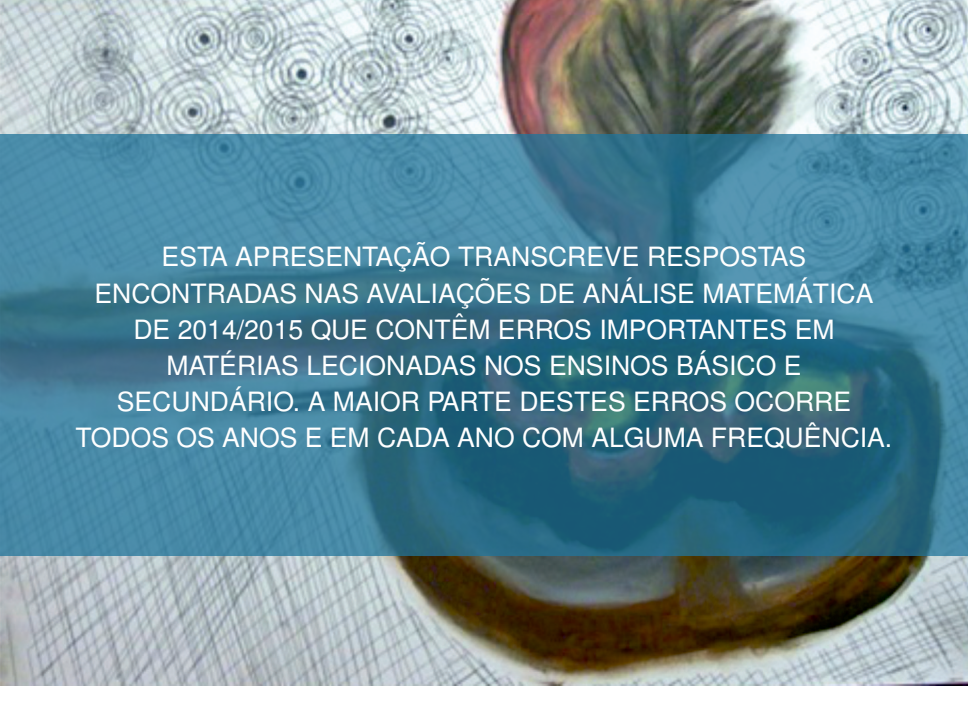


MAS QUE CÁLCULOS SÃO ESTES?!

Isabel Martins, Maria João Martins, Emília Pinto • ISA •
isabelinha@isa.ulisboa.pt, mjmartins@isa.ulisboa.pt, mila@isa.ulisboa.pt




ESTA APRESENTAÇÃO TRANSCREVE RESPOSTAS
ENCONTRADAS NAS AVALIAÇÕES DE ANÁLISE MATEMÁTICA
DE 2014/2015 QUE CONTÊM ERROS IMPORTANTES EM
MATÉRIAS LECIONADAS NOS ENSINOS BÁSICO E
SECUNDÁRIO. A MAIOR PARTE DESTES ERROS OCORRE
TODOS OS ANOS E EM CADA ANO COM ALGUMA FREQUÊNCIA.



Índice

- Operações algébricas
- Resolução de equações
- Interpretação geométrica



OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DO PRODUTO EM RELAÇÃO À
SOMA DE NÚMEROS REAIS

$$a(b + c) = ab + ac$$

E A PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DO PRODUTO DE NÚMEROS
REAIS

$$a(bc) = (ab)c$$

NEM SEMPRE SÃO USADAS CORRETAMENTE. EIS DOIS
EXEMPLOS.

Ennado!

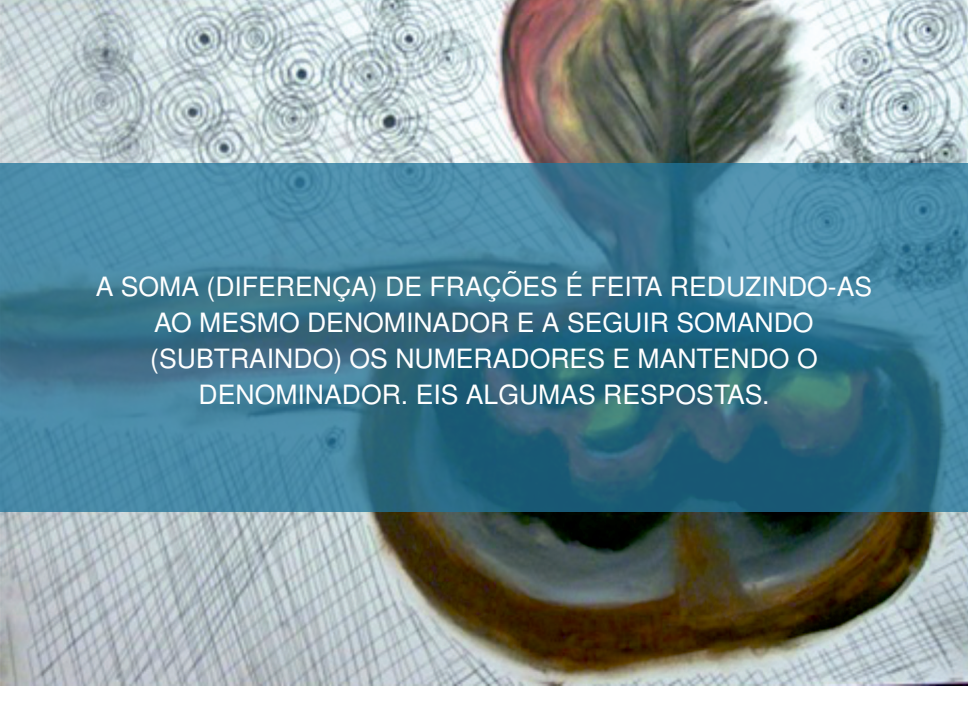
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

