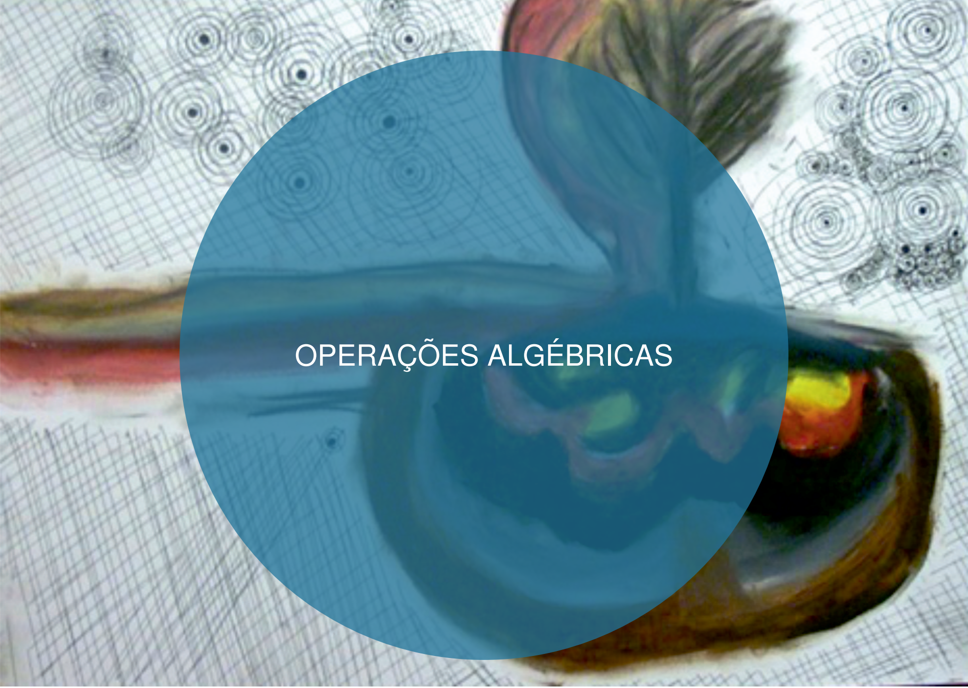
MAS QUE CÁLCULOS SÃO ESTES?!

Isabel Martins, Maria João Martins, Emília Pinto • ISA •
isabelinha@isa.ulisboa.pt, mjmartins@isa.ulisboa.pt, mila@isa.ulisboa.pt

ESTA APRESENTAÇÃO TRANSCREVE RESPOSTAS ENCONTRADAS NAS AVALIAÇÕES DE ANÁLISE MATEMÁTICA DE 2014/2015 QUE CONTÊM ERROS IMPORTANTES EM MATÉRIAS LECIONADAS NOS ENSINOS BÁSICO E SECUNDÁRIO. A MAIOR PARTE DESTES ERROS OCORRE TODOS OS ANOS E EM CADA ANO COM ALGUMA FREQUÊNCIA.

Índice



OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

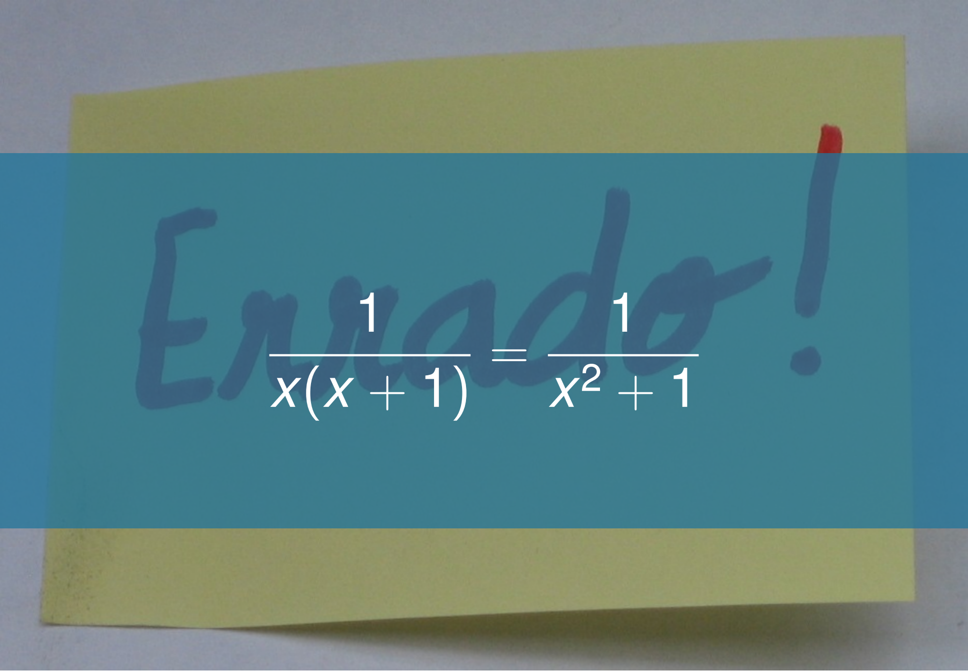
A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DO PRODUTO EM RELAÇÃO À SOMA DE NÚMEROS REAIS

$$a(b + c) = ab + ac$$

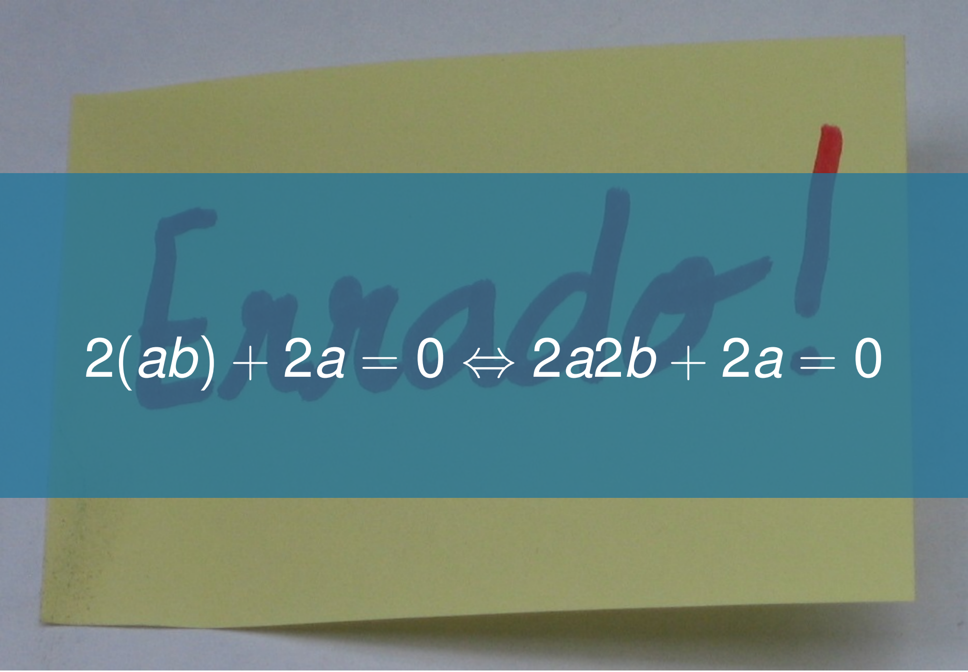
E A PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DO PRODUTO DE NÚMEROS REAIS

$$a(bc) = (ab)c$$

NEM SEMPRE SÃO USADAS CORRETAMENTE. EIS DOIS EXEMPLOS.



$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$



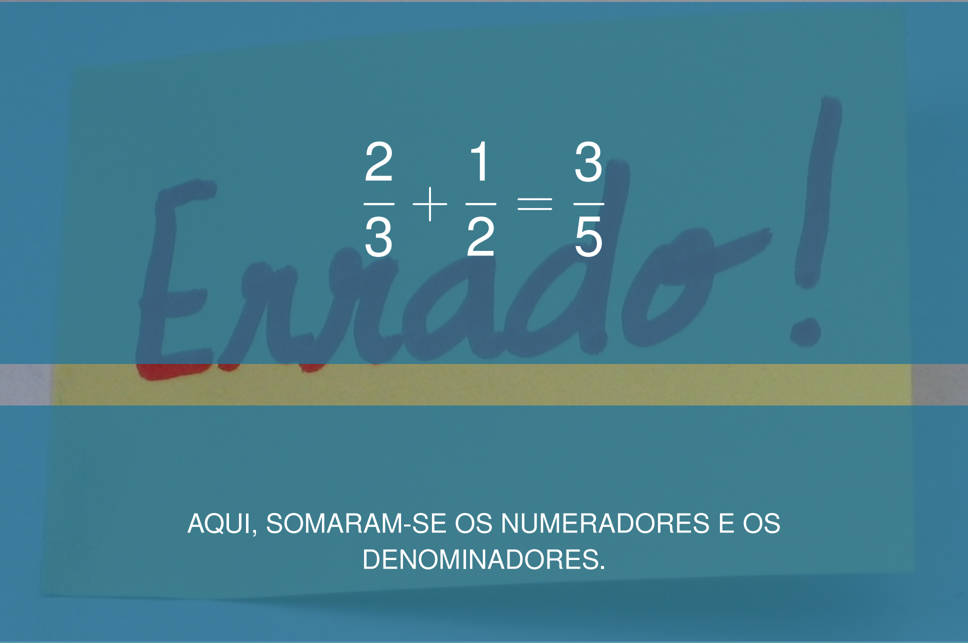
$$2(ab) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a2b + 2a = 0$$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

A SOMA (DIFERENÇA) DE FRAÇÕES É FEITA REDUZINDO-AS AO MESMO DENOMINADOR E A SEGUIR SOMANDO (SUBTRAINDO) OS NUMERADORES E MANTENDO O DENOMINADOR. EIS ALGUMAS RESPOSTAS.

$$1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4}$$

OU SEJA, DEPOIS DA REDUÇÃO AO MESMO DENOMINADOR, MULTIPLICARAM-SE OS NUMERADORES E MANTEVE-SE O DENOMINADOR.



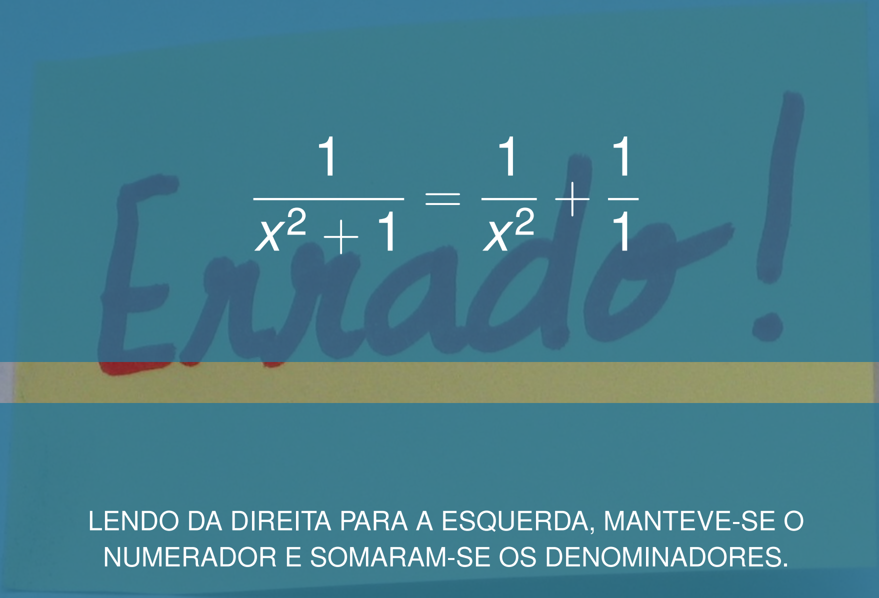
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

AQUI, SOMARAM-SE OS NUMERADORES E OS DENOMINADORES.

$$\frac{8}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = \frac{8 - x}{(x^2 - 4)(x - 2)}$$

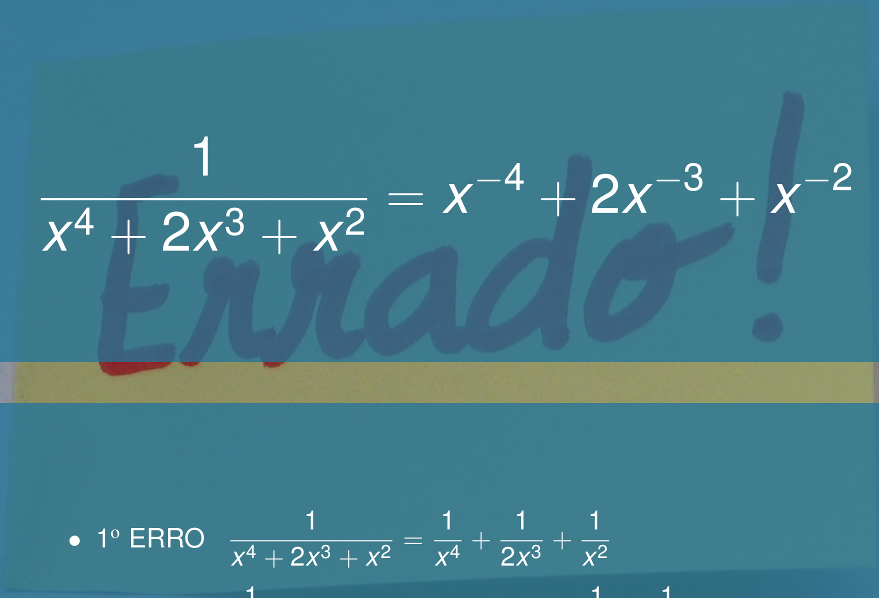
Errado!

AGORA, FEZ-SE A DIFERENÇA DOS NUMERADORES E MULTIPLICARAM-SE OS DENOMINADORES.



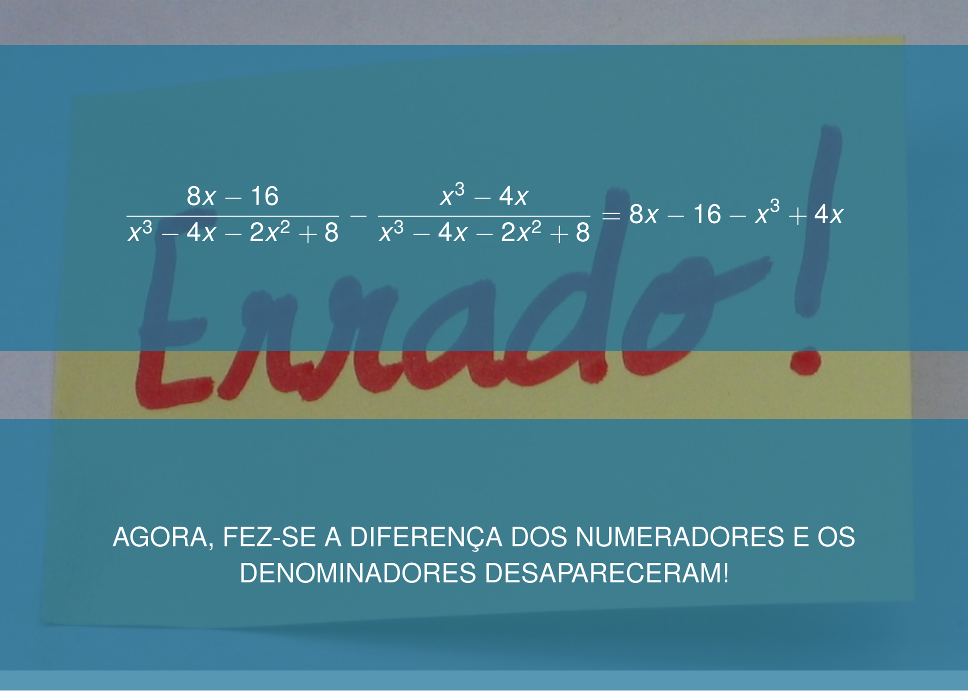
$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1}$$

LENDO DA DIREITA PARA A ESQUERDA, MANTEVE-SE O NUMERADOR E SOMARAM-SE OS DENOMINADORES.



