Tópicos de cálculo para funções de várias variáveis

Exercícios e soluções abreviadas

Instituto Superior de Agronomia

- 2015 -

Capítulo 1

Tópicos de cálculo diferencial

1.1 Domínio, curva de nível e gráfico. Superfícies quádricas. Continuidade.

Exercícios 1

1. Determine o domínio das seguintes funções e represente-o geometricamente:

   (a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

   Solução: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

   (b) $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \sqrt{1-x}$.

   Solução: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x \leq 1 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$.

   (c) $f(x,y) = \frac{\ln(3-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

   Solução: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3 \wedge (x,y) \neq (0,0)\}$.

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y-1}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 1\}$.

(e) $f(x, y) = \sqrt{x(y - x^2)}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq x^2) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq x^2)\}$.

(f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}+1}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$.

2. Identifique os conjuntos de nível e esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = 3$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & , k = 3 \\ \emptyset & , k \neq 3; \end{cases}$
$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3\}$ (plano $z = 3$).

(b) $f(x, y) = x$.

Solução: $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = k\},\ k \in \mathbb{R}$;
$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}$ (plano $z = x$).

(c) $f(x, y) = x^2$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$
$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2\}$ (cilindro parabólico, cuja intersecção com qualquer plano $y = b$ é a parábola $z = x^2$).

(d) $f(x,y) = |x| = \begin{cases} x & ,x \geq 0 \\ -x & ,x < 0. \end{cases}$

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} & ,k = 0 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = k \vee x = -k\} & ,k > 0 \\ \emptyset & ,k < 0; \end{cases}$

$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z = x \wedge x \geq 0) \vee (z = -x \wedge x < 0)\}$ (reunião dos dois semi-planos $z = x \wedge x \geq 0$ e $z = -x \wedge x < 0$).

(e) $f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(0,0)\} & ,k = 0 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k^2\} & ,k > 0 \\ \emptyset & ,k < 0; \end{cases}$

$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ($z^2 = x^2 + y^2 \wedge z \geq 0$, semi-cone superior com o vértice em (0,0,0) e orientado segundo o eixo dos zz).

(f) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(0,0)\} & ,k = 0 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\} & ,k > 0 \\ \emptyset & ,k < 0; \end{cases}$

$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ (paraboloide elíptico com o vértice em (0,0,0) e orientado segundo o semi-eixo positivo dos zz).

(g) $f(x,y) = e^{-x^2 - 2y^2}$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(0,0)\} & ,k = 1 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{-\ln k} + \frac{y^2}{(-\ln k)/2} = 1\} & ,0 < k < 1 \\ \emptyset & ,k \leq 0 \vee k > 1; \end{cases}$

$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-2y^2}\}$.

3. Relativamente a cada uma das funções indicadas nas alíneas (f) e (g) do exercício anterior:

   (a) Defina a curva de nível que passa no ponto $(1, 1)$.

   Solução: (f) $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$;
   (g) $C_{e^{-3}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3/2} = 1\}$.

   (b) Diga, justificando, se o ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao respectivo gráfico.

   Solução: Não, pois $f(1, 1) \neq 1$ em ambos os casos.

   (c) Determine o respectivo contradomínio.

   Solução: (f) $CD = [0, +\infty[$; (g) $CD =]0, 1]$.

4. Defina analitica e geometricamente as curvas de nível para as seguintes funções, indicando em cada caso o respectivo domínio:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{x + y}}$.

   Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y > -x) \vee (x \leq 0 \wedge y < -x)\}$;

$$C_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \setminus \{(0, 0)\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1-k^2}{k^2}\, x\} \setminus \{(0, 0)\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k \leq 0; \end{cases}$$

   C_0 é o eixo dos yy excepto o ponto (0,0). Quando $k > 0$, C_k é a recta $y = \frac{1-k^2}{k^2}\, x$ excepto o ponto (0,0).

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$.

Solução: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$;

$$C_k = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y \neq 0\} & , k = 0 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{k}\,x^2 \wedge y \neq 0\} & , k \neq 0; \end{cases}$$

C_0 é o eixo dos yy excepto o ponto (0,0). Quando $k \neq 0$, C_k é a parábola $y = \frac{1}{k}\,x^2$ excepto o ponto (0,0).

5. Identifique analitica e geometricamente os conjuntos de nível das seguintes funções:

   (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   Solução: $C_k = \begin{cases} \{(0,0,0)\} & , k = 0 \\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$

   Quando $k > 0$, C_k é a esfera centrada em $(0,0,0)$ e de raio $\sqrt{k}$.

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

   Solução: $C_k = \begin{cases} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y = 0\} & , k = 0 \\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = k\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$

   C_0 é o eixo dos zz. Quando $k > 0$, C_k é o cilindro elíptico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a circunferência centrada em $(0,0,c)$ e de raio $\sqrt{k}$.

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

   Solução: $C_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z + k\}$, $k \in \mathbb{R}$, é um paraboloide elíptico com o vértice em $(0,0,-k)$ e orientado segundo o semi-eixo positivo dos zz.