Erizado!

$$2(ab) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a2b + 2a = 0$$



OPERAÇÕES COM FRAÇÕES



A SOMA (DIFERENÇA) DE FRAÇÕES É FEITA REDUZINDO-AS
AO MESMO DENOMINADOR E A SEGUIR SOMANDO
(SUBTRAINDO) OS NUMERADORES E MANTENDO O
DENOMINADOR. EIS ALGUMAS RESPOSTAS.

$$1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4}$$

Errado!

OU SEJA, DEPOIS DA REDUÇÃO AO MESMO DENOMINADOR,
MULTIPLICARAM-SE OS NUMERADORES E MANTEVE-SE O
DENOMINADOR.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Errado!

AQUI, SOMARAM-SE OS NUMERADORES E OS DENOMINADORES.

$$\frac{8}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = \frac{8 - x}{(x^2 - 4)(x - 2)}$$

AGORA, FEZ-SE A DIFERENÇA DOS NUMERADORES E MULTIPLICARAM-SE OS DENOMINADORES.

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1}$$

Errado!

LENDO DA DIREITA PARA A ESQUERDA, MANTEVE-SE O NUMERADOR E SOMARAM-SE OS DENOMINADORES.

$$\frac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2} = x^{-4} + 2x^{-3} + x^{-2}$$

Errado!

• 1º ERRO $\frac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{x^2}$

• 2º ERRO $\frac{1}{2x^3} = 2x^{-3}$ (CORRETO É $\frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2}x^{-3}$).

$$\frac{8x - 16}{x^3 - 4x - 2x^2 + 8} - \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 4x - 2x^2 + 8} = 8x - 16 - x^3 + 4x$$

Errado!

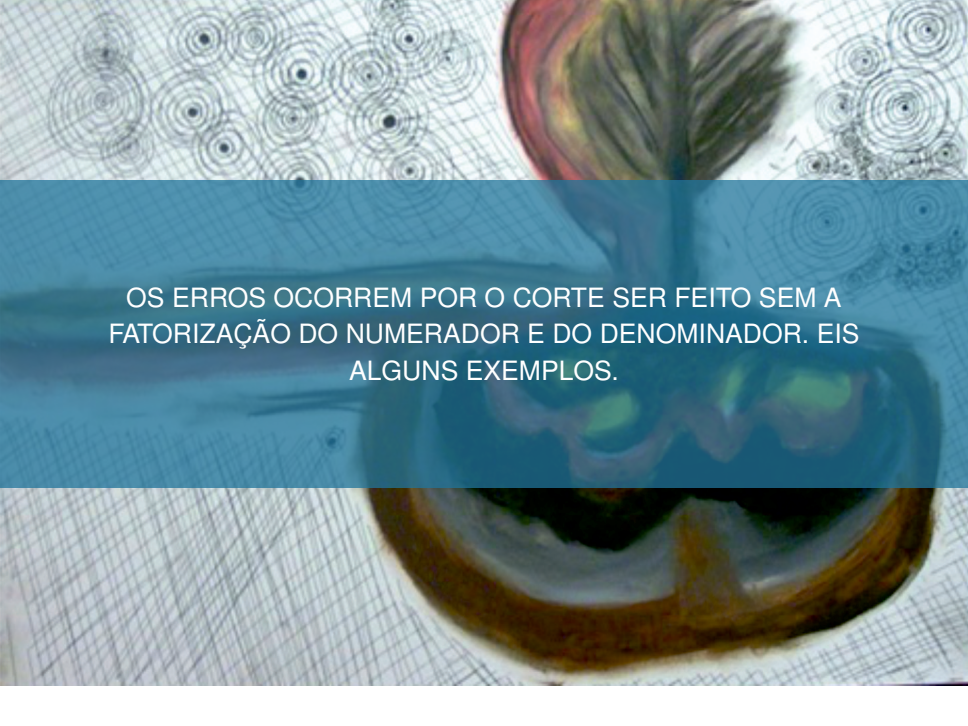
AGORA, FEZ-SE A DIFERENÇA DOS NUMERADORES E OS DENOMINADORES DESAPARECERAM!



