a circunferência de raio 2, situada no plano $z = 4$ cujo centro é $(0, 0, 4)$ e portanto a projecção de V_2 é disco de raio 2, que vamos notar D_2.

Assim

$$\text{vol}(V) = \iint_{D_3} (9 - (x^2 + y^2))dx\,dy - \iint_{D_2} (4 - (x^2 + y^2))dx\,dy.$$

Efectuando uma mudança de variável para coordenadas polares vem

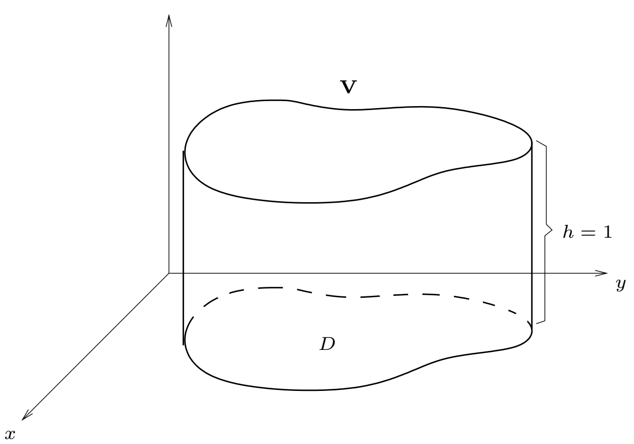
$$\begin{aligned}
&\iint_{D_3} (9 - (x^2 + y^2))dx\,dy - \iint_{D_2} (4 - (x^2 + y^2))dx\,dy \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - \rho^2)\rho d\rho\,d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho\,d\theta \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^3 - \left[2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^2 \right) \\
&\qquad = 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} - 8 + 4 \right) = \frac{65}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Podemos também utilizar o integral duplo para calcular áreas de regiões do plano.

De facto, se calcularmos

$$\iint_D 1\,dxdy,$$

estamos a calcular o volume da região V, limitada superiormente por $f(x, y) = 1$ e inferiomente por $z = 0$.



Assim,

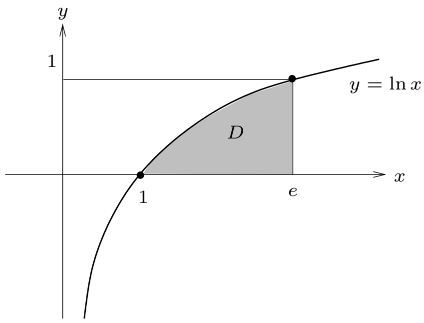
$$\iint_D 1\,dx\,dy \quad = \quad \text{volume de } V \quad = \quad \text{área } D \times \text{altura} \quad = \quad \text{área } D.$$

Exemplo 40

Vejamos como calcular a área do subconjunto

$$D = \{(x, y)\ :\ 1 \leq x \leq e, \quad 0 \leq y \leq \ln x\},$$

usando um integral duplo.



Assim teremos

$$\begin{aligned}
\text{Área}(D) &= \iint_D dx\,dy \\
&= \int_1^e \left(\int_0^{\ln x} dy\right) dx \\
&= \int_1^e 1 \cdot \ln x\,dx \\
&\overset{\text{por partes}}{=} \Big[x \ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx \\
&= e \ln e - \ln 1 - (e-1) = 1.
\end{aligned}$$

Exercícios 4

1. Calcular:

   (a) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x+1}\,dxdy,\ D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2\}.$

   (b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (x+y)\,dydx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^2\int_{-1}^1 ye^{xy}\,dydx.$

   (d) $\displaystyle\iint_D \cos x\sin y\,dxdy,\ D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

2. Calcule os integrais e represente os domínios de integração:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dydx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^2\int_{2x}^{3x+1} x\,dydx.$

   (c) $\displaystyle\int_1^e\int_{\ln y}^1 ye^x\,dxdy.$

   (d) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\ D=\{(x,y):x\ge 0,\ x\le 4-4y^2\}.$

   (e) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D=\{(x,y):x\ge 0,\ y\ge 0,\ 3x+y\le 9\}.$

3. Considere o quadrado $Q=[-1,1]\times[0,2]$, e a função $f(x,y)=|y-x^2|$. Calcule $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\,dxdy.$

4. Inverta a ordem de integração e calcule o integral.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 (x^2+y^3x)\,dxdy.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 3xe^{x^3}\,dxdy.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin(xy)\, dydx.$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)^2\, dxdy.$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx.$

5. Represente a região de integração e inverta a ordem de integração.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\, dydx.$

(c) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x,y)\, dy\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x f(x,y)\, dy\right) dx +$
$\displaystyle+ \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\right) dx.$

6. Calcule o volume da região limitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 2$.

7. Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $4 - z = x^2 + y^2$ e $9 - 3z = x^2 + y^2$.

