Análise Matemática

Introdução às equações diferenciais (Soluções)

Instituto Superior de Agronomia

- 2015 -

1. Verifique que:

   (a) $y = xe^x$ é solução de $y'' - 2y' + y = 0$

   (b) $y = \sin x$ é solução de $y'' + 2y = \sin x$

   (c) $y = t \int\limits_0^t \sqrt{1+u^4}du$ é solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} ty' - y = t^2\sqrt{1+t^4}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo a que $f(0) = \frac{1}{3}$ e que a recta tangente ao seu gráfico em $(t, f(t))$ tenha declive $2\,t+3\,f(t)$. **Solução**: $f(t) = -\frac{2}{3}(t+\frac{1}{3})+\frac{5}{9}e^{3t}$

3. Indique a solução geral das seguintes equações:

   (a) $y' + \frac{3}{t}\,y = t$, $t > 0$. **Solução**: $y(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{k}{t^3}$, $k \in \mathbb{R}$

   (b) $t\,y' - y = \frac{t^2}{2}\sin t$, $t > 0$. **Solução**: $y(t) = -\frac{t}{2}\cos t + kt$, $k \in \mathbb{R}$

   (c) $(t+1)y' = 2\,y - (1+t)^2$, $t > -1$. **Solução**: $y(t) = -(t+1)^2\ln(t+1) + k\,(t+1)^2$, $k \in \mathbb{R}$

   (d) $y' + t\,y = 3t$, em $\mathbb{R}$. **Solução**: $y(t) = 3 + k\,e^{-t^2/2}$, $k \in \mathbb{R}$

   (e) $5\,y' + y = 5e^t$, em $\mathbb{R}$ **Solução**: $y(t) = \frac{5}{6}e^t + ke^{-t/5}$, $k \in \mathbb{R}$

   (f) $y' = (t-4)e^{4t} + 2y$, em $\mathbb{R}$. **Solução**: $y(t) = \frac{1}{2}e^{4t}(t-4) - \frac{1}{4}e^{4t} + ke^{2t}$, $k \in \mathbb{R}$

4. Resolva as equações diferenciais, explicitando as soluções sempre que possível:

   (a) $y' = 2(y-1)$. **Solução**: $y(t) = 1 + ke^{2t}$, $k \in \mathbb{R}$

   (b) $y' = 2(y-1)y$. **Solução**: $y \equiv 0 \,\vee\, y(t) = \frac{1}{1-ke^{2t}}$, $k \in \mathbb{R}$

   (c) $(1+x)y - (1-y)x\,y' = 0$. **Solução**: $y \equiv 0 \,\vee\, \ln|y| - y = \ln|x| + x + k$, $k \in \mathbb{R}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$. **Solução**: $y = \dfrac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$

(e) $(1+t)y' - y = 0$, $t > -1$. **Solução**: $y = k(1+t)$, $k \in \mathbb{R}$

(f) $y' = \sec y$. **Solução**: $\sin y = t + k$, $k \in \mathbb{R}$

(g) $y' = \pi(1+y^2)$. **Solução**: $y(x) = \operatorname{tg}(\pi x + k)$, $k \in \mathbb{R}$

(h) $y' + y^2 = 1$. **Solução**: $y \equiv 1 \vee y(x) = \frac{ke^{2x}-1}{ke^{2x}+1}$, $k \in \mathbb{R}$

(i) $\cos t \sin y \frac{dy}{dt} = \sin t \cos y$. **Solução**: $\cos y = k \cos t$, $k \in \mathbb{R}$

5. Resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

   (a) $\begin{cases} t^2y^2y' + 1 = y^3, \; t > 0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$ **Solução**: $y(t) = \sqrt[3]{1 + 7\,e^{3-3/t}}$

   (b) $\begin{cases} xy + e^{-x^2}(y^2-1)y' = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ **Solução**: $\frac{y^2}{2} - \ln|y| = -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1$

6. Determine o tempo necessário para um lago perder 10% da sua massa de poluentes existente no início de um dado ano, admitindo que a taxa de decrescimento da concentração de poluentes no lago verifica a equação

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{F}{V}c,$$

   onde F designa o volume de água limpa que entra no lago por ano e V o volume do lago. **Solução**: $-\ln 0.9\,\dfrac{V}{F}$ anos

7. É sabido que para muitas substâncias medicamentosas administradas na corrente sanguínea, a taxa de decrescimento da *concentração* (i.e., da quantidade de substância por unidade de volume, usualmente em mg/l) é proporcional, em cada instante, à concentração. Seja α a constante de proporcionalidade.