NUMA FRAÇÃO, PODE FAZER-SE O CORTE DOS FATORES EM
COMUM NO NUMERADOR E NO DENOMINADOR

$$\text{PARA } a \neq 0, \quad \frac{ab}{a} = b$$

$$\frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$$



OS ERROS OCORREM POR O CORTE SER FEITO SEM A FATORIZAÇÃO DO NUMERADOR E DO DENOMINADOR. EIS ALGUNS EXEMPLOS.

Enmado!

$$\frac{-\beta}{1-\beta x} = \frac{-1}{1-x}$$

Enmudo!

$$\frac{2 \cancel{x}}{x^2 + 1} = \frac{2}{x + 1}$$

Enmado!

$$\cancel{x} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x}$$

Extrada!

$$\frac{x - 2x + 1 - x^2 + (x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{x - 2x + 1 - x^2}{(x - 1)^3}$$

The background features a white grid pattern overlaid with a series of concentric circles and a colorful, abstract, organic shape in shades of red, yellow, and green. A large, semi-transparent blue circle is centered over the image, containing the text.

OPERAÇÕES COM RAÍZES

A FÓRMULA RELATIVA À RAIZ QUADRADA DO PRODUTO DE NÚMEROS REAIS

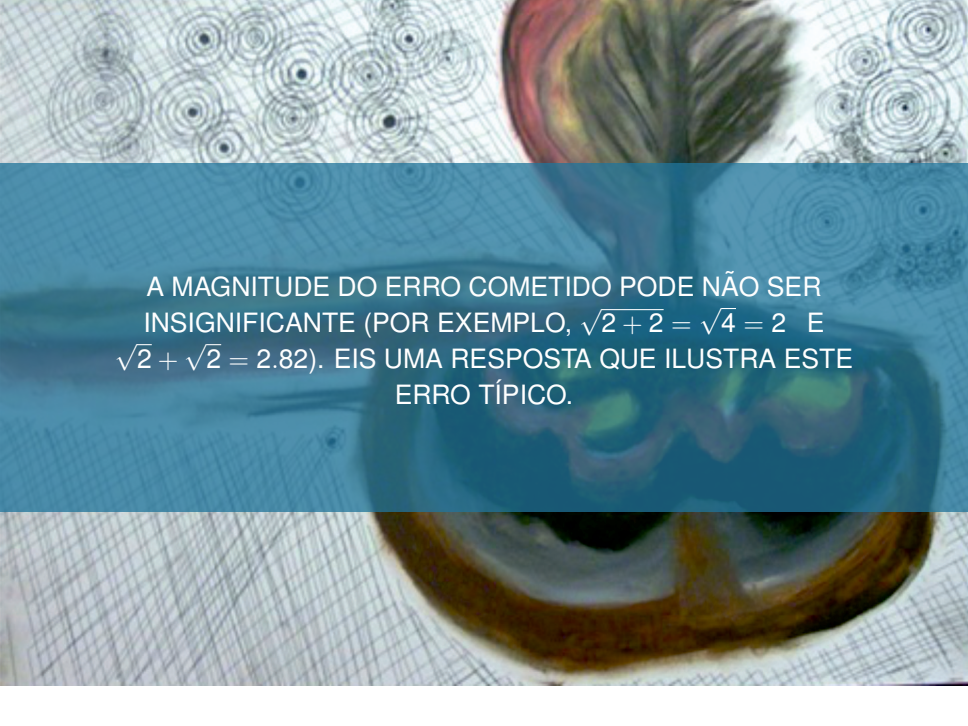
$$\text{PARA } a, b \geq 0, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

É “GENERALIZADA” ERRADAMENTE PARA A RAIZ QUADRADA DA SOMA

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ (errado)}$$

OU A RAIZ QUADRADA DA DIFERENÇA

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ (errado).}$$



A MAGNITUDE DO ERRO COMETIDO PODE NÃO SER INSIGNIFICANTE (POR EXEMPLO, $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ E $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2.82$). EIS UMA RESPOSTA QUE ILUSTRA ESTE ERRO TÍPICO.



$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{1}$

UM ERRO QUE COSTUMA OCORRER ASSOCIADO AO ANTERIOR É CONSIDERAR-SE

PARA $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$ (errado).

ORA,

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ SE } x \geq 0$$

MAS SE $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$ (POR EXEMPLO, $\sqrt{(-2)^2} = 2$)

OU SEJA, $\sqrt{x^2} = |x|$. EIS ALGUNS CASOS.

$$4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2 = x + y$$

Errado!

- ESTÁ CORRETO $4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 1º ERRO $\sqrt{4} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$
- 2º ERRO $2 = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} \Leftrightarrow 2 = x + y$.


$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1} - \sqrt{x^2} = 1 - x$$

Erwando!

$$x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{1-x}$$

VALE A PENA TRANSCREVER A SEGUNTE RESPOSTA

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1} - \sqrt{x^2} = 1 - (x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Errado!

PARA $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$, MAS

$$(x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2 \text{ ???!}$$

$$y = \sqrt{-x^2} \Leftrightarrow y = -x$$

Errado!