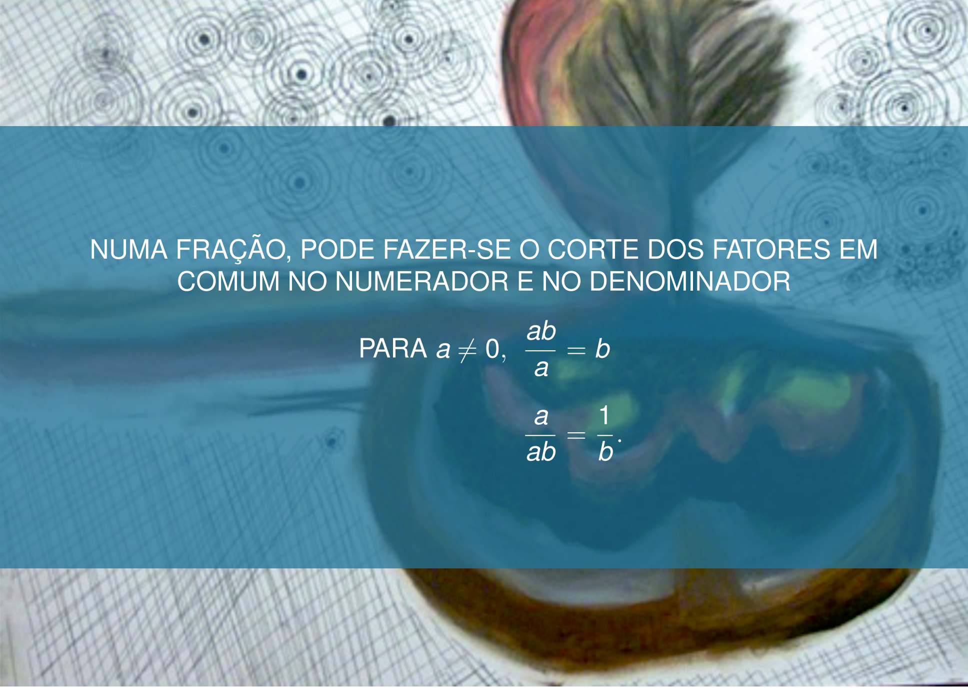
$$\frac{1}{x^4+2x^3+x^2} = x^{-4} + 2x^{-3} + x^{-2}$$

- 1º ERRO $\quad \dfrac{1}{x^4+2x^3+x^2} = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{1}{x^2}$
- 2º ERRO $\quad \dfrac{1}{2x^3} = 2x^{-3}$ (CORRETO É $\quad \dfrac{1}{2x^3} = \dfrac{1}{2}x^{-3}$).



$$\frac{8x-16}{x^3-4x-2x^2+8}-\frac{x^3-4x}{x^3-4x-2x^2+8}=8x-16-x^3+4x$$

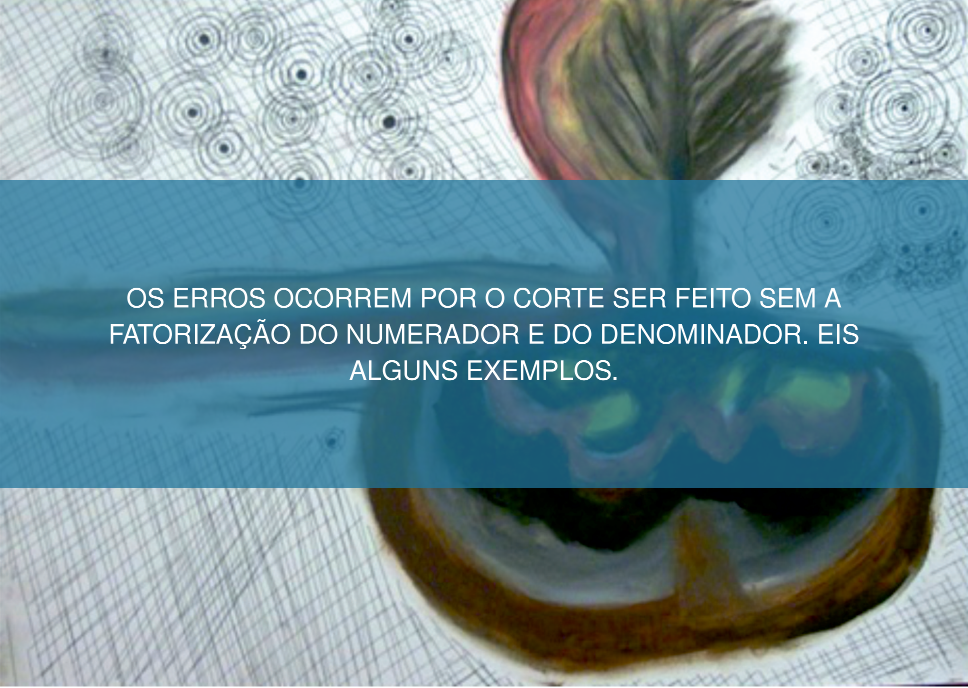
AGORA, FEZ-SE A DIFERENÇA DOS NUMERADORES E OS DENOMINADORES DESAPARECERAM!



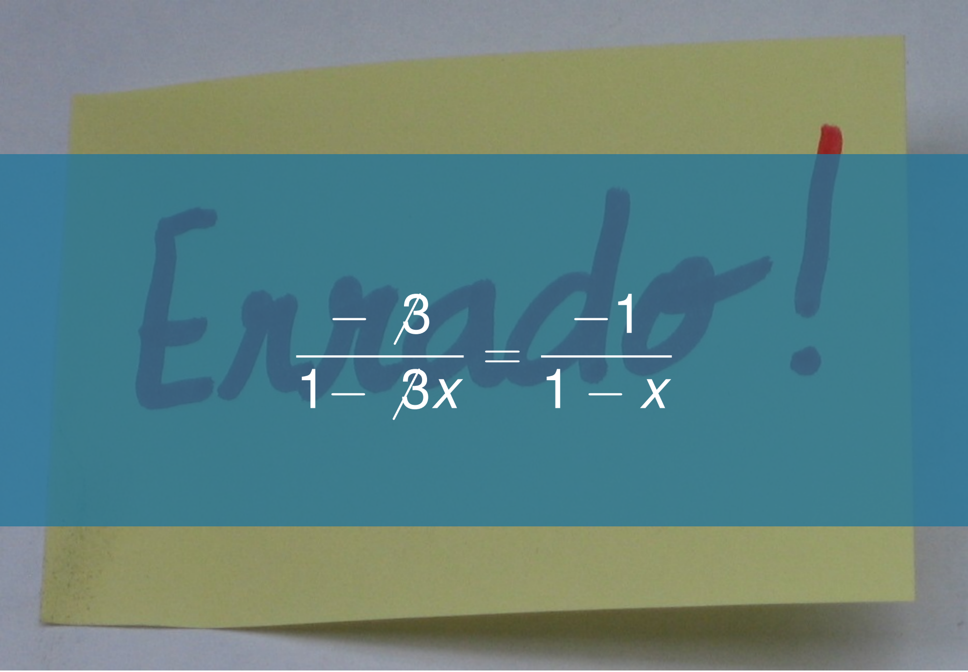
NUMA FRAÇÃO, PODE FAZER-SE O CORTE DOS FATORES EM COMUM NO NUMERADOR E NO DENOMINADOR

$$\text{PARA } a \neq 0, \quad \frac{ab}{a} = b$$

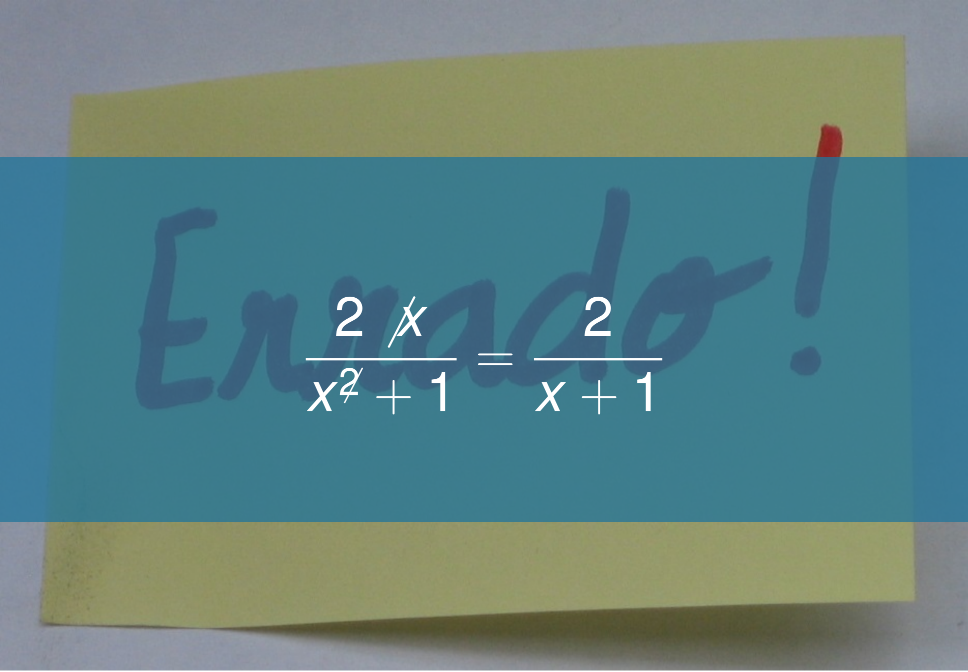
$$\frac{a}{ab} = \frac{1}{b}.$$



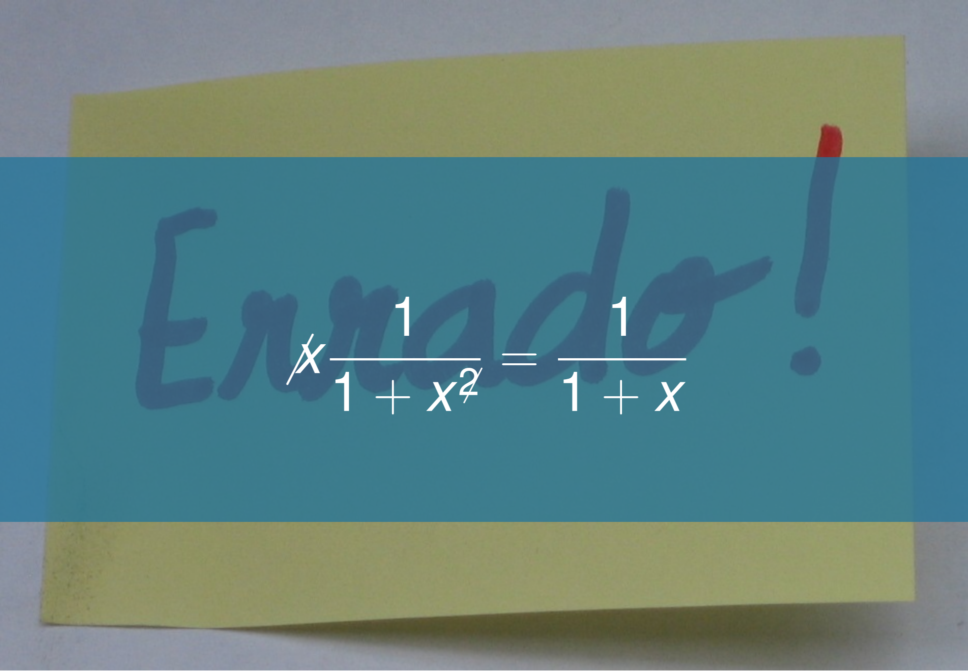
OS ERROS OCORREM POR O CORTE SER FEITO SEM A FATORIZAÇÃO DO NUMERADOR E DO DENOMINADOR. EIS ALGUNS EXEMPLOS.



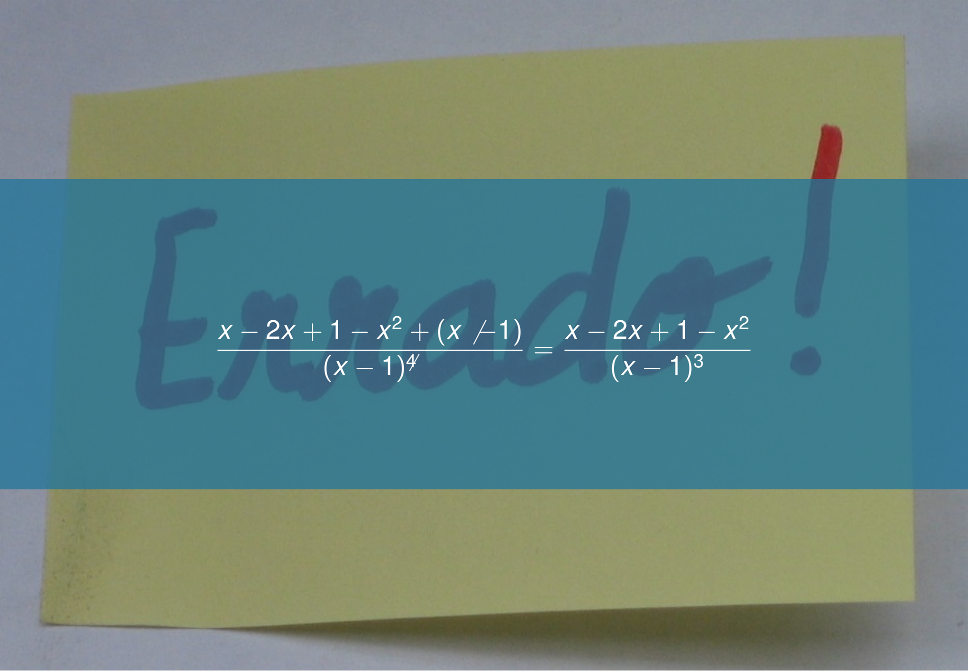
$$\frac{-\cancel{\beta}}{1-\cancel{\beta}x} = \frac{-1}{1-x}$$



$$\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}+1} = \frac{2}{x+1}$$



$$\cancel{x}\frac{1}{1+x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1+x}$$



$$\frac{x-2x+1-x^2+(x\cancel{-}1)}{(x-1)^{\cancel{4}}}=\frac{x-2x+1-x^2}{(x-1)^3}$$