   (a) A administração da 1ª dose de uma dessas substâncias permite obter uma concentração na corrente sanguínea de 30 mg/l. Resolva o problema de valores iniciais que traduz a evolução da concentração dessa substância após a administração de uma dose. **Solução**: $C(t) = 30e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$

(b) A referida substância apenas é eficaz se a sua concentração na corrente sanguínea for superior ou igual a 10 mg/l. Sabe-se que após 8 horas a seguir à administração da 1ª dose a substância deixa de ser eficaz e administra-se uma nova dose.

   i. Determine α. **Solução**: $\alpha = \dfrac{\ln 3}{8}$

   ii. Determine ao fim de quanto tempo deve ser administrada a 3ª dose por forma a manter a eficácia da substância.

   Solução: 10.1 horas

8. Chama-se *tempo de semi-vida* de um elemento radioactivo ao tempo necessário para a sua massa se reduzir a metade. O Carbono 14 usado em datação de achados arqueológicos tem um tempo de semi-vida de 5730 anos. Determine a percentagem de Carbono 14 que se desintegra em 100 anos. Considere que a taxa de decaimento da massa de um elemento radioactivo num dado instante é proporcional à sua massa nesse instante. **Solução**: 1.20%

9. Se o crescimento de uma planta isolada num dado período é exponencial, a biomassa $W(t)$ tem uma taxa de crescimento semanal relativa constante, igual a $\mu > 0$.

   (a) Estabeleça a equação diferencial que exprime o aumento de biomassa W. **Solução**: $\dfrac{W'}{W} = \mu$

   (b) Sabendo que a biomassa duplica em cada semana, calcule μ.

   Solução: $\mu = \ln 2$

10. Os comprimentos de dois orgãos de um mesmo organismo verificam entre si uma relação *alométrica* se existir uma constante de proporcionalidade $K > 0$ entre as

respectivas taxas de crescimento relativas (verificam relações alométricas os comprimentos do crâneo e da coluna vertebral dos juvenis de muitas espécies de vertebrados). Considere os orgãos A e B cujos comprimentos verificam entre si uma relação alométrica e sejam $L_A(t)$ e $L_B(t)$ os comprimentos de A e B no instante t, respectivamente.

(a) Sejam C_A e C_B os comprimentos dos orgãos A e B, respectivamente, no instante inicial. Indique o problema de valores iniciais que traduz a evolução dos comprimentos de A e B.

Solução: $\begin{cases} \frac{L_A'}{L_A} = K\frac{L_B'}{L_B} \\ L_A(0) = C_A \\ L_B(0) = C_B \end{cases}$

(b) Mostre que se L_A e L_B satisfazem a equação $L_A = \alpha\, L_B^k$, com $\alpha > 0$, então L_A e L_B verificam entre si uma relação alométrica.

11. Segundo uma lei de Newton, a taxa de arrefecimento de um objecto aquecido é proporcional, em cada instante t, à diferença entre a temperatura envolvente, suposta constante, e a temperatura desse objecto no instante t.

(a) Estabeleça a equação diferencial que exprime a lei de arrefecimento segundo o modelo de Newton acima descrito.

Solução: $T'(t) = K(E - T(t))$, em que E é a temperatura envolvente, $T(t)$ é a temperatura do objecto no instante t e $K > 0$ é a constante de proporcionalidade.

(b) Sabendo que um café à temperatura de 100^oC, demorou 10min a arrefecer para os 80^oC, numa sala a 20^oC, determine o tempo necessário para o café atingir os 50^oC. **Solução**: 34.09 min

12. A equação diferencial de Bernoulli tem a forma

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = v(t)y^{\alpha}.$$

(a) Mostre que a mudança de variável $w = y^{1-\alpha}$, para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, transforma esta equação numa equação diferencial linear de primeira ordem.