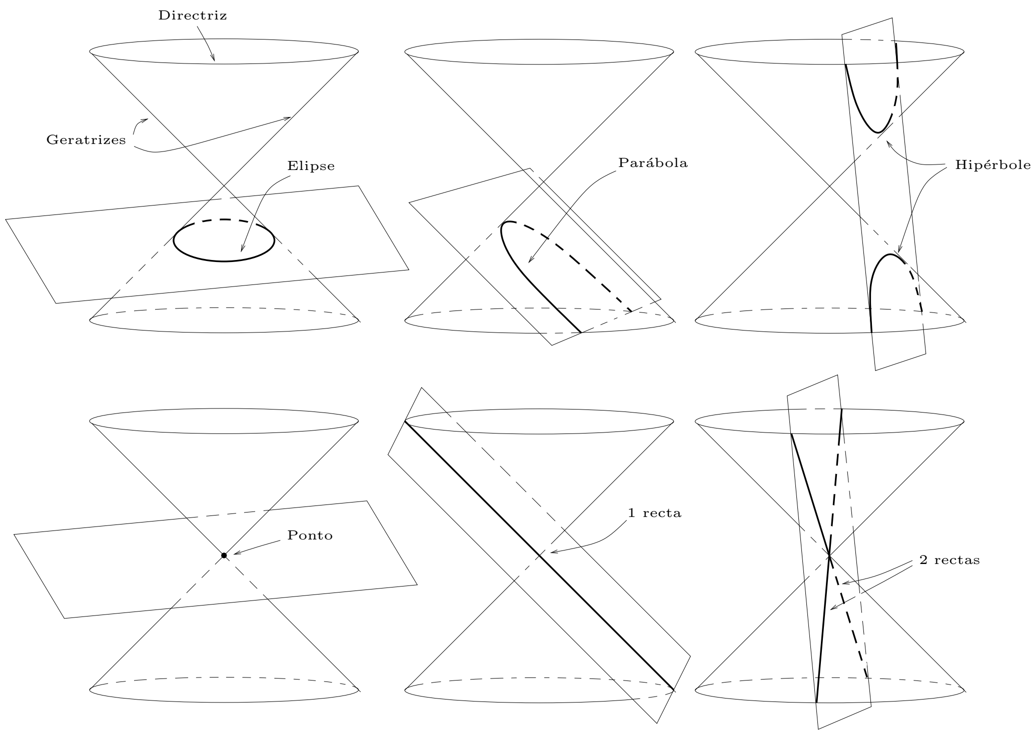
8. Calcule o volume da região $R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ z \geq x^2+y^2\}$.

9. Calcule a área de $D = \{(x,y) :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.

Apêndice A

Cónicas

Chama-se *cónica* à curva de intersecção de uma superfície cónica de revolução com um plano arbitrário.

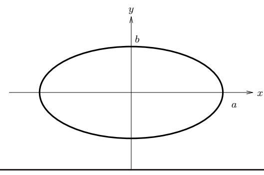
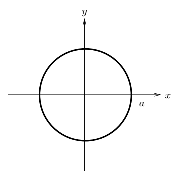
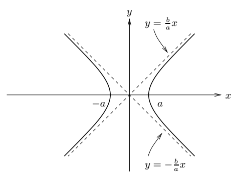
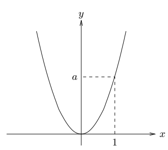


As elipses, parábolas e hipérboles são designadas por *cónicas não degeneradas*. As restantes intersecções designam-se por *cónicas degeneradas* e ocorrem quando o plano passa pelo vértice da superfície cónica.

Uma cónica é sempre descrita por uma equação do 2º grau em duas variáveis,

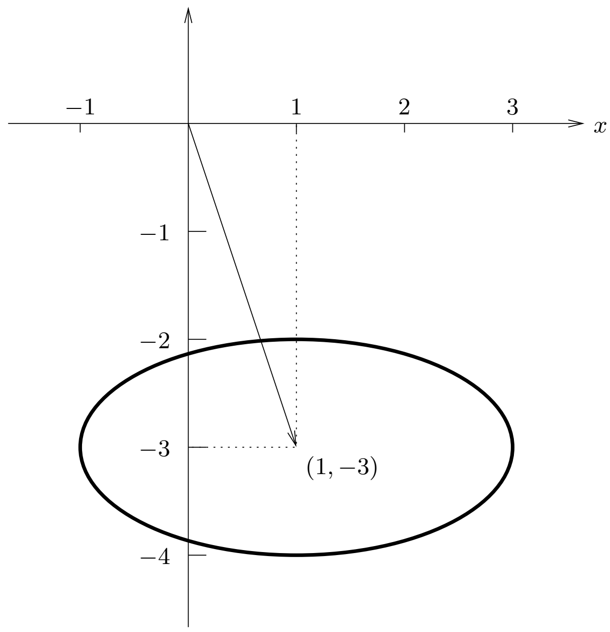
$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,x\,y + D\,x + E\,y + F = 0, \qquad A, B, \ldots, F \in \mathbb{R}.$$

Apenas vamos considerar cónicas não degeneradas.