OPERAÇÕES COM RAÍZES

A FÓRMULA RELATIVA À RAIZ QUADRADA DO PRODUTO DE NÚMEROS REAIS

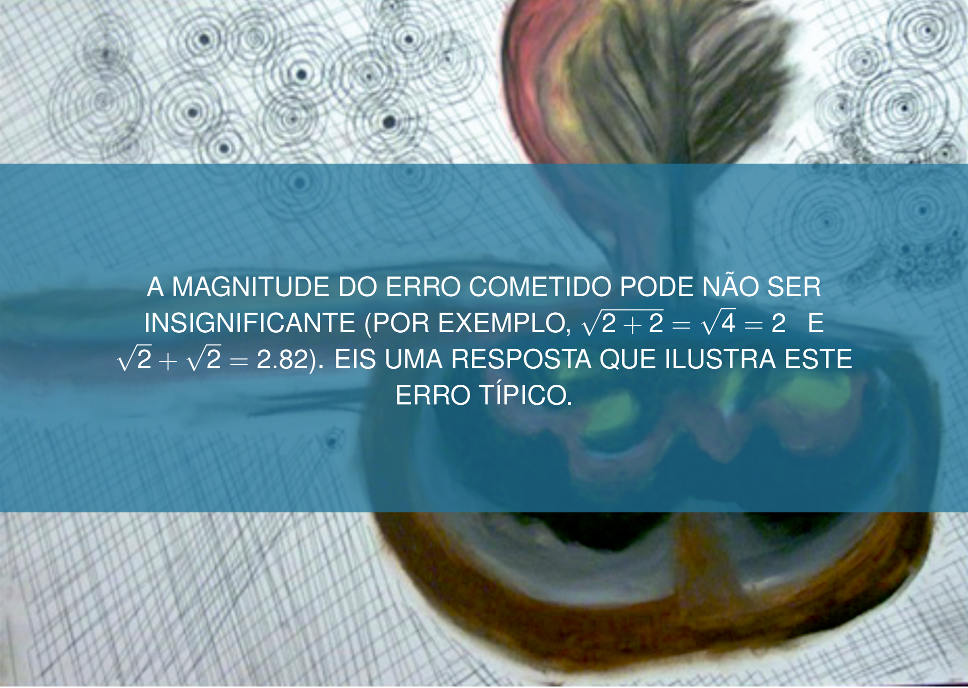
PARA $a, b \geq 0, \ \sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

É “GENERALIZADA” **ERRADAMENTE** PARA A RAIZ QUADRADA DA SOMA

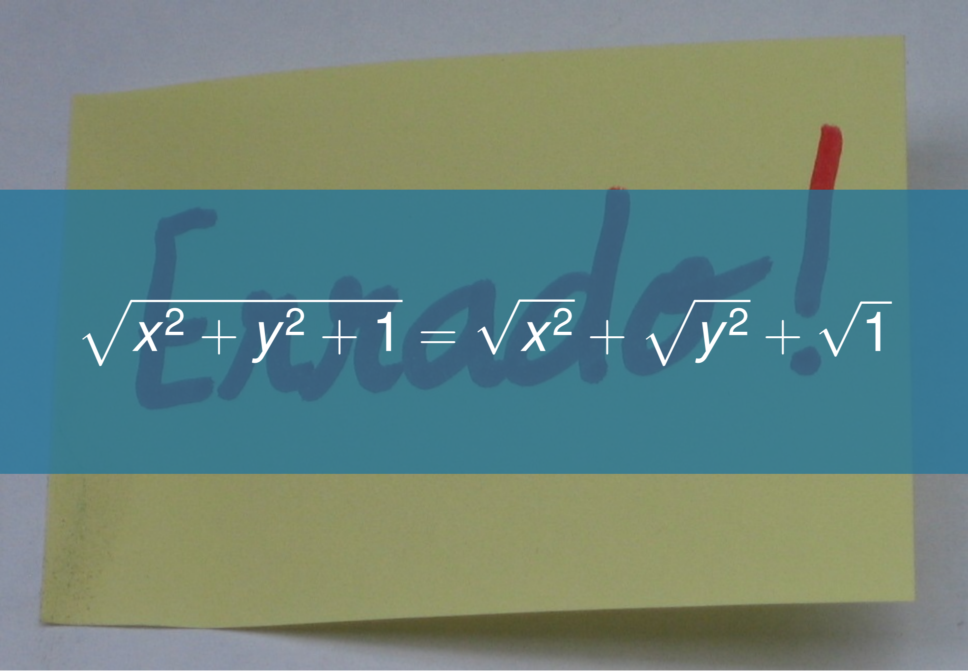
$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \ \text{(errado)}$$

OU A RAIZ QUADRADA DA DIFERENÇA

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \ \text{(errado).}$$



A MAGNITUDE DO ERRO COMETIDO PODE NÃO SER INSIGNIFICANTE (POR EXEMPLO, $\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$ E $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2.82$). EIS UMA RESPOSTA QUE ILUSTRA ESTE ERRO TÍPICO.



$$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{1}$$

UM ERRO QUE COSTUMA OCORRER ASSOCIADO AO ANTERIOR É CONSIDERAR-SE

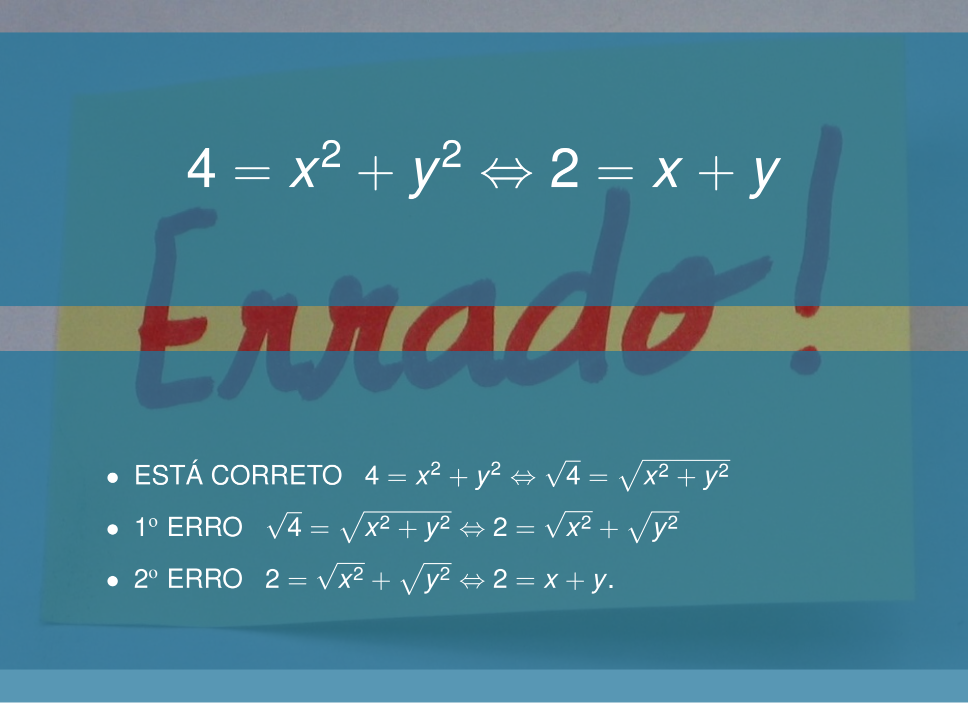
PARA $x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x$ (errado).

ORA,

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ SE } x \geq 0$$

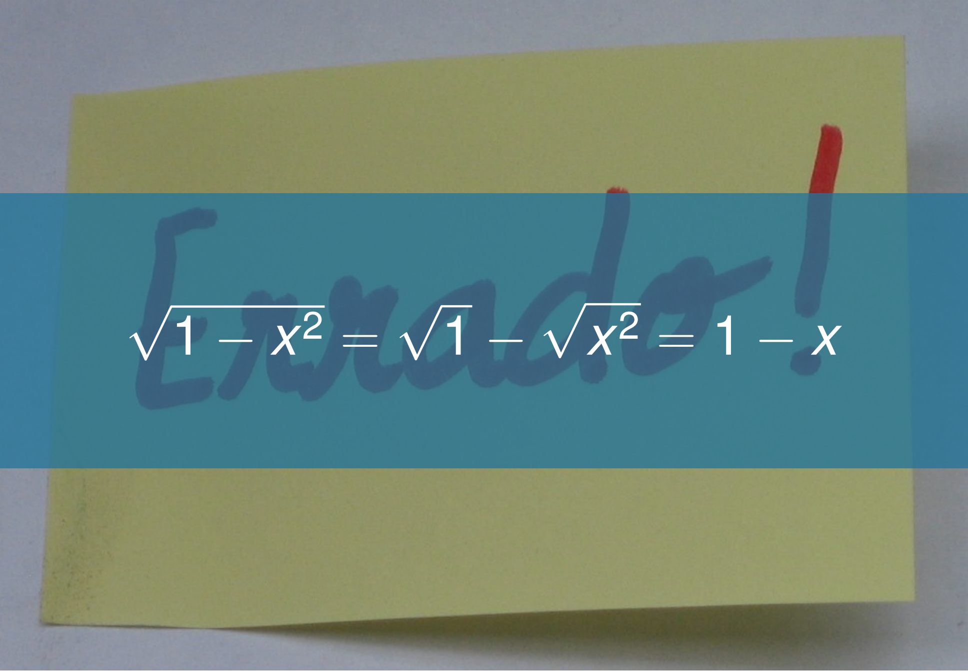
MAS SE $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$ (POR EXEMPLO, $\sqrt{(-2)^2} = 2$)

OU SEJA, $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$. EIS ALGUNS CASOS.

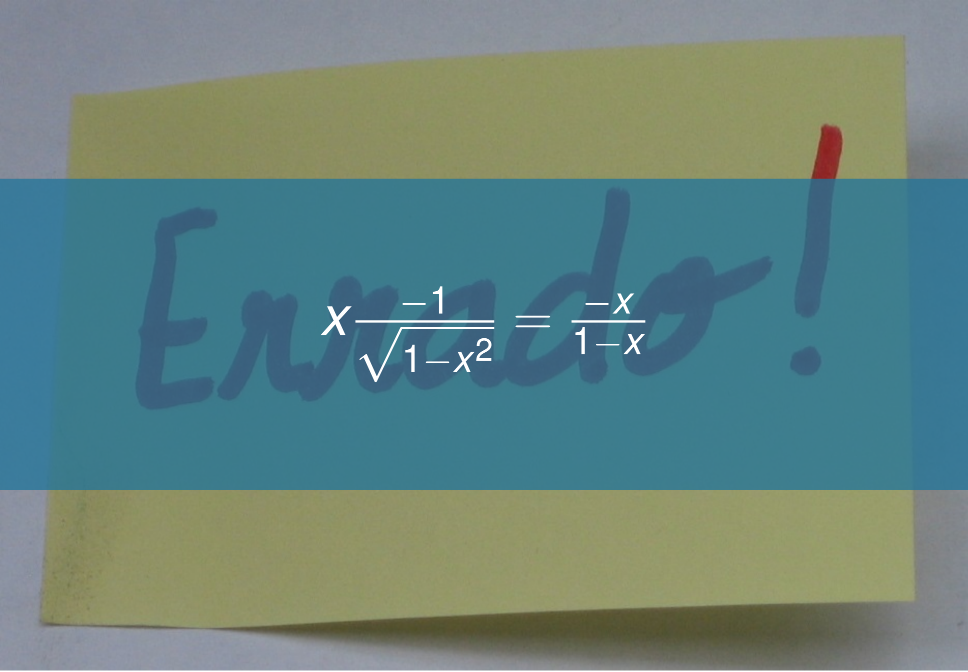


$$4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2 = x + y$$

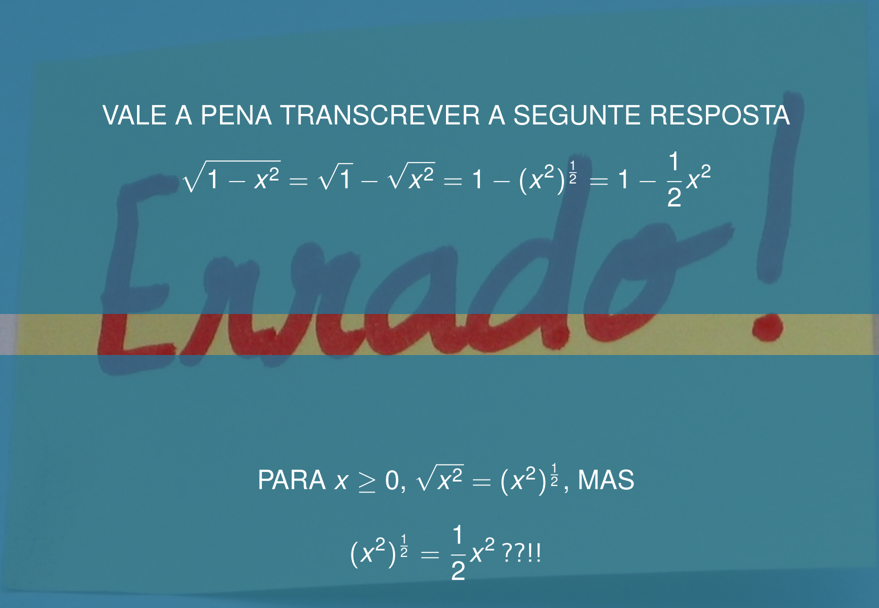
- ESTÁ CORRETO $4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 1º ERRO $\sqrt{4} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$
- 2º ERRO $2 = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \Leftrightarrow 2 = x + y$.



$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1} - \sqrt{x^2} = 1 - x$$



$$x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{1-x}$$

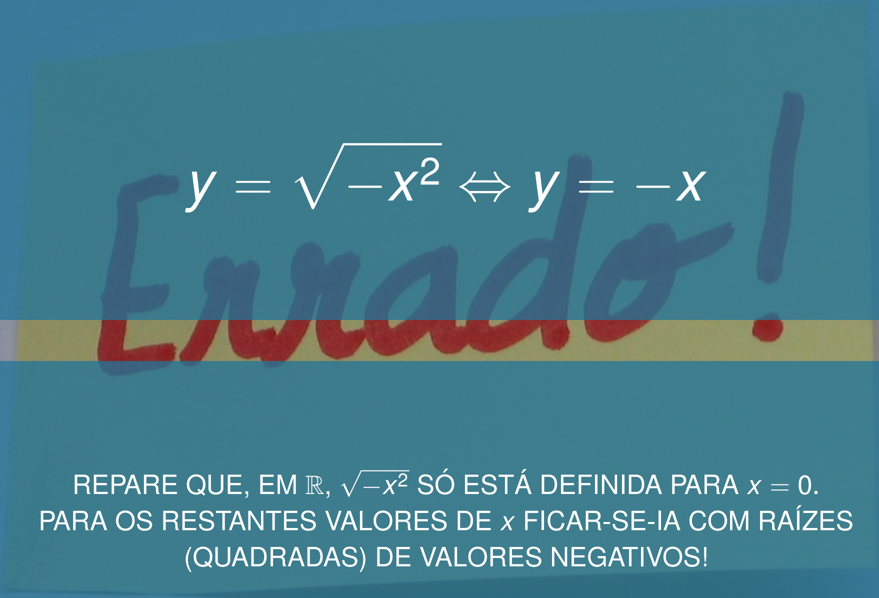


VALE A PENA TRANSCREVER A SEGUNTE RESPOSTA

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1} - \sqrt{x^2} = 1 - (x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

PARA $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$, MAS

$$(x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 \text{ ??!!}$$



$$y = \sqrt{-x^2} \Leftrightarrow y = -x$$

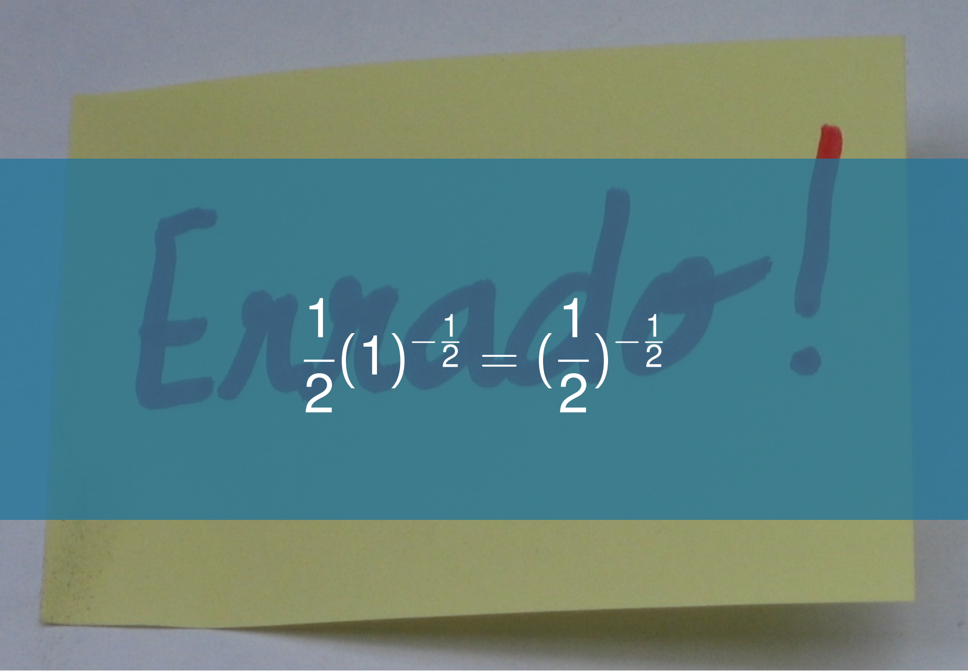
REPARE QUE, EM $\mathbb{R}$, $\sqrt{-x^2}$ SÓ ESTÁ DEFINIDA PARA $x = 0$. PARA OS RESTANTES VALORES DE x FICAR-SE-IA COM RAÍZES (QUADRADAS) DE VALORES NEGATIVOS!

OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS

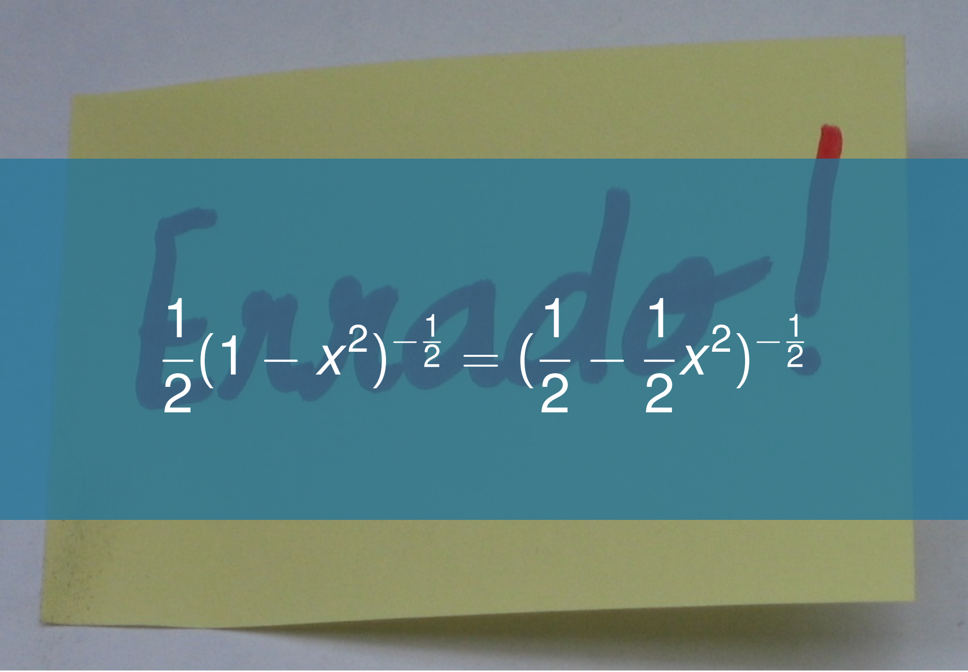
A FÓRMULA DO PRODUTO DE POTÊNCIAS COM O MESMO EXPOENTE

$$a^n b^n = (ab)^n$$

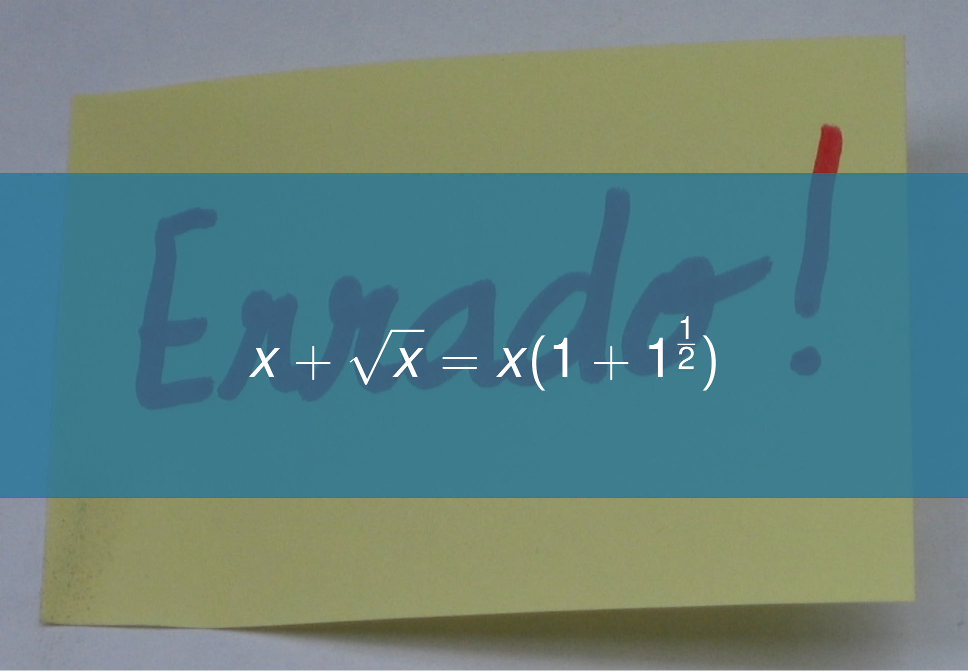
É MUITAS VEZES “GENERALIZADA” ERRADAMENTE. EIS ALGUNS EXEMPLOS.



$$\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$$



$$\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2)^{-\frac{1}{2}}$$



$$x + \sqrt{x} = x(1 + 1^{\frac{1}{2}})$$

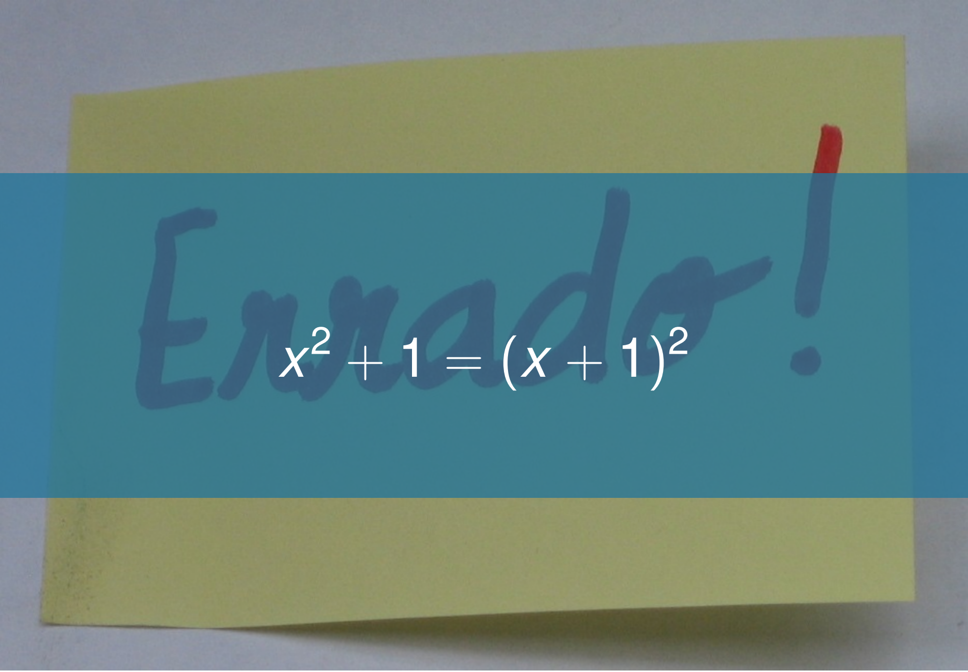
O DESENVOLVIMENTO DO QUADRADO DA SOMA DE N$^{\text{OS}}$ REAIS

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

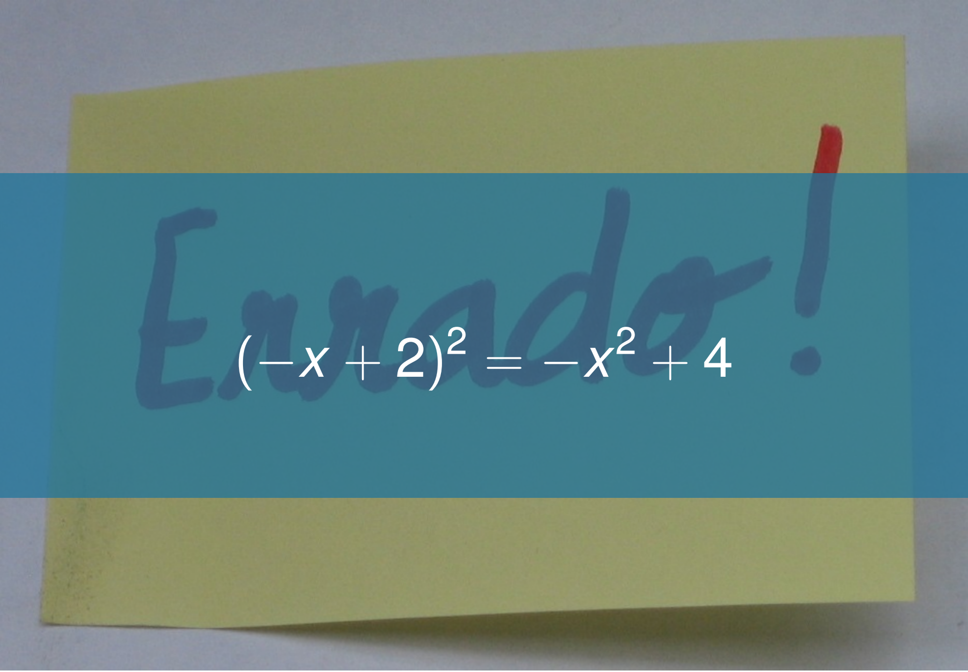
E O DO QUADRADO DA DIFERENÇA

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

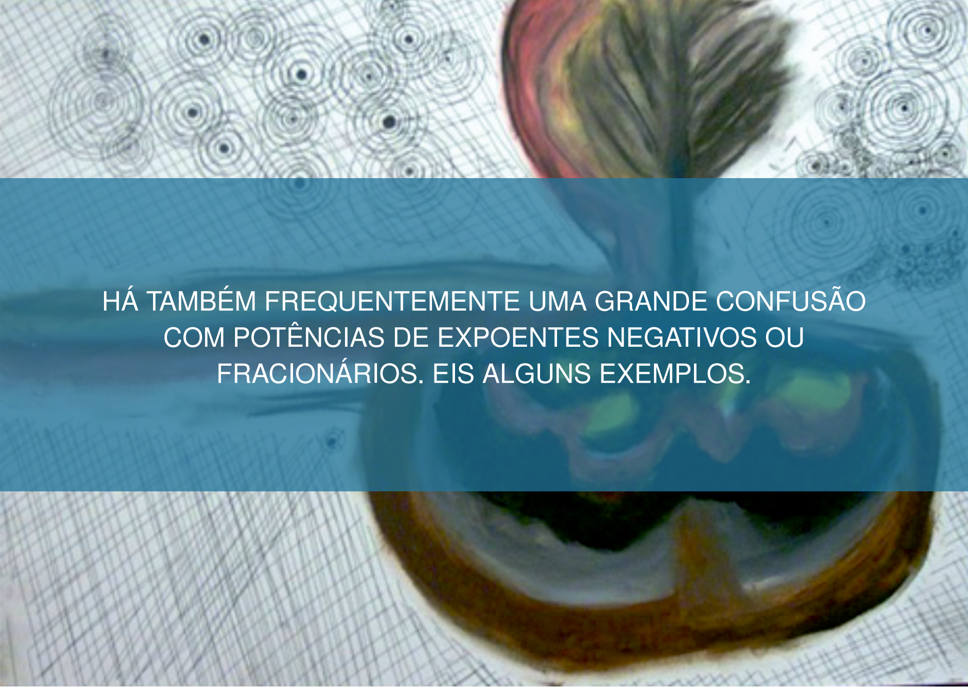
SÃO MUITAS VEZES ALTERADOS. EIS DOIS EXEMPLOS.



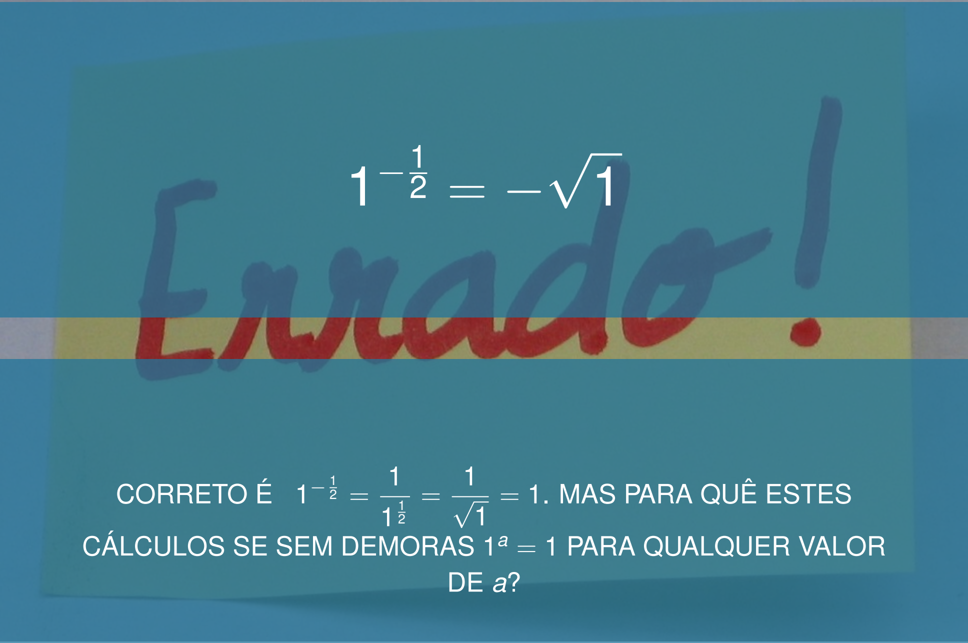
$$x^2 + 1 = (x + 1)^2$$



$$(-x+2)^2 = -x^2 + 4$$

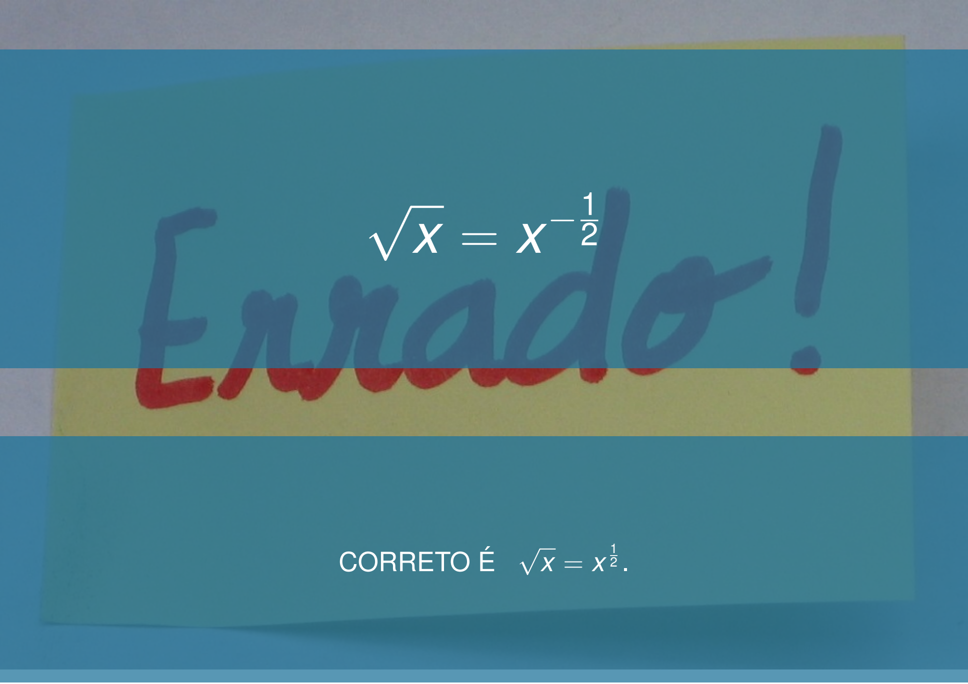


HÁ TAMBÉM FREQUENTEMENTE UMA GRANDE CONFUSÃO COM POTÊNCIAS DE EXPOENTES NEGATIVOS OU FRACIONÁRIOS. EIS ALGUNS EXEMPLOS.