(b) Utilizando a alínea anterior resolva a equação

$$\frac{dy}{dt} + ty = ty^2.$$

Solução: $y = \dfrac{1}{1 + ke^{t^2/2}}$, $k \in \mathbb{R}$

13. Pretende-se seguir a evolução do número de efectivos $N(t)$ de uma dada população. No instante inicial foram contabilizados 1×10^4 efectivos.

(a) Indique o problema de valores iniciais que traduz a dinâmica desta população, admitindo que a respectiva taxa de crescimento *per capita*, r, se mantém constante ao longo do tempo. **Solução**: $\begin{cases} \frac{N'}{N} = r \\ N(0) = 1 \times 10^4 \end{cases}$

(b) Sabendo que a população passou de 1×10^4 para 3.5×10^4 efectivos em 5 anos determine um valor aproximado (às duas casas decimais) para r.

Solução: $r = 0.25$

(c) Ajuste o problema de valores iniciais anterior admitindo que a população segue um crescimento logístico com a capacidade de sustentação do meio 3×10^5. **Solução**: $\begin{cases} \frac{N'}{N} = r(1 - \frac{N}{3 \times 10^5}) \\ N(0) = 1 \times 10^4 \end{cases}$

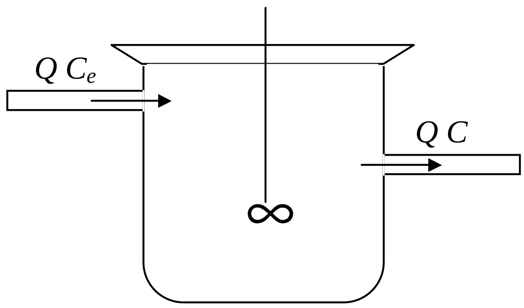
(d) Determine a lei de crescimento da população $N(t)$. O que sucede à população quando $t \to +\infty$? **Solução**: $N(t) = \dfrac{3 \times 10^5}{1 + 30e^{-0.25t}}$; $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 3 \times 10^5 =$ capacidade de sustentação do meio.

14. Considere o problema $\dfrac{dy}{dt} = t - y$, com a condição inicial $y(-1) = 4$.

(a) Resolva o problema analiticamente e represente graficamente a solução para t entre -1 e 4. **Solução**: $y = t - 1 + \frac{6}{e}e^{-t}$

(b) Resolva o problema numericamente, utilizando o método de Euler com passos 0.5, 0.25 e 0.1 e represente no mesmo gráfico da alínea anterior as soluções aproximadas. Compare os resultados obtidos. **Solução**: ver Anexo

15. Um tanque perfeitamente agitado é alimentado com uma corrente de caudal constante, Q. Esta consiste numa solução com concentração conhecida, C_e, num dado componente. O volume de líquido no tanque (V) é constante (o caudal de saída é igual ao de alimentação). Por se tratar de um tanque perfeitamente agitado, a concentração desse componente na corrente de saída, C, é igual à concentração em qualquer ponto do interior do tanque. A situação está ilustrada na figura



O balanço de massa ao tanque determina a igualdade entre a taxa de variação da quantidade do componente no interior do tanque ($V\dfrac{dC}{dt}$) e a diferença entre as respectivas taxas de entrada (QC_e) e de saída (QC). Obtém-se então a seguinte equação, cuja solução permite obter a evolução, ao longo do tempo t, da concentração à saída do tanque

$$V\frac{dC}{dt} = QC_e - QC.$$

Seja C_0 a concentração inicial (para $t = 0$) no interior do tanque.