6. Determine uma função para a qual:

(a) $y = 3x + 4$ é uma curva de nível.

Solução: $y = 3x + 4$ é, por exemplo, a curva de nível 4 de $f(x, y) = y - 3x$.

(b) $x^2 - y = 1$ é uma curva de nível.

Solução: $x^2 - y = 1$ é, por exemplo, a curva de nível 0 de $f(x, y) = x^2 - y - 1$.

(c) $x^2 - y = 1$ é uma superfície de nível.

Solução: $x^2 - y = 1$ é, por exemplo, a superfície de nível 0 de $f(x, y, z) = x^2 - y - 1$.

(d) $x^2 + y^2 = 4$ é uma superfície de nível.

Solução: $x^2 + y^2 = 4$ é, por exemplo, a superfície de nível 4 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

1.2 Derivadas parciais. Plano tangente.

Exercícios 2

1. Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = x^3\, y - 2x\, y^2 + x^4$.

Solução: $f'_x(x, y) = 3x^2y - 2y^2 + 4x^3$; $f'_y(x, y) = x^3 - 4xy$.

(b) $f(x, y) = 2x\,\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Solução: $f'_x(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$; $f'_y(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

(c) $f(x,y) = x^3 + \cos(x+3y)$.

Solução: $f'_x(x,y) = 3x^2 - \sin(x+3y)$; $f'_y(x,y) = -3\sin(x+3y)$.

(d) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

Solução: $f'_x(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$; $f'_y(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2+1}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

(e) $f(x,y) = e^{-y^2}\cos(x^2+y^2)$.

Solução: $f'_x(x,y) = -2xe^{-y^2}\sin(x^2+y^2)$; $f'_y(x,y) = -2ye^{-y^2}(\cos(x^2+y^2) + \sin(x^2+y^2)$.

(f) $f(x,y) = \ln(\frac{x}{y^2})$.

Solução: $f'_x(x,y) = \frac{1}{x}$; $f'_y(x,y) = -\frac{2}{y}$.

(g) $f(x,y,z) = (2x-y+z)e^{x-y}$.

Solução: $f'_x(x,y,z) = e^{x-y}(2+2x-y+z)$; $f'_y(x,y,z) = -e^{x-y}(1+2x-y+z)$; $f'_z(x,y,z) = e^{x-y}$.

2. Considere a função $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

   Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

   Solução: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{1}{4}$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,0) = x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(1,y) = y + e^{-y}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$.

   Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

Solução: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$.

4. Indique uma equação do plano tangente ao gráfico de:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$ em $(1,3,f(1,3))$.

   Solução: $\frac{15}{121}(x-1) + \frac{1}{121}(y-3) - (z + \frac{2}{11}) = 0$.

   (b) $f(x,y) = x^3 - xy + e^y$ em $(-1,0,0)$.

   Solução: $3(x+1) + 2y - z = 0$.

   (c) $f(x,y) = \sin(3x + ye^x)$ em $(0,0,f(0,0))$.

   Solução: $3x + y - z = 0$.

5. Calcule as derivadas parciais até à 2ª ordem e indique as matrizes Jacobiana e Hessiana de:

   (a) $f(x,y) = x$.

   Solução: $J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y\ln x$.

   Solução: $J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x + \frac{y}{x} & \ln x \end{bmatrix}$; $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $f(x,y,z) = \ln(x + y^2 + z^2)$.

   Solução: $J(x,y) = \frac{1}{x+y^2+z^2}\begin{bmatrix} 1 & 2y & 2z \end{bmatrix}$;

$$H(x,y,z) = \frac{1}{(x+y^2+z^2)^2}\begin{bmatrix} -1 & -2y & -2z \\ -2y & 2x-2y^2+2z^2 & -4yz \\ -2z & -4yz & 2+2y^2-2z^2 \end{bmatrix}.$$

(d) $f(x,y) = \|(x,y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solução: $J(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$;
$H(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$.

(e) $f(x,y) = x\,\|(x,y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solução: $J(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$;
$H(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\begin{bmatrix} 2x^3+3xy^2 & y^3 \\ y^3 & x^3 \end{bmatrix}$.

1.3 Extremos livres

Exercícios 3

1. Determine os pontos críticos das seguintes funções e estude a sua natureza:

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Solução: (0,0) é um ponto de sela e $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$ são mínimos.

(b) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 8x^2y^2 + 12x^3$.

Solução: (0,0) é um ponto de sela e $f(-9,0) = -2187$ é um mínimo.

(c) $f\,(x,y) = (x-1)\,(3-x)\,y^3 - y$.

Solução: $(2,\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(2,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ são pontos de sela.

(d) $f(x,y) = x + y + 1/x + 4/y$.

Solução: (1,-2) e (-1,2) são pontos de sela, $f(1,2) = 6$ é um mínimo e $f(-1,-2) = -6$ é um máximo.