REPARE QUE, EM \mathbb{R} , $\sqrt{-x^2}$ SÓ ESTÁ DEFINIDA PARA $x = 0$.
PARA OS RESTANTES VALORES DE x FICAR-SE-IA COM RAÍZES
(QUADRADAS) DE VALORES NEGATIVOS!



OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS



A FÓRMULA DO PRODUTO DE POTÊNCIAS COM O MESMO EXPOENTE

$$a^n b^n = (ab)^n$$

É MUITAS VEZES “GENERALIZADA” ERRADAMENTE. EIS
• ALGUNS EXEMPLOS.

Enrulado!

$$\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Enxado!

$$\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Extrada!

$$x + \sqrt{x} = x(1 + 1^{\frac{1}{2}})$$



O DESENVOLVIMENTO DO QUADRADO DA SOMA DE N^{OS} REAIS

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

E O DO QUADRADO DA DIFERENÇA

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

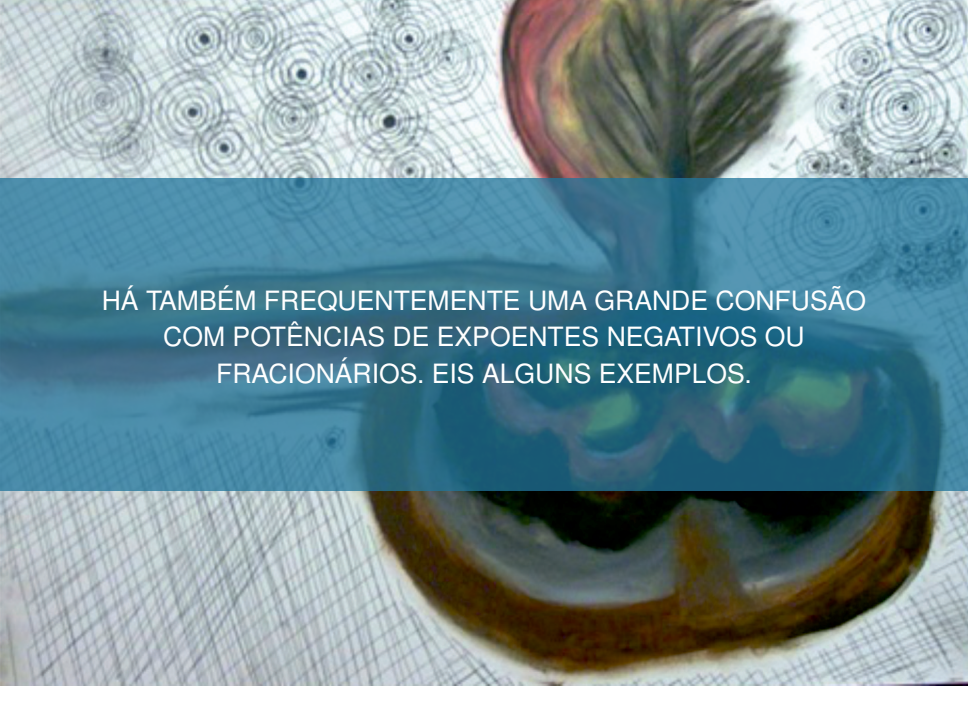
SÃO MUITAS VEZES ALTERADOS. EIS DOIS EXEMPLOS.

Erwado!

$$x^2 + 1 = (x + 1)^2$$

Erizado!

$$(-x + 2)^2 = -x^2 + 4$$



HÁ TAMBÉM FREQUENTEMENTE UMA GRANDE CONFUSÃO
COM POTÊNCIAS DE EXPOENTES NEGATIVOS OU
FRACIONÁRIOS. EIS ALGUNS EXEMPLOS.

$$1^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{1}$$

Errado!

CORRETO É $1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$. MAS PARA QUÊ ESTES CÁLCULOS SE SEM DEMORAS $1^a = 1$ PARA QUALQUER VALOR DE a ?

$$\sqrt{x} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Errado!

CORRETO É $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{x}$$

Errado!

CORRETO É $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

$$\frac{x^{-3}}{3} = \frac{3}{x^3}$$

Errado!

CORRETO É $\frac{x^{-3}}{3} = \frac{1}{3x^3}$.

$$(1 - 3x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1 - 3x}\right)^{-x}$$

Errado!

$$\text{ORA, } \left(\frac{1}{1 - 3x}\right)^{-x} = (1 - 3x)^x!$$

The background is a complex collage. A large, semi-transparent blue circle is centered over the image. To the right, a colorful parrot is visible, with its head and neck in shades of red, yellow, and green. The background also features a grid pattern with several sets of concentric circles, resembling ripples in water or a technical drawing. The overall aesthetic is technical and artistic.


OPERAÇÕES COM LOGARITMOS

AS FÓRMULAS DOS LOGARITMOS

PARA $a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

TÊM TIDO VÁRIAS "INTERPRETAÇÕES". EIS ALGUMAS DESSAS
"INTERPRETAÇÕES".