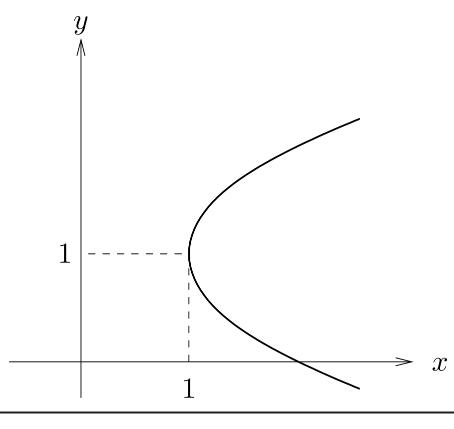
Cónicas definidas por equações na forma reduzida		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse	
$x^2 + y^2 = a^2$	Circunferência	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbole	
$y = a\,x^2$	Parábola	

Observações:

Se nas equações anteriores substituirmos x e y por, respectivamente, $x - x_0$ e $y - y_0$, obtemos equações não reduzidas de cónicas que são uma translação das anteriores (definida pelo vector (x_0, y_0)).
Por exemplo, $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y+3)^2 = 1$, é a elipse de centro $(1, -3)$ e semi-eixos 2 e 1, representada na figura



Se permutarmos nas equações anteriores as variáveis x, y entre si, vamos alterar a orientação da curva relativamente aos eixos coordenados.
Por exemplo, a equação $x - 1 = (y - 1)^2$ é a equação da parábola de vértice $(1, 1)$ orientada segundo o eixo dos xx, representada na seguinte figura.



Apêndice B

Quádricas

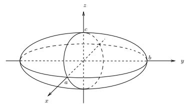
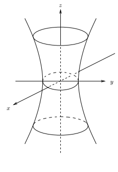
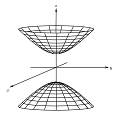
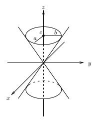
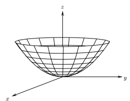
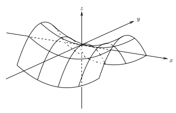
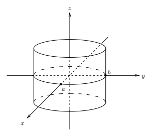
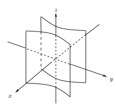
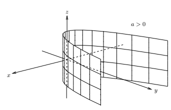
Uma superfície quádrica é uma superfície definida por uma equação polinomial do 2^o grau em três variáveis,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

em que $A, B, \ldots, J$ são constantes reais.

À semelhança do que ocontece para as cónicas, também podemos ter *quádricas degeneradas* e *quádricas não degeneradas*.

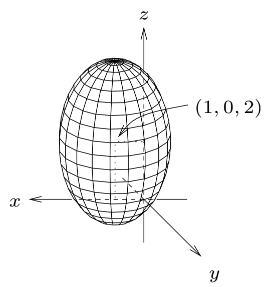
Apenas vamos considerar quádricas não degeneradas.

Quádricas definidas por equações na forma reduzida		
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Elipsoide E	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Hiperboloide de 1 folha H_1	
$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Hiperboloide de 2 folhas H_2	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	Cone C	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$	Paraboloide Elíptico PE	
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$	Paraboloide Hiperbólico PH	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro Elíptico CE	
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro Hiperbólico CH	
$a\,x^2=y$	Cilindro Parabólico CP	

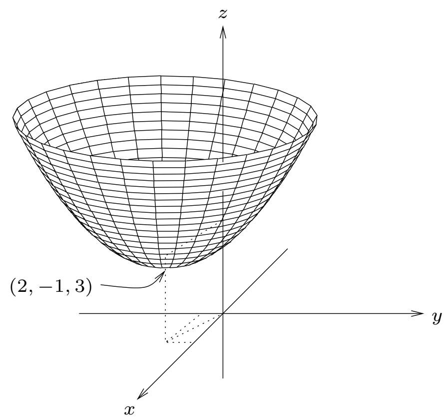
Observações:

Se nas equações anteriores substituirmos x, y e z respectivamente por $x-x_0$, $y-y_0$ e $z-z_0$, obtemos equações não reduzidas de quádricas que são uma translação das anteriores (definida pelo vector (x_0, y_0, z_0)).

Por exemplo, $\dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 + \dfrac{(z-2)^2}{9} = 1$, é o elipsoide de centro $(1, 0, 2)$ e semi-eixos 2,1 e 3, representado na figura



e $(x-2)^2 + (y+1)^2 = z - 3$, é o paraboloide de vértice $(2, -1, 3)$, representado na seguinte figura.



Se permutarmos nas equações anteriores as variáveis x, y, z entre si, vamos alterar a orientação dessa superfície relativamente aos eixos coordenados.

Por exemplo, as equações $\dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = x^2$ e $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = y^2$ definem os cones representados na seguinte figura.