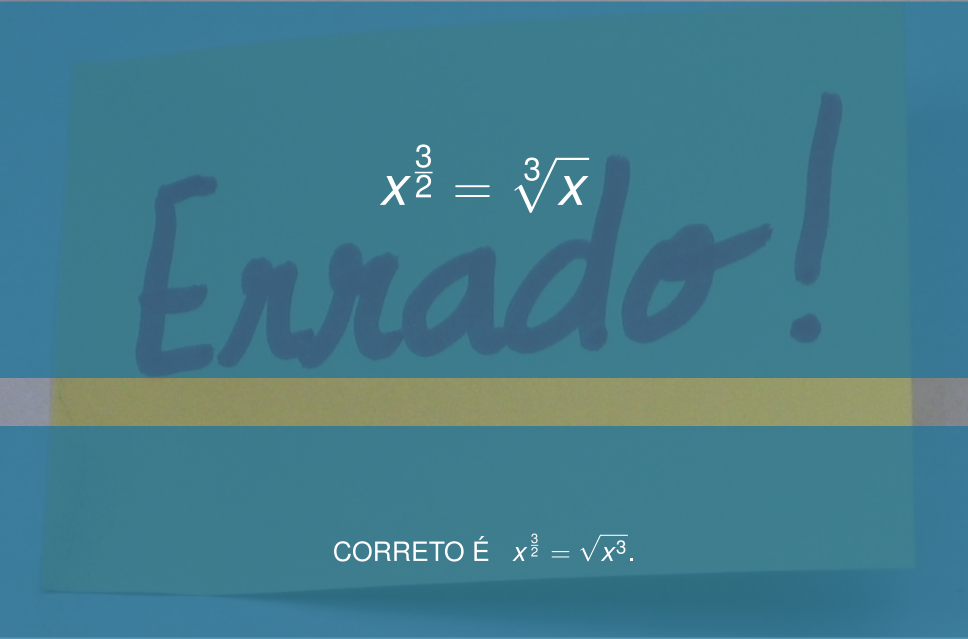
$$1^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{1}$$

CORRETO É $1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$. MAS PARA QUÊ ESTES CÁLCULOS SE SEM DEMORAS $1^a = 1$ PARA QUALQUER VALOR DE a?



$$\sqrt{x} = x^{-\frac{1}{2}}$$

CORRETO É $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.



$$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{x}$$

CORRETO É $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

Errado!

$$\frac{x^{-3}}{3} = \frac{3}{x^3}$$

CORRETO É $\dfrac{x^{-3}}{3} = \dfrac{1}{3x^3}$.

Errado!

$$(1-3x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1-3x}\right)^{-x}$$

ORA, $\left(\frac{1}{1-3x}\right)^{-x} = (1-3x)^{x}$!

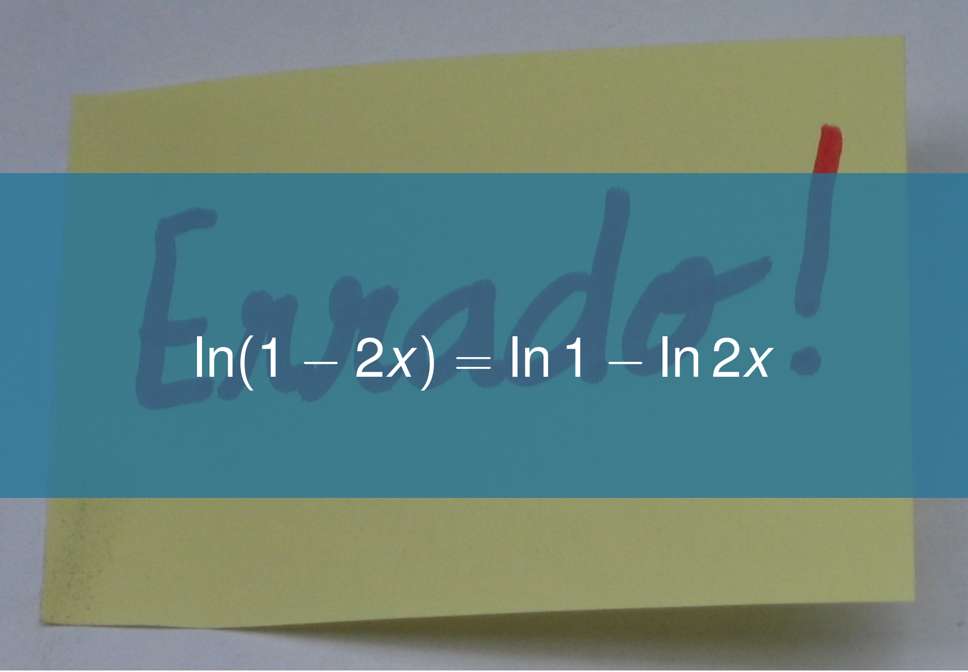
OPERAÇÕES COM LOGARITMOS

AS FÓRMULAS DOS LOGARITMOS

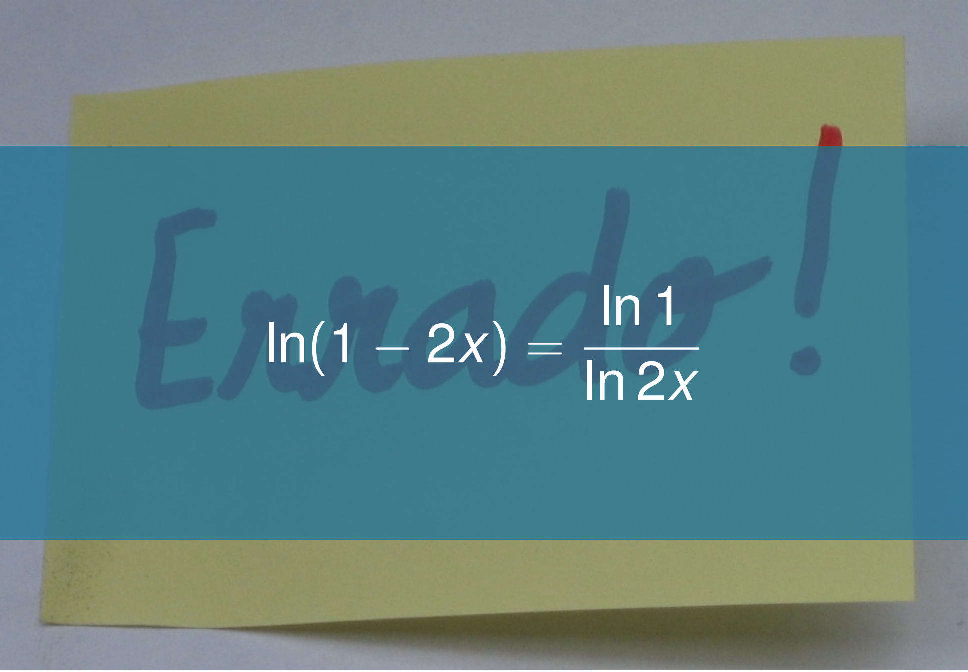
PARA $a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$$

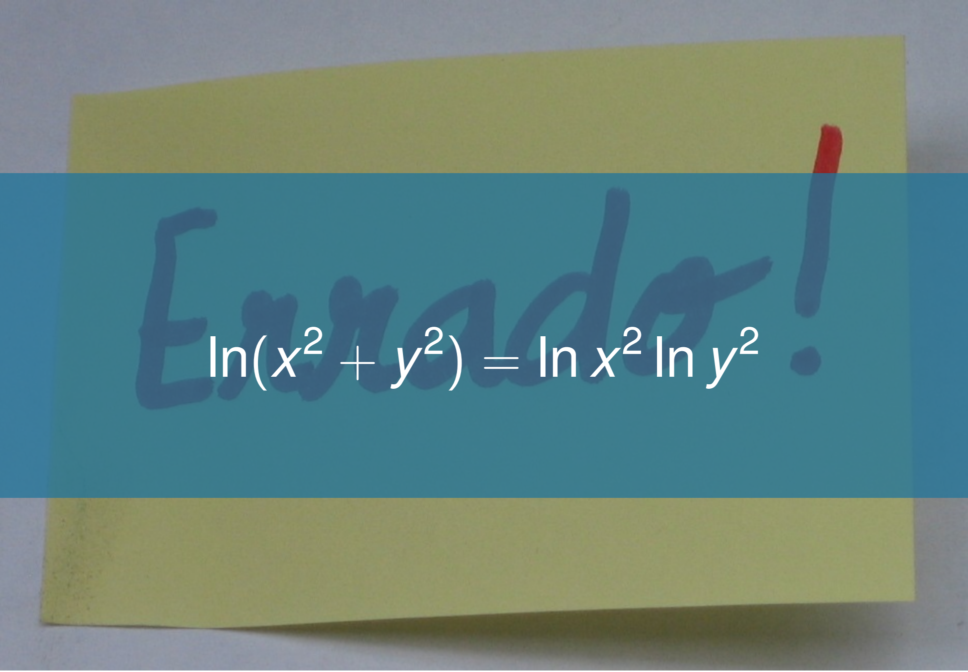
TÊM TIDO VÁRIAS ”INTERPRETAÇÕES”. EIS ALGUMAS DESSAS “INTERPRETAÇÕES”.