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

Solução: (0,0) é um ponto de sela, $f(-1,1) = -2$ e $f(1,-1) = -2$ são mínimos.

2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 + ay^2$, com $-1 \leq a \leq 1$.

(a) Analise, para os diferentes valores de a, a existência de extremos locais da função f.

Solução: Para $a > 0$, $f(0,0) = 0$ é um mínimo; para $a < 0$, $(0,0)$ é um ponto de sela; para $a = 0$, $f(0,y) = 0$ é um mínimo qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$.

(b) Interprete geometricamente o problema.

Solução: O gráfico de f é: para $a > 0$, o parabolóide elíptico $z = x^2 + \frac{y^2}{1/a}$ com o vértice em (0,0,0) e orientado segundo o semi-eixo positivo dos zz; para $a < 0$, o parabolóide hiperbólico $z = x^2 - \frac{y^2}{1/-a}$; para $a = 0$, o cilindro parabólico $z = x^2$.

3. Seja $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$, em que k é uma constante.

(a) Mostre que f admite um ponto crítico em $(0,0)$ independente do valor de k.

Solução: $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

(b) Para que valores de k o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela? Justifique a resposta.

Solução: Para $k < -2 \vee k > 2$, porque det $H_f(0,0) < 0$ ($f(0,0)$ é mínimo para os restantes valores de k).

4. Calcule, justificando convenientemente, os valores de a, b e c para que

$$f(x,y) = a - (x^2 + bx + y^2 + cy)$$

tenha um máximo de valor 15 no ponto $(-2,1)$.

Solução: A solução do sistema $\begin{cases} f'_x(-2,1) = 0 \\ f'_y(-2,1) = 0 \\ f(-2,1) = 15 \end{cases}$ é $a = 10$, $b = 4$, $c = -2$.

5. Prove que $(1,1,1)$ é um ponto crítico de $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ e determine a sua natureza.

Solução: $f'_x(1,1,1) = f'_y(1,1,1) = f'_z(1,1,1) = 0$; $f(1,1,1)$ é um mínimo.

Capítulo 2

Integrais duplos

Exercícios 4

1. Calcular:

   (a) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x+1}dxdy,\ D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2\}.$

   Solução: $\frac{3}{2}\ln 2$.

   (b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (x+y)\,dydx.$

   Solução: 2.

   (c) $\displaystyle\int_0^2\int_{-1}^1 ye^{xy}\,dydx.$

   Solução: $\frac{1}{2}(e^2-\frac{1}{e^2})-2$.

   (d) $\displaystyle\iint_D \cos x\sin y\,dxdy,\ D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

   Solução: 1.

2. Calcule os integrais e represente os domínios de integração:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx.$

   Solução: $\frac{1}{3}$.

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{2x}^{3x+1} x\, dydx.$

   Solução: $\frac{14}{3}$.

   (c) $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln y}^{1} ye^x\, dxdy.$

   Solução: $\frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{1}{3}$.

   (d) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy,\ D = \{(x,y) : x \geq 0,\ x \leq 4 - 4y^2\}.$

   Solução: 0.

   (e) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy,\ D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 9\}.$

   Solução: $\frac{405}{2}$.

3. Considere o quadrado $Q = [-1,1] \times [0,2]$, e a função $f(x,y) = |y - x^2|$. Calcule $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\, dxdy.$

   Solução: $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{x^2} -y + x^2\, dydx + \int_{-1}^0 \int_{x^2}^{2} y - x^2\, dydx + \int_0^1 \int_0^{x^2} -y + x^2\, dydx$
   $\displaystyle+ \int_0^1 \int_{x^2}^{2} y - x^2\, dydx = \frac{46}{15}.$

4. Inverta a ordem de integração e calcule o integral.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^3 x)\, dxdy.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^3 x)\, dydx = \frac{9}{40}.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 3xe^{x^3}\, dxdy.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x 3xe^{x^3}\, dydx = e - 1.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin(xy)\, dydx.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y y^2 \sin(xy)\, dxdy = \frac{1-\sin 1}{2}.$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)^2\, dxdy.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} (x+y)^2\, dydx = \frac{13}{6}.$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} \cos\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dxdy = \frac{2}{3}\left(\sin(1) - \sin(\frac{1}{2})\right).$

5. Represente a região de integração e inverta a ordem de integração.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dxdy.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\, dydx.$

Solução: $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\,dxdy.$

(c) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x,y)\,dy\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right) dx +$
$\displaystyle + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx.$

Solução: $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy.$

6. Calcule o volume da região limitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 2$.

   Solução: $\dfrac{8\pi}{3}$.

7. Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $4 - z = x^2 + y^2$ e $9 - 3z = x^2 + y^2$.

   Solução: $\dfrac{3\pi}{4}$.

8. Calcule o volume da região $R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ z \geq x^2+y^2\}$.

   Solução: $\dfrac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$.

9. Calcule a área de $D = \{(x,y) :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.

   Solução: 8π.