(a) Sabendo que a concentração à entrada do tanque é constante, determine a solução analítica do problema. **Solução**: $C(t) = C_e + (C_0 - C_e)e^{-\frac{Q}{V}t}$

Se $C_e = 50$ mg/l, $Q = 5$ l/min, $V = 100$ l e $C_0 = 10$ mg/l, represente graficamente a evolução da concentração à saída do tanque ao longo da primeira hora. **Solução**: ver Anexo

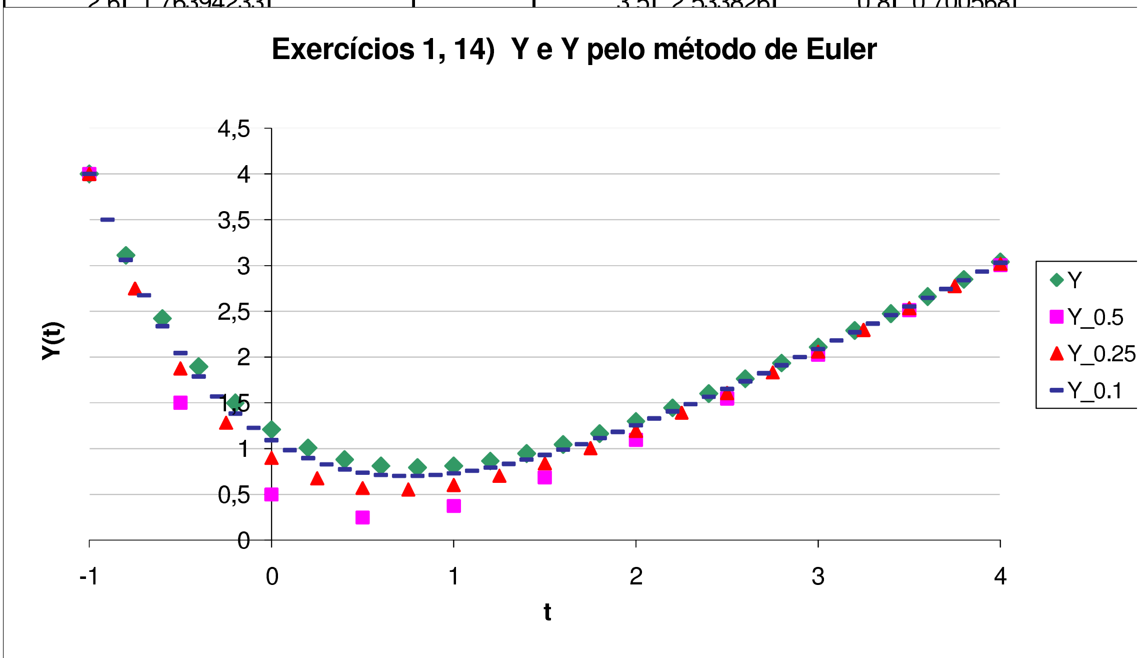
(b) Sabendo que a concentração à entrada do tanque varia sinusoidalmente com o tempo, de acordo com

$$C_e = 50 + 20 \sin \frac{\pi t}{30},$$

utilize o método de Euler para determinar a evolução da concentração à saída do tanque ao longo das primeiras 4 horas de operação, mantendo-se as condições de Q, V e C_0 idênticas às da alínea anterior. **Solução**: ver Anexo