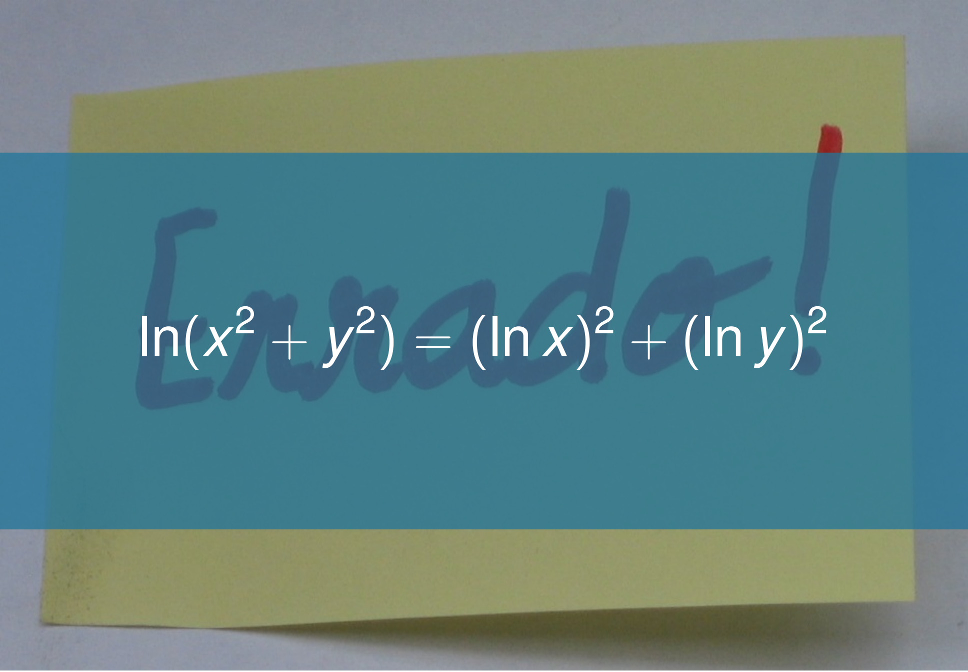
$$\ln(1-2x) = \ln 1 - \ln 2x$$



$$\ln(1-2x) = \frac{\ln 1}{\ln 2x}$$

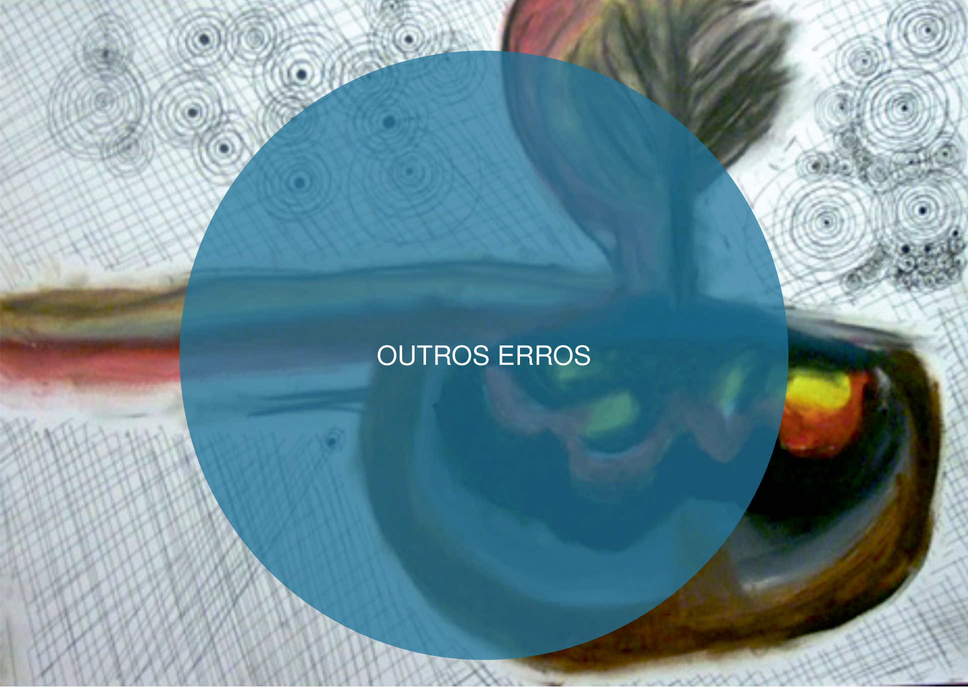


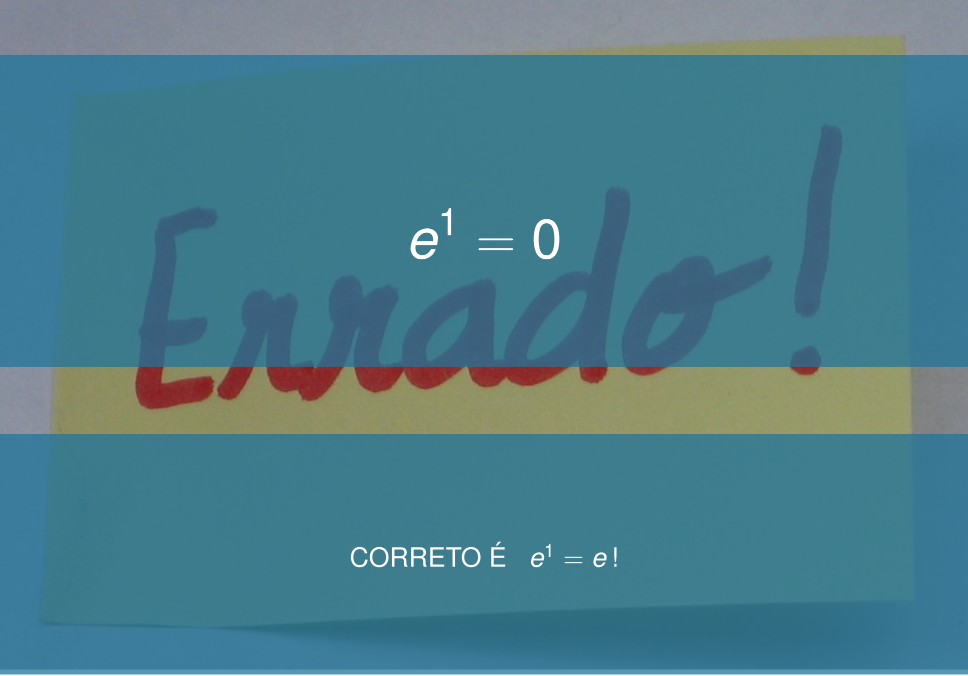
$$\ln(x^2 + y^2) = \ln x^2 \ln y^2$$



$$\ln(x^2 + y^2) = (\ln x)^2 + (\ln y)^2$$

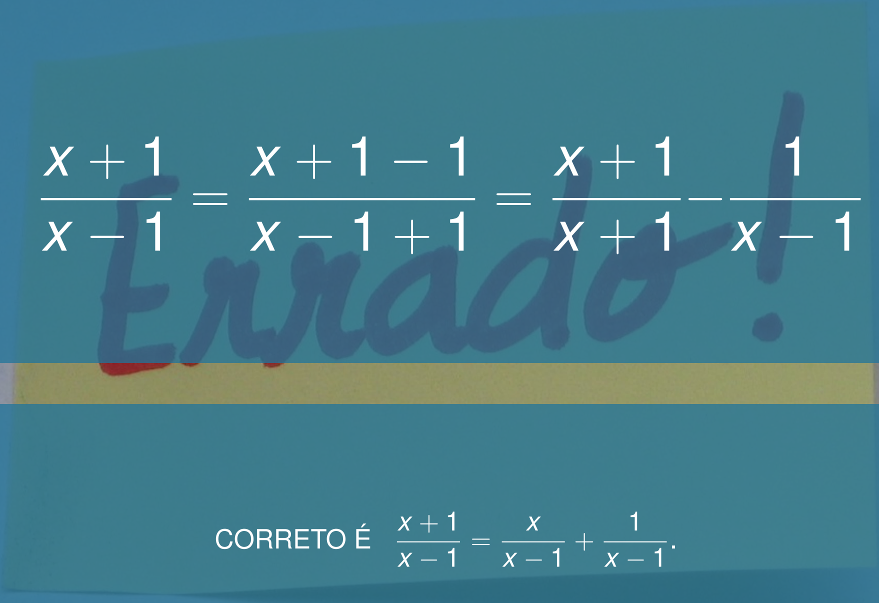
OUTROS ERROS





$$e^1 = 0$$

CORRETO É $e^1 = e$!



$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1-1}{x-1+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

CORRETO É $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x-1}$.

$$(\sin \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = \sin(-\frac{1}{x^3})$$

Errado!

CORRETO É $(\sin \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}.$

Errado!

$$\frac{8}{0} - \frac{2}{0} = 0$$

$\frac{a}{0}$ NÃO ESTÁ DEFINIDO QUALQUER QUE SEJA O VALOR DE a!

Errado!

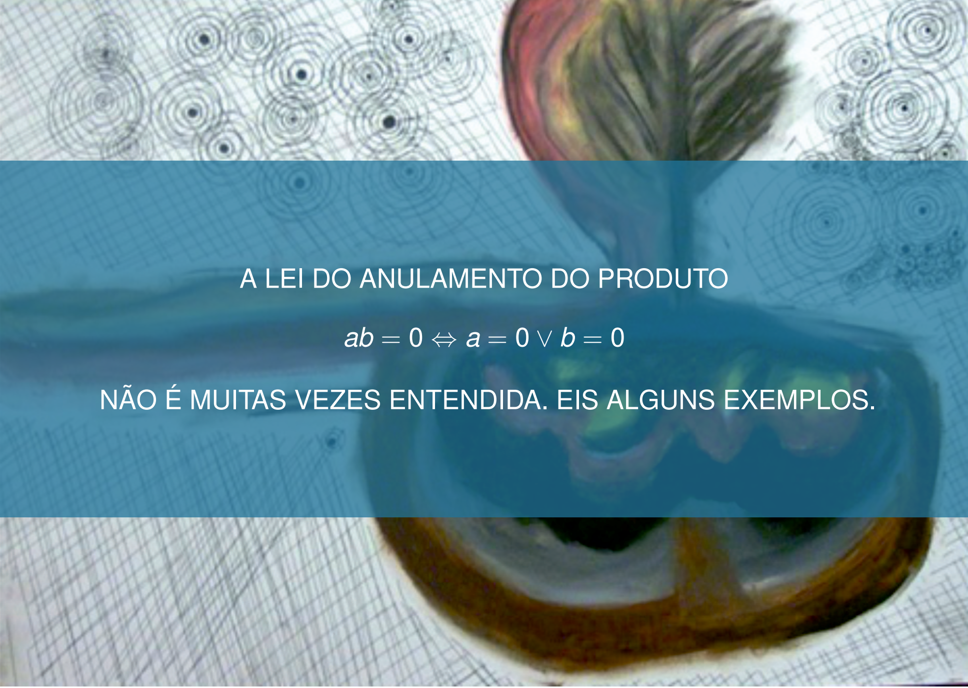
$$y = \frac{1}{x}$$

se $y = 0$ então $x = 0$

se $x = 0$ então $y = 0$

$\frac{1}{0}$??!! CORRETO É $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow yx = 1.$

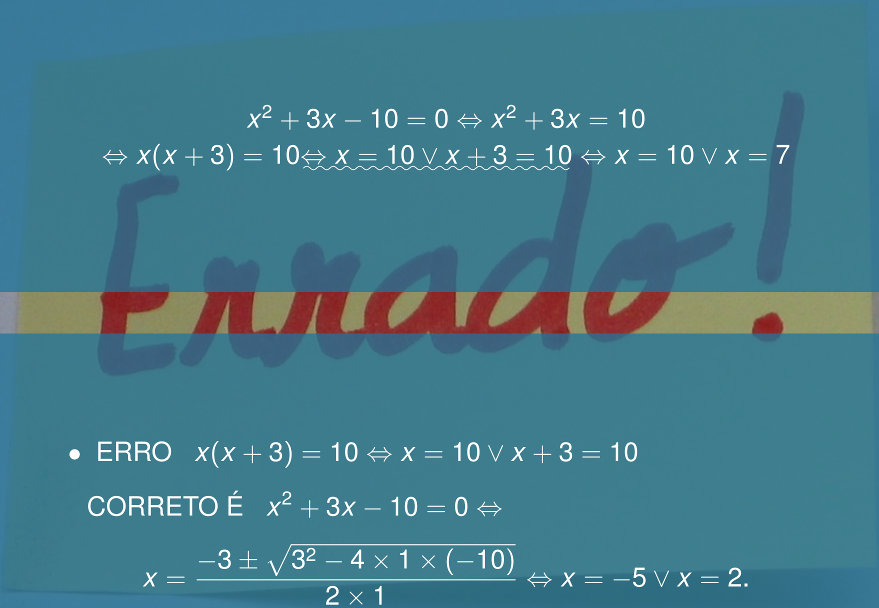
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES



A LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

NÃO É MUITAS VEZES ENTENDIDA. EIS ALGUNS EXEMPLOS.



$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 10$$

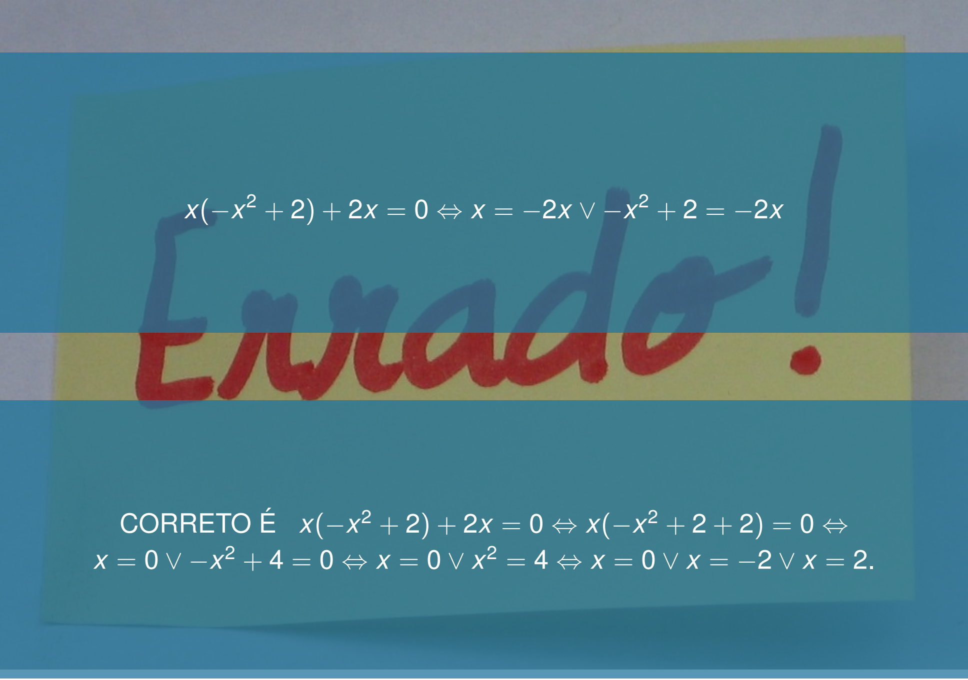
$$\Leftrightarrow x(x+3) = 10 \Leftrightarrow x = 10 \vee x + 3 = 10 \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 7$$

- ERRO $x(x+3) = 10 \Leftrightarrow x = 10 \vee x + 3 = 10$

  CORRETO É $x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

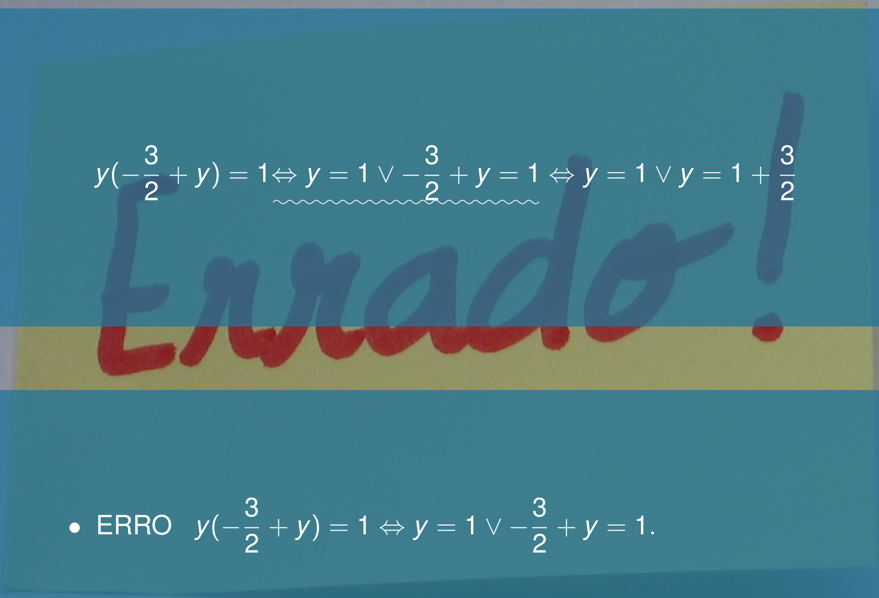
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2.$$

SE O ALUNO TIVESSE SUBSTITUÍDO x PELOS VALORES QUE OBTEVE (7 E 10) NA EQUAÇÃO INICIAL OBTERIA DUAS PROPOSIÇÕES FALSAS, E CONCLUIRIA QUE ESTAVA A FAZER ALGO DE ERRADO!



$$x(-x^2+2)+2x=0 \Leftrightarrow x=-2x \vee -x^2+2=-2x$$

CORRETO É $x(-x^2+2)+2x=0 \Leftrightarrow x(-x^2+2+2)=0 \Leftrightarrow$
$x=0 \vee -x^2+4=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2 \vee x=2.$

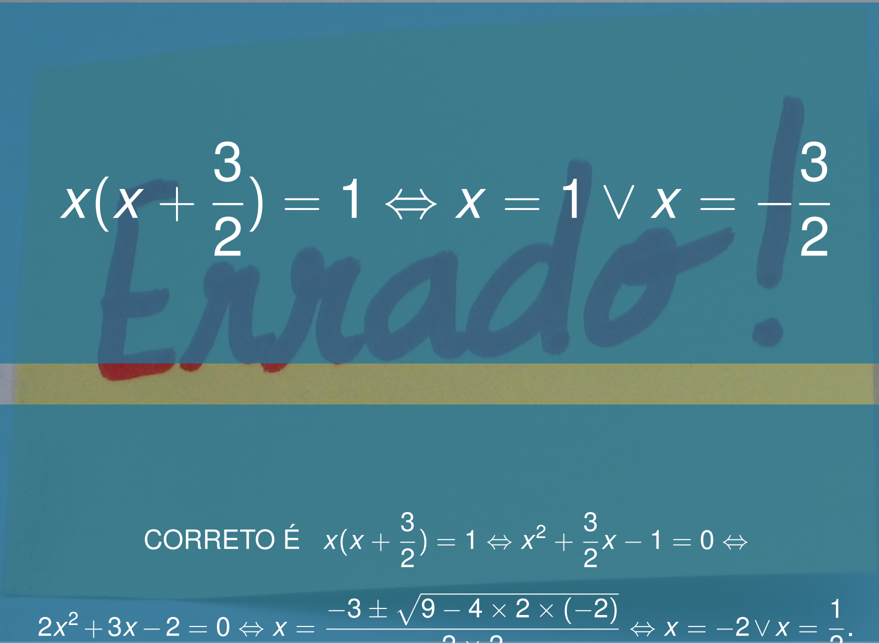


$$y(-\frac{3}{2}+y)=1 \Leftrightarrow y=1 \vee -\frac{3}{2}+y=1 \Leftrightarrow y=1 \vee y=1+\frac{3}{2}$$

- ERRO $\quad y(-\frac{3}{2}+y)=1 \Leftrightarrow y=1 \vee -\frac{3}{2}+y=1.$

CORRETO É $y(-\frac{3}{2}+y)=1 \Leftrightarrow y^2-\frac{3}{2}y-1=0 \Leftrightarrow$

$$2y^2-3y-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9-4\times2\times(-2)}}{2\times2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2} \vee y=2.$$



$$x\left(x+\frac{3}{2}\right)=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{3}{2}$$

CORRETO É $\quad x\left(x+\frac{3}{2}\right)=1 \Leftrightarrow x^2+\frac{3}{2}x-1=0 \Leftrightarrow$

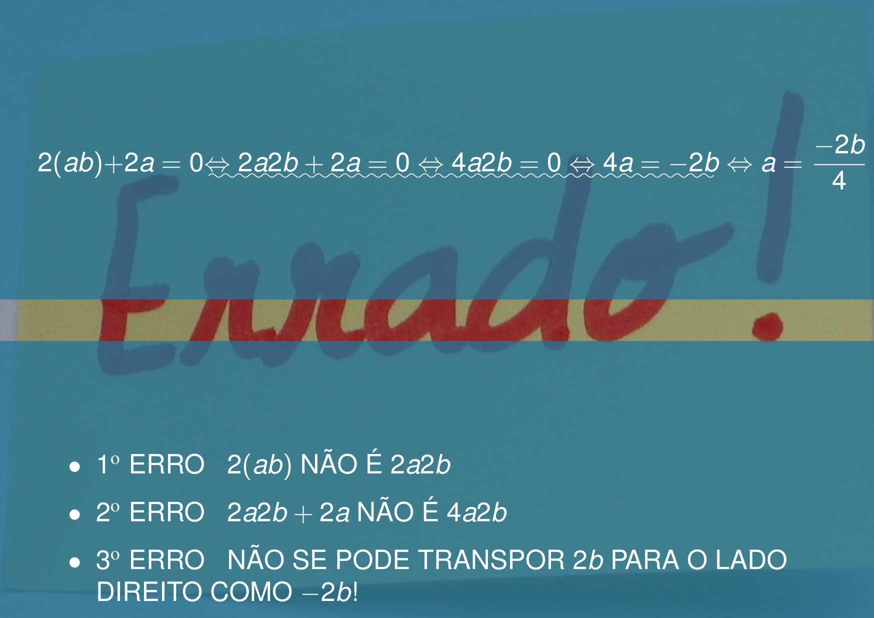
$$2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times 2\times(-2)}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{1}{2}.$$

$$y(1+y)=2 \Leftrightarrow y=0 \vee 1+y=2$$

Errado!