Erro! 

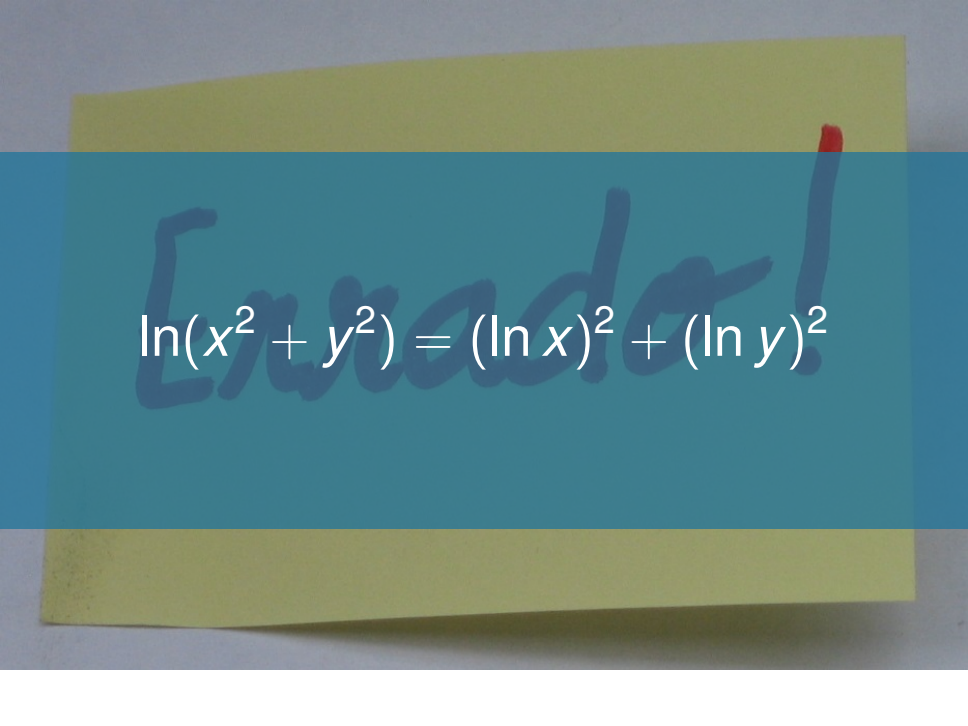
$$\ln(1 - 2x) = \ln 1 - \ln 2x$$

Erizado!

$$\ln(1 - 2x) = \frac{\ln 1}{\ln 2x}$$

Errado!

$$\ln(x^2 + y^2) \neq \ln x^2 \ln y^2$$



$\ln(x^2 + y^2) = (\ln x)^2 + (\ln y)^2$



OUTROS ERROS

$$e^1 = 0$$

Errado!

CORRETO É $e^1 = e!$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1-1}{x-1+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

Errado!

CORRETO É $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}$.

$$\left(\sin \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$

Errado!

CORRETO É $\left(\sin \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$.

$$\frac{8}{0} - \frac{2}{0} = 0$$

Errado!

$\frac{a}{0}$ NÃO ESTÁ DEFINIDO QUALQUER QUE SEJA O VALOR DE a !


$$y = \frac{1}{x}$$

se $y = 0$ então $x = 0$

se $x = 0$ então $y = 0$

Errado!

$\frac{1}{0}$???! CORRETO É $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow yx = 1$.

The background features a collage of mathematical and scientific motifs. On the left, there are several sets of concentric circles, resembling ripples in water or a topographic map, overlaid on a fine grid. On the right, there's a colorful, abstract shape that looks like a cross-section of a biological cell or a mathematical plot, with a bright yellow and red center. A large, semi-transparent blue circle is centered over the image, containing the text.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES



A LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

NÃO É MUITAS VEZES ENTENDIDA. EIS ALGUNS EXEMPLOS.