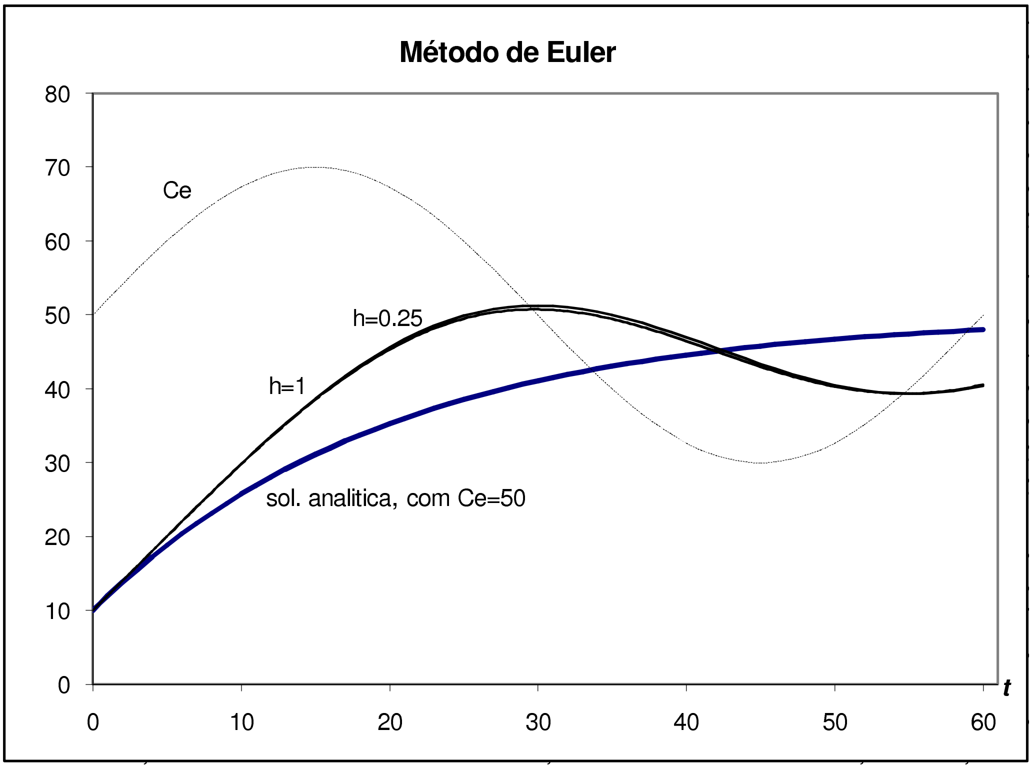
Anexo

t	Y(t)	t	Y0.5	t	Y0.25	t	Y0.1
-1	4	-1	4	-1	4	-1	4
-0,8	3,11238452	-0,5	1,5	-0,75	2,75	-0,9	3,5
-0,6	2,42192028	0	0,5	-0,5	1,875	-0,8	3,06
-0,4	1,89286982	0,5	0,25	-0,25	1,28125	-0,7	2,674
-0,2	1,49597378	1	0,375	0	0,898438	-0,6	2,3366
0	1,20727665	1,5	0,6875	0,25	0,673828	-0,5	2,04294
0,2	1,00716527	2	1,09375	0,5	0,567871	-0,4	1,788646
0,4	0,87958178	2,5	1,546875	0,75	0,550903	-0,3	1,569781
0,6	0,81137911	3	2,023438	1	0,600677	-0,2	1,382803
0,8	0,79179333	3,5	2,511719	1,25	0,700508	-0,1	1,224523
1	0,8120117	4	3,005859	1,5	0,837881	0	1,092071
1,2	0,86481895			1,75	1,003411	0,1	0,982864
1,4	0,94430772			2	1,190058	0,2	0,894577
1,6	1,04564147			2,25	1,392544	0,3	0,825119
1,8	1,16486038			2,5	1,606908	0,4	0,772608
2	1,29872241			2,75	1,830181	0,5	0,735347
2,2	1,44457322			3	2,060136	0,6	0,711812
2,4	1,60023962			3,25	2,295102	0,7	0,700631
2,6	1,76394233			3,5	2,533826	0,8	0,700568
						3,1	2,179817
						3,2	2,271835
						3,3	2,364652
						3,4	2,458186
						3,5	2,552368
						3,6	2,647131
						3,7	2,742418
						3,8	2,838176
						3,9	2,934359
						4	3,030923



Exercícios 1, 15. (a) e (b)

t	analítica	t	h=1	t	h=0.25
0	10	0	10	0	10
1	11,95082	1	12	0,25	10,5
2	13,8065	2	14,00453	0,5	11,00029
3	15,57168	3	16,01221	0,75	11,50087
4	17,25077	4	18,02062	1	12,00173



28	40,13612	28	51,05063	7	24,00161
29	40,61719	29	51,20601	7,25	24,49387
30	41,07479	30	51,25024	7,5	24,98478
31	41,51008	31	51,18773	7,75	25,47425
32	41,92414	32	51,02381	8	25,96217
33	42,318	33	50,76471	8,25	26,44843
34	42,69266	34	50,41746	8,5	26,93292
35	43,04904	35	49,98985	8,75	27,41555
36	43,38804	36	49,49036	9	27,89619
37	43,71051	37	48,92805	9,25	28,37474
38	44,01726	38	48,31252	9,5	28,85109
39	44,30904	39	47,65375	9,75	29,32512