CORRETO É $\quad y(1+y)=2 \Leftrightarrow y^2+y-2=0 \Leftrightarrow$

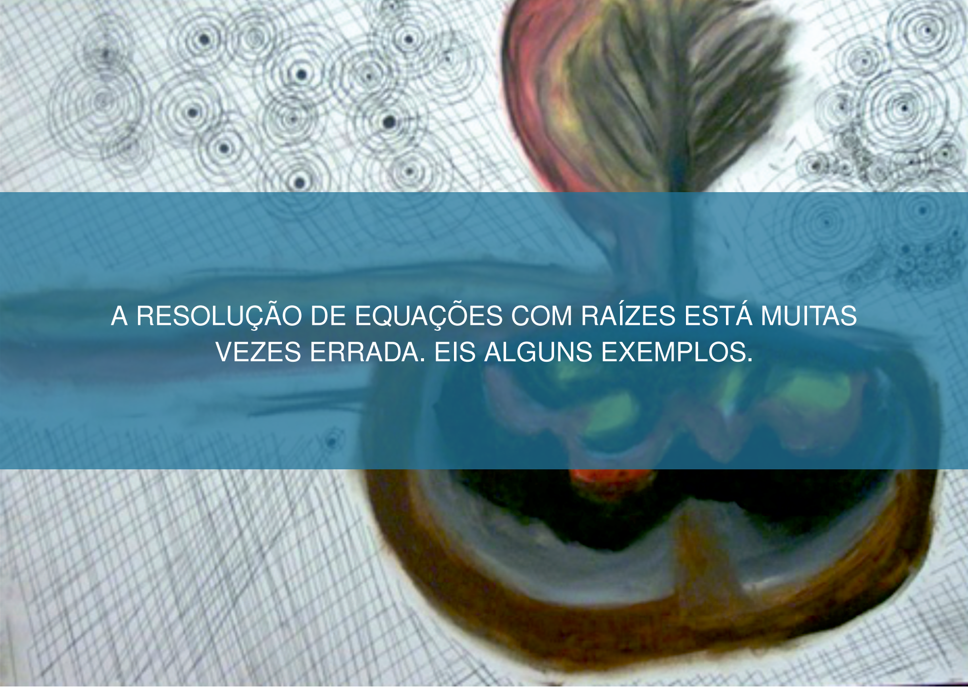
$$y=\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow y=-2 \vee y=1.$$



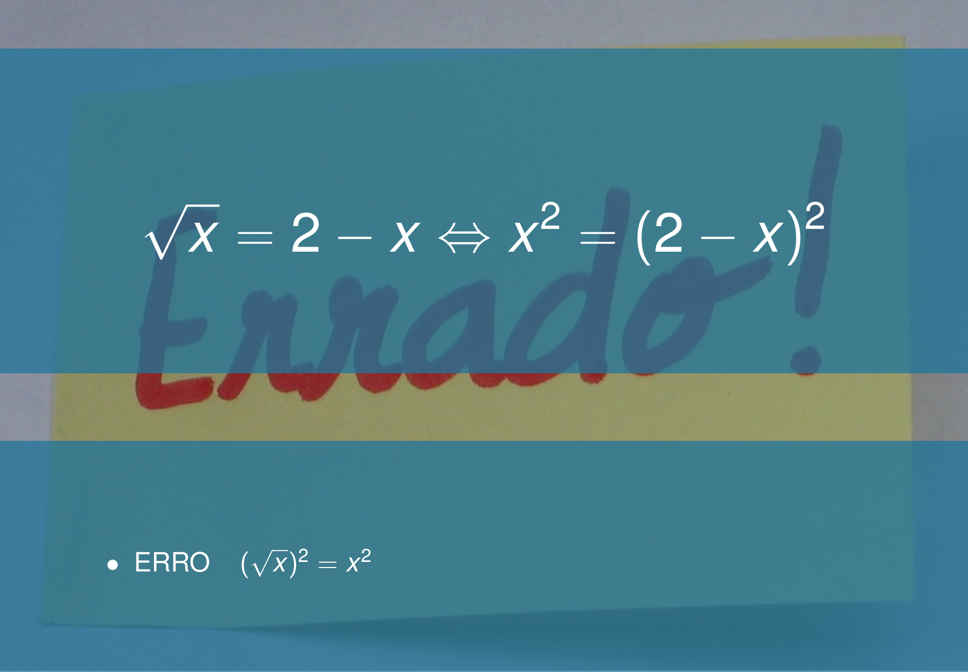
$$2(ab)+2a=0 \Leftrightarrow 2a2b+2a=0 \Leftrightarrow 4a2b=0 \Leftrightarrow 4a=-2b \Leftrightarrow a=\frac{-2b}{4}$$

- 1º ERRO $2(ab)$ NÃO É $2a2b$
- 2º ERRO $2a2b+2a$ NÃO É $4a2b$
- 3º ERRO NÃO SE PODE TRANSPOR $2b$ PARA O LADO DIREITO COMO $-2b$!

CORRETO É $2(ab) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2ab + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a(b+1) = 0 \Leftrightarrow$
$2a = 0 \vee b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = -1.$



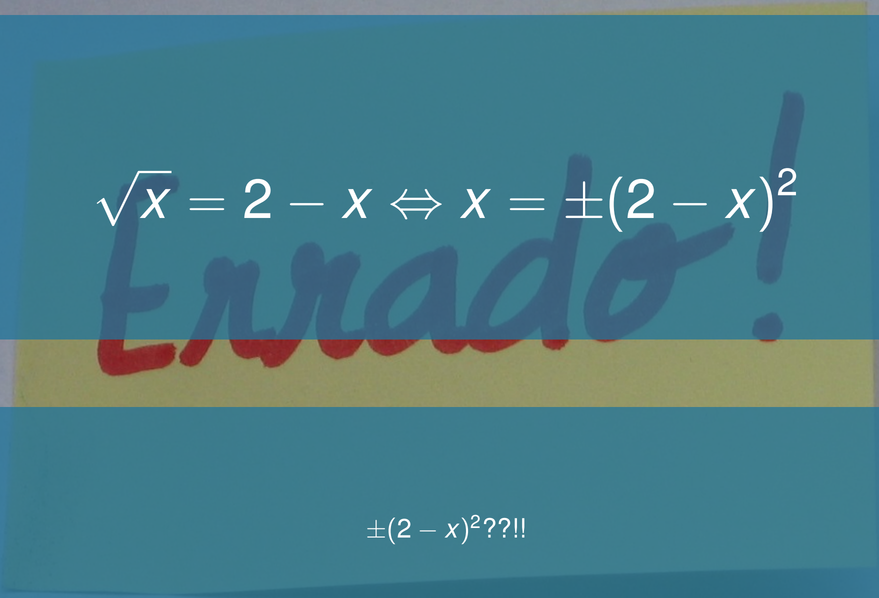
A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM RAÍZES ESTÁ MUITAS VEZES ERRADA. EIS ALGUNS EXEMPLOS.



$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x^2 = (2 - x)^2$$

- ERRO $\quad (\sqrt{x})^2 = x^2$

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x = \pm(2 - x)^2$$



$\pm(2 - x)^2$??!!

CORRETO É

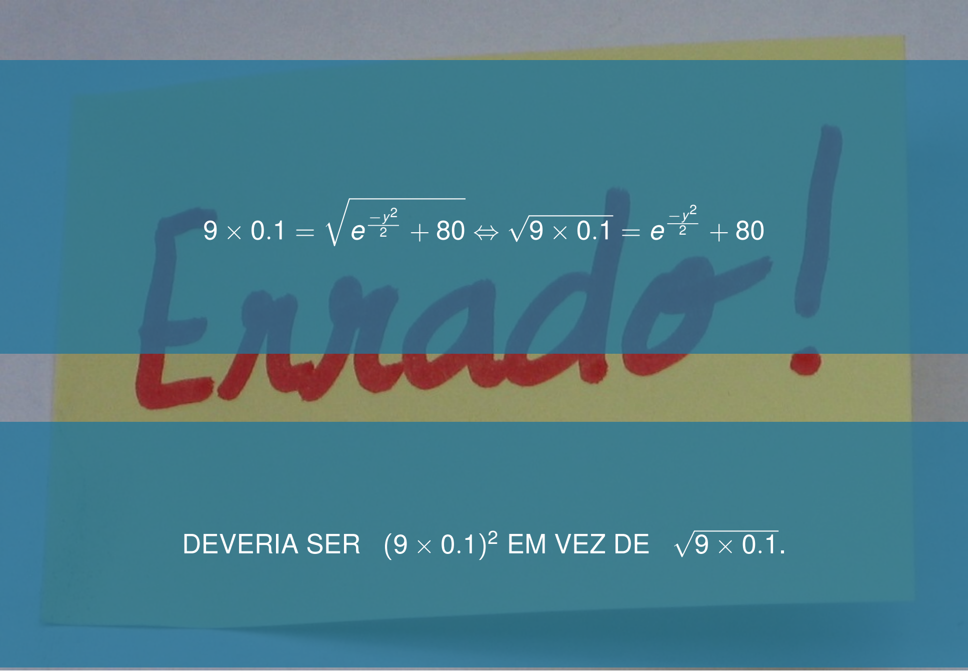
$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = (2 - x)^2$$

SENDO A 1^{A} EQUIVALÊNCIA VÁLIDA PARA $x \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0$ OU SEJA, AS SOLUÇÕES DA ÚLTIMA EQUAÇÃO QUE NÃO PERTENCEREM A $[0, 2]$ NÃO SÃO SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INICIAL.

ASSIM, PARA $x \in [0, 2]$,

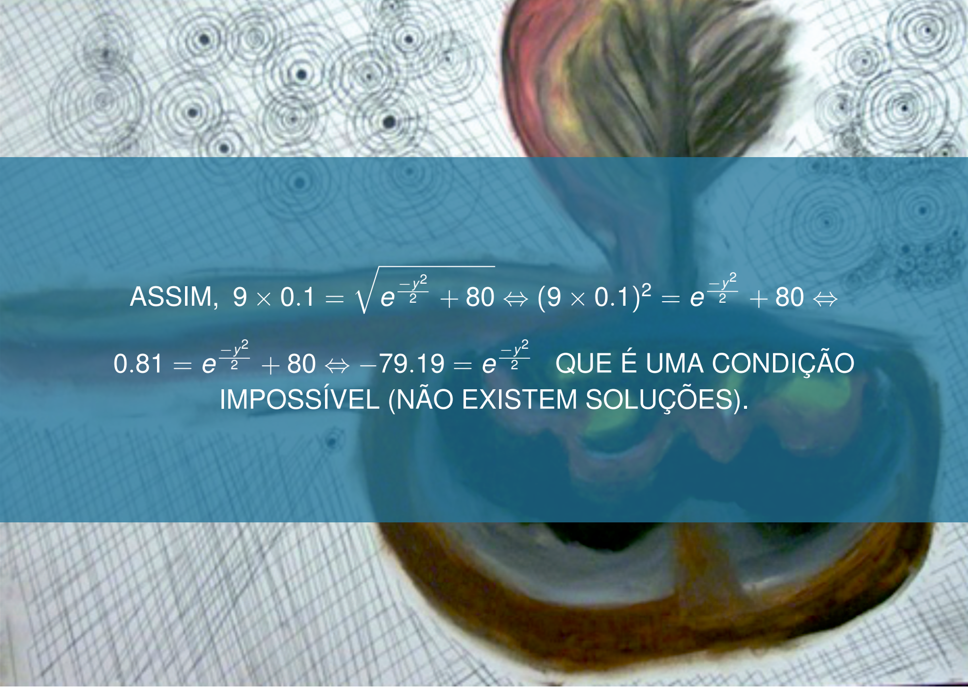
$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = 1 \;\cancel{\vee}\; \cancel{x} = \cancel{4}.$$



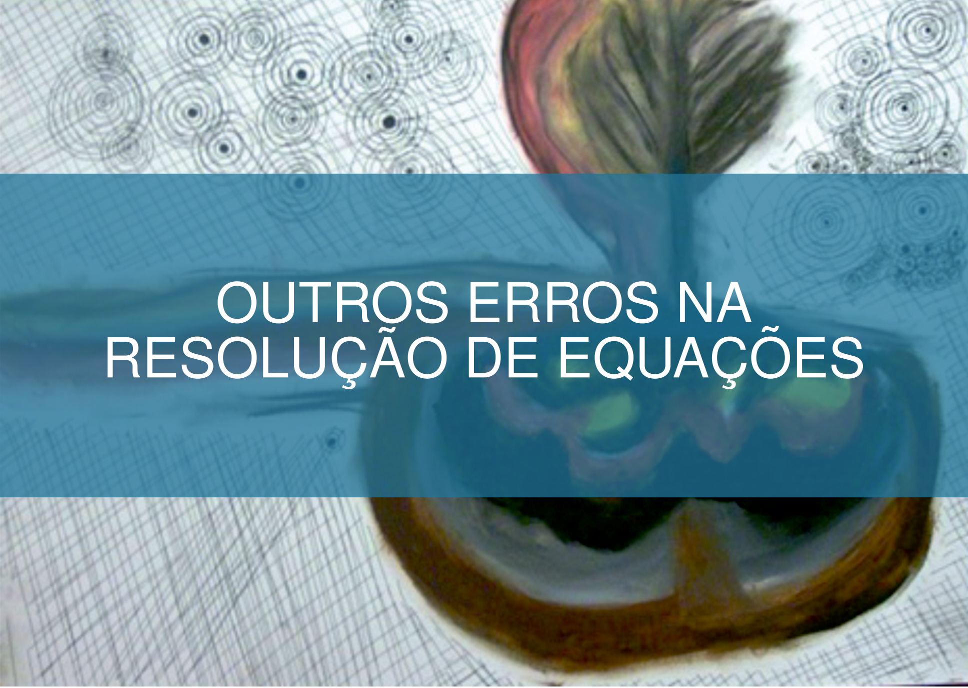
$$9 \times 0.1 = \sqrt{e^{\frac{-y^2}{2}} + 80} \Leftrightarrow \sqrt{9 \times 0.1} = e^{\frac{-y^2}{2}} + 80$$

DEVERIA SER $(9 \times 0.1)^2$ EM VEZ DE $\sqrt{9 \times 0.1}$.