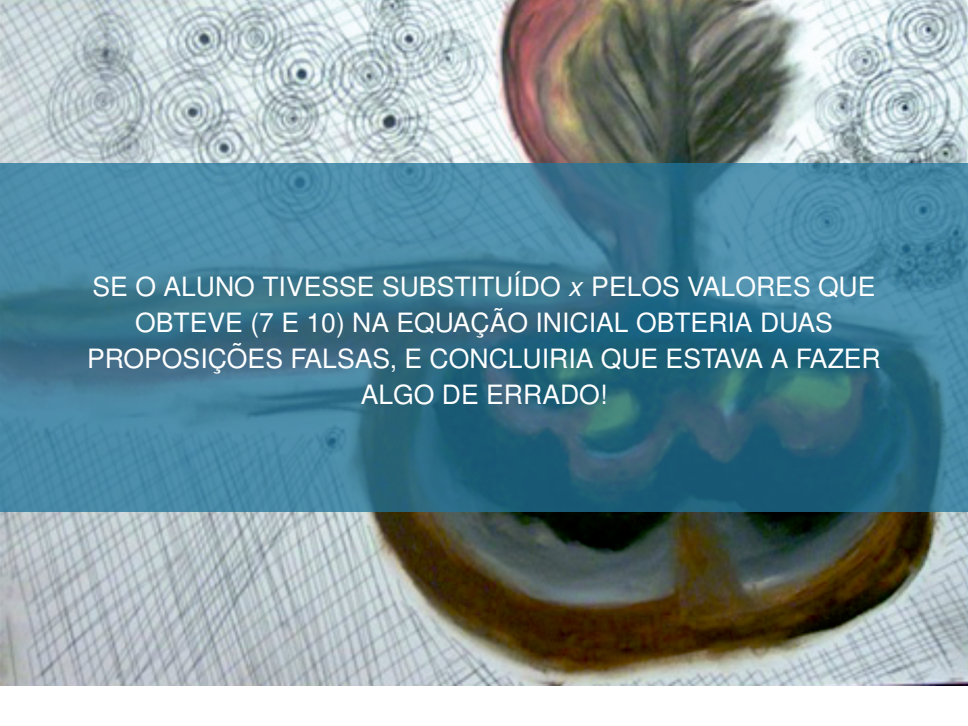
$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 10$$
$$\Leftrightarrow x(x + 3) = 10 \Leftrightarrow \underline{x = 10 \vee x + 3 = 10} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 7$$

Errado!

- ERRO $x(x + 3) = 10 \Leftrightarrow x = 10 \vee x + 3 = 10$

CORRETO É $x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 2.$$



SE O ALUNO TIVESSE SUBSTITUÍDO x PELOS VALORES QUE
OBTIVE (7 E 10) NA EQUAÇÃO INICIAL OBTERIA DUAS
PROPOSIÇÕES FALSAS, E CONCLUIRIA QUE ESTAVA A FAZER
ALGO DE ERRADO!

$$x(-x^2 + 2) + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2x \vee -x^2 + 2 = -2x$$

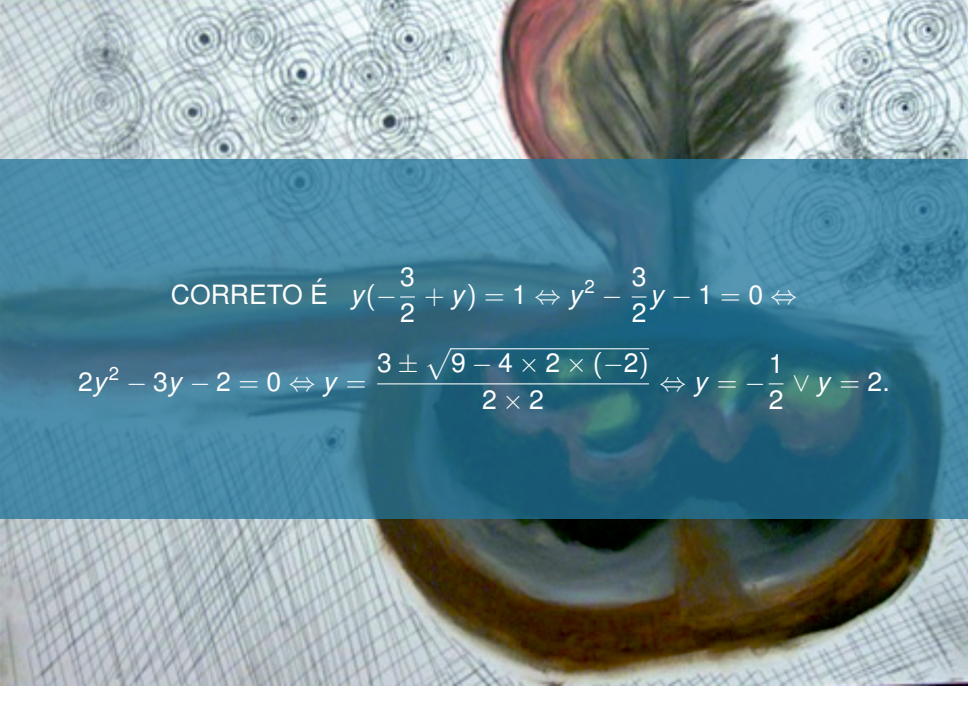
Errado!

CORRETO É $x(-x^2 + 2) + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 0 \vee -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2.$

$$y\left(-\frac{3}{2} + y\right) = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee \underbrace{-\frac{3}{2} + y = 1}_{\text{wavy line}} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 1 + \frac{3}{2}$$

Errado!

- ERRO $y\left(-\frac{3}{2} + y\right) = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee -\frac{3}{2} + y = 1.$

The background features a stylized tree with a thick trunk and a dense canopy of green and brown leaves, positioned on the right side. The entire scene is overlaid on a grid of graph paper. Concentric circular ripples, resembling water droplets, are scattered across the grid, particularly in the upper and lower corners.

CORRETO É $y(-\frac{3}{2} + y) = 1 \Leftrightarrow y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = 2.$$

$$x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{3}{2}$$

Errado!

CORRETO É $x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$y(1 + y) = 2 \Leftrightarrow y = 0 \vee 1 + y = 2$$

Errado!

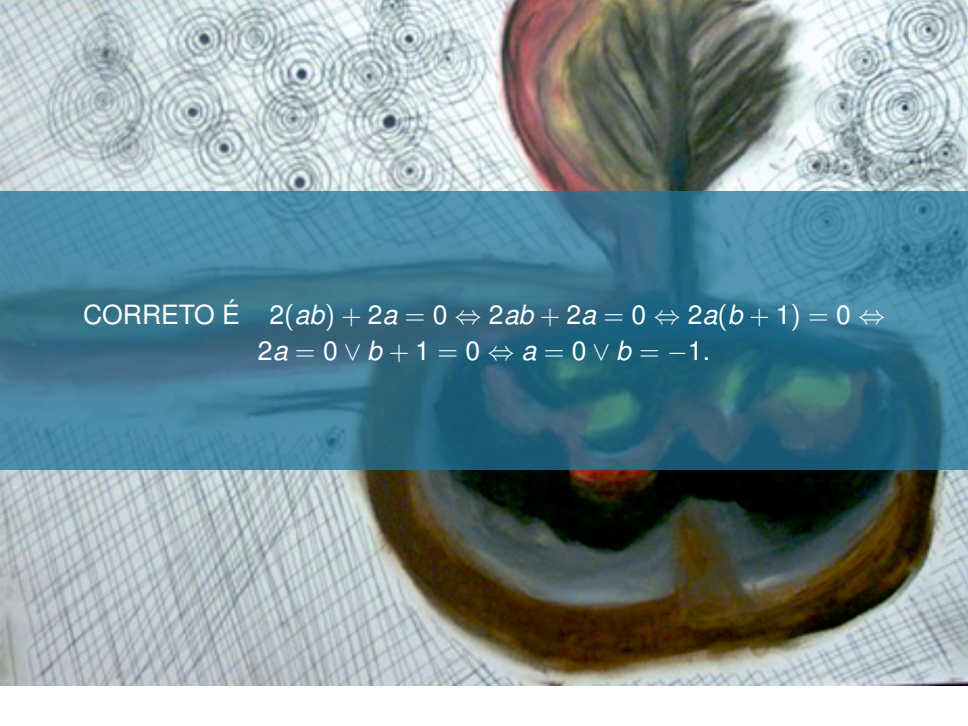
CORRETO É $y(1 + y) = 2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1.$$

$$2(ab)+2a = 0 \Leftrightarrow \underline{2a2b + 2a = 0} \Leftrightarrow \underline{4a2b = 0} \Leftrightarrow 4a = -2b \Leftrightarrow a = \frac{-2b}{4}$$

Errado!

- 1º ERRO $2(ab)$ NÃO É $2a2b$
- 2º ERRO $2a2b + 2a$ NÃO É $4a2b$
- 3º ERRO NÃO SE PODE TRANSPOR $2b$ PARA O LADO DIREITO COMO $-2b$!



CORRETO É $2(ab) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2ab + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a(b + 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $2a = 0 \vee b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = -1.$

The background is a complex composition. It features a light-colored grid pattern overlaid with numerous concentric circles of varying sizes and colors, including shades of blue, green, and red. A prominent, stylized tree with a dark trunk and a colorful, multi-layered canopy is positioned in the upper right quadrant. The overall aesthetic is technical and artistic, suggesting a connection to mathematics or science.

A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM RAÍZES ESTÁ MUITAS
VEZES ERRADA. EIS ALGUNS EXEMPLOS.

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x^2 = (2 - x)^2$$

Errado!

- ERRO $(\sqrt{x})^2 = x^2$

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x = \pm(2 - x)^2$$

Errado!

$$\pm(2 - x)^2??!$$

CORRETO É

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = (2 - x)^2$$

SENDO A 1^A EQUIVALÊNCIA VÁLIDA PARA $x \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0$ OU SEJA, AS SOLUÇÕES DA ÚLTIMA EQUAÇÃO QUE NÃO PERTENCEREM A $[0, 2]$ NÃO SÃO SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INICIAL.

ASSIM, PARA $x \in [0, 2]$,

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = 1 \quad \cancel{\wedge} \quad \cancel{x = 4}.$$

$$9 \times 0.1 = \sqrt{e^{-\frac{y^2}{2}} + 80} \Leftrightarrow \sqrt{9 \times 0.1} = e^{-\frac{y^2}{2}} + 80$$

Errado!

DEVERIA SER $(9 \times 0.1)^2$ EM VEZ DE $\sqrt{9 \times 0.1}$.



ASSIM, $9 \times 0.1 = \sqrt{e^{-\frac{y^2}{2}} + 80} \Leftrightarrow (9 \times 0.1)^2 = e^{-\frac{y^2}{2}} + 80 \Leftrightarrow$

$0.81 = e^{-\frac{y^2}{2}} + 80 \Leftrightarrow -79.19 = e^{-\frac{y^2}{2}}$ QUE É UMA CONDIÇÃO IMPOSSÍVEL (NÃO EXISTEM SOLUÇÕES).