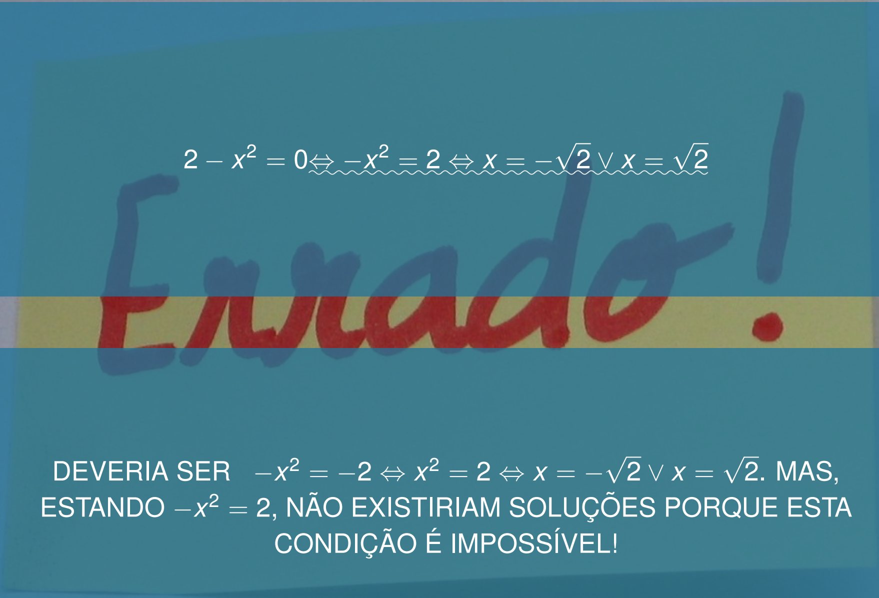
ASSIM, $9 \times 0.1 = \sqrt{e^{\frac{-y^2}{2}} + 80} \Leftrightarrow (9 \times 0.1)^2 = e^{\frac{-y^2}{2}} + 80 \Leftrightarrow$

$0.81 = e^{\frac{-y^2}{2}} + 80 \Leftrightarrow -79.19 = e^{\frac{-y^2}{2}}$ QUE É UMA CONDIÇÃO IMPOSSÍVEL (NÃO EXISTEM SOLUÇÕES).

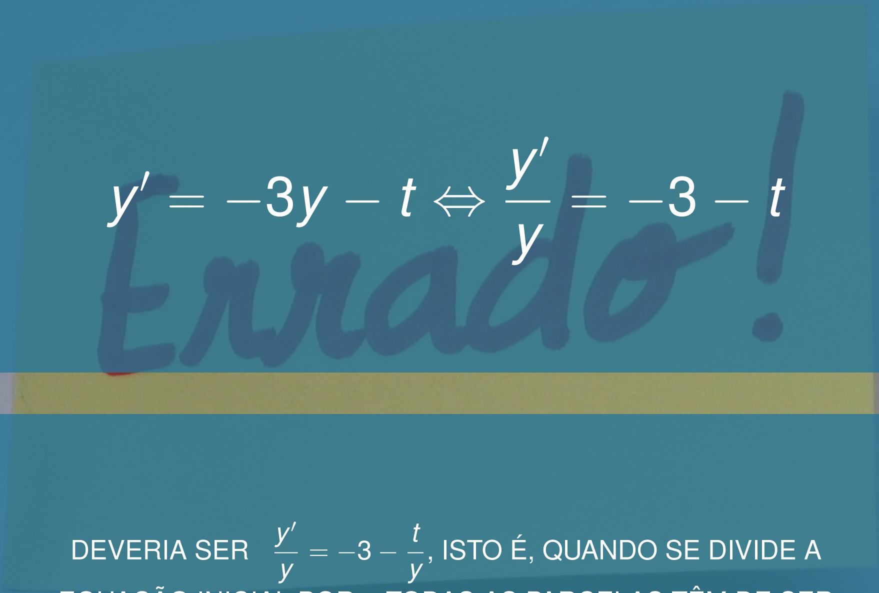


OUTROS ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

$$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$



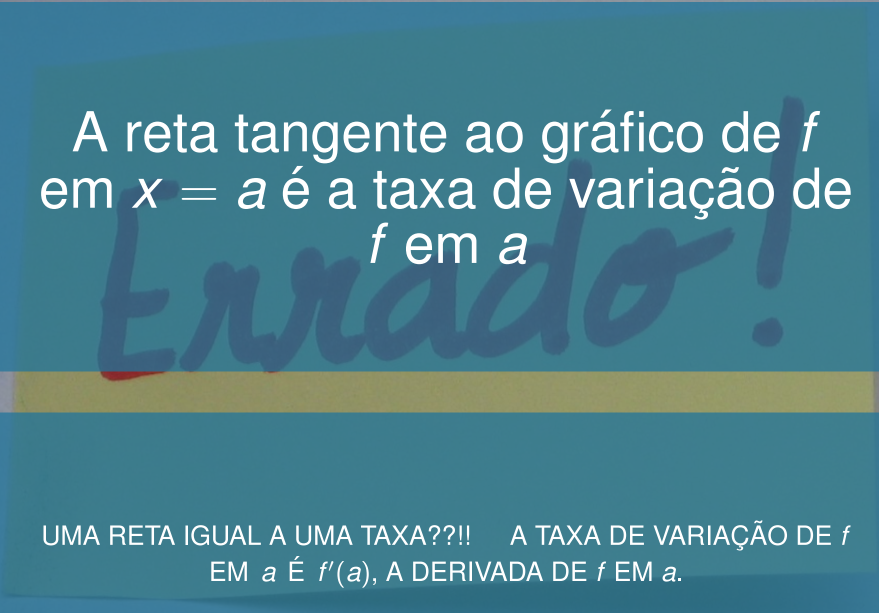
DEVERIA SER $-x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$. MAS, ESTANDO $-x^2 = 2$, NÃO EXISTIRIAM SOLUÇÕES PORQUE ESTA CONDIÇÃO É IMPOSSÍVEL!



$$y' = -3y - t \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -3 - t$$

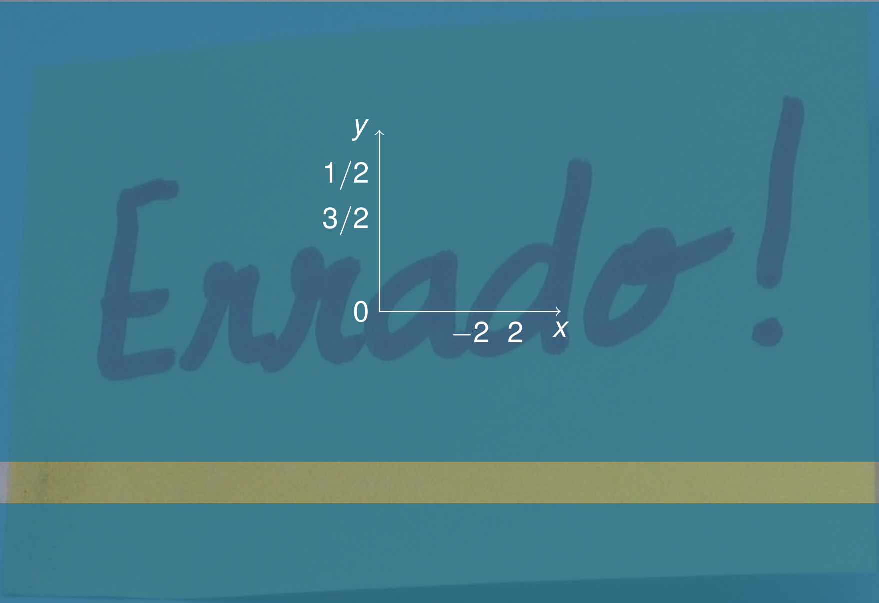
DEVERIA SER $\dfrac{y'}{y} = -3 - \dfrac{t}{y}$, ISTO É, QUANDO SE DIVIDE A EQUAÇÃO INICIAL POR y TODAS AS PARCELAS TÊM DE SER DIVIDIDAS POR y.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

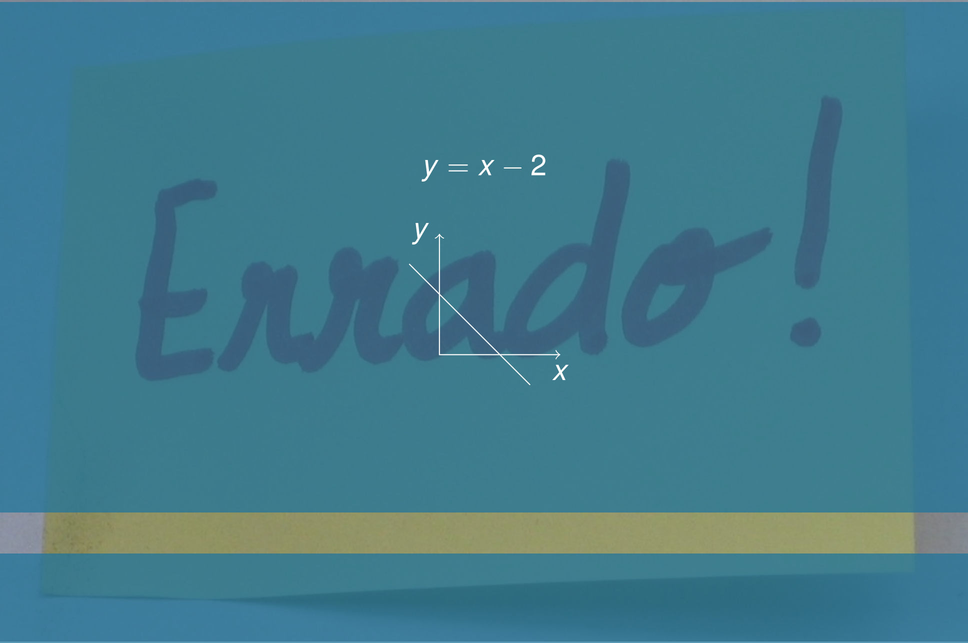


A reta tangente ao gráfico de f em $x = a$ é a taxa de variação de f em a

UMA RETA IGUAL A UMA TAXA??!! A TAXA DE VARIAÇÃO DE f EM a É $f'(a)$, A DERIVADA DE f EM a.



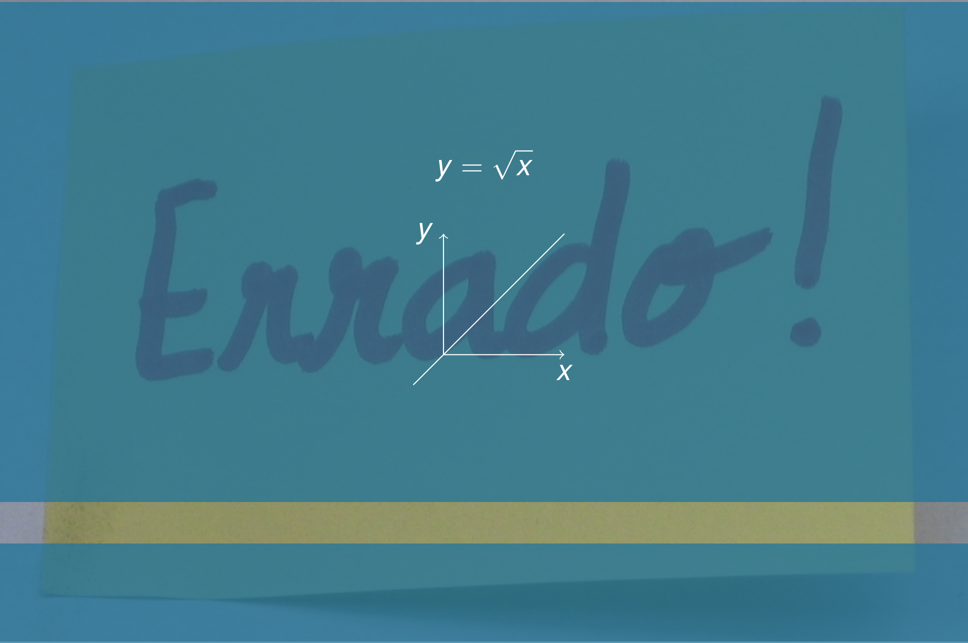
$$\frac{3}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{E} \quad -2 > 0\text{??!!}$$



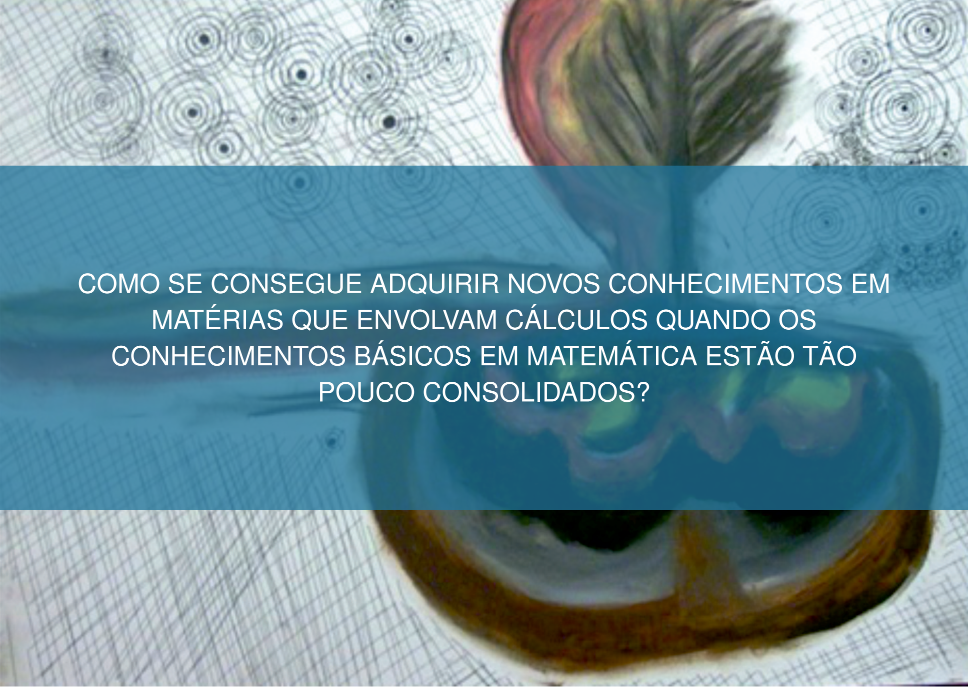
$$y = x - 2$$

ESTA RETA TEM DECLIVE POSITIVO??!!

$$y = \sqrt{x}$$



$y = \sqrt{x}$ É UMA RETA??!!


COMO SE CONSEGUE ADQUIRIR NOVOS CONHECIMENTOS EM MATÉRIAS QUE ENVOLVAM CÁLCULOS QUANDO OS CONHECIMENTOS BÁSICOS EM MATEMÁTICA ESTÃO TÃO POUCO CONSOLIDADOS?

SOURCES

Desenho de Paulo Rouxinol
paulorouxinolarte@sapo.pt