OUTROS ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

$$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{-x^2 = 2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Errado!

DEVERIA SER $-x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$. MAS, ESTANDO $-x^2 = 2$, NÃO EXISTIRIAM SOLUÇÕES PORQUE ESTA CONDIÇÃO É IMPOSSÍVEL!

$$y' = -3y - t \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -3 - t$$

Errado!

DEVERIA SER $\frac{y'}{y} = -3 - \frac{t}{y}$, ISTO É, QUANDO SE DIVIDE A EQUAÇÃO INICIAL POR y TODAS AS PARCELAS TÊM DE SER DIVIDIDAS POR y .



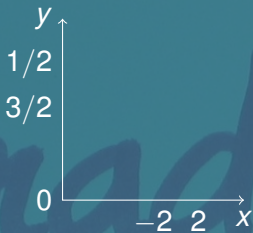
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A reta tangente ao gráfico de f
em $x = a$ é a taxa de variação de
 f em a

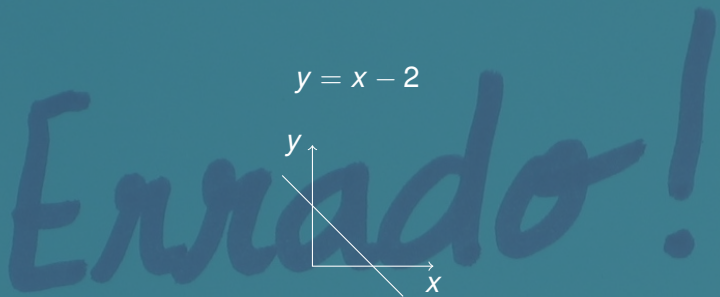
Errado!

UMA RETA IGUAL A UMA TAXA??!! A TAXA DE VARIAÇÃO DE f
EM a É $f'(a)$, A DERIVADA DE f EM a .

Errado!




$$\frac{3}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{E} \quad -2 > 0??!$$



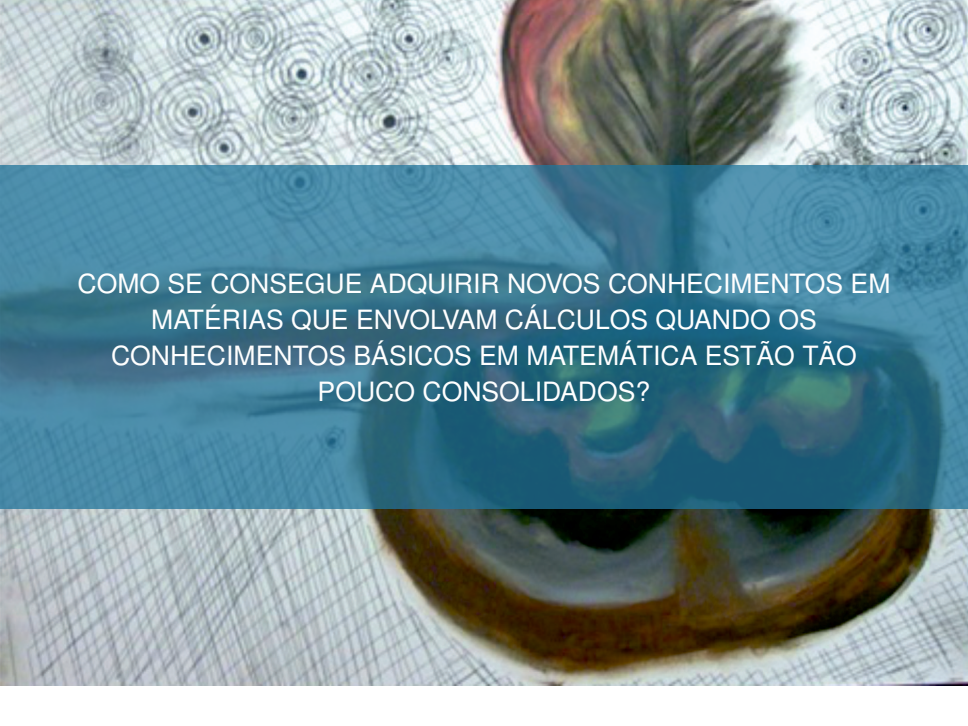
ESTA RETA TEM DECLIVE POSITIVO??!!

$y = \sqrt{x}$

Errado!



$y = \sqrt{x}$ É UMA RETA??!!



COMO SE CONSEGUE ADQUIRIR NOVOS CONHECIMENTOS EM
MATÉRIAS QUE ENVOLVAM CÁLCULOS QUANDO OS
CONHECIMENTOS BÁSICOS EM MATEMÁTICA ESTÃO TÃO
POUCO CONSOLIDADOS?

SOURCES



Desenho de Paulo Rouxinol
paulorouxinolarte@sapo.pt