SLIDES DE APOIO

(aulas teóricas)

Estatística Descritiva

É útil dividir a metodologia estatística em duas grandes classes: descritiva e inferencial.

Estatística Descritiva: Métodos visando organizar, apresentar e extrair informação dum conjunto de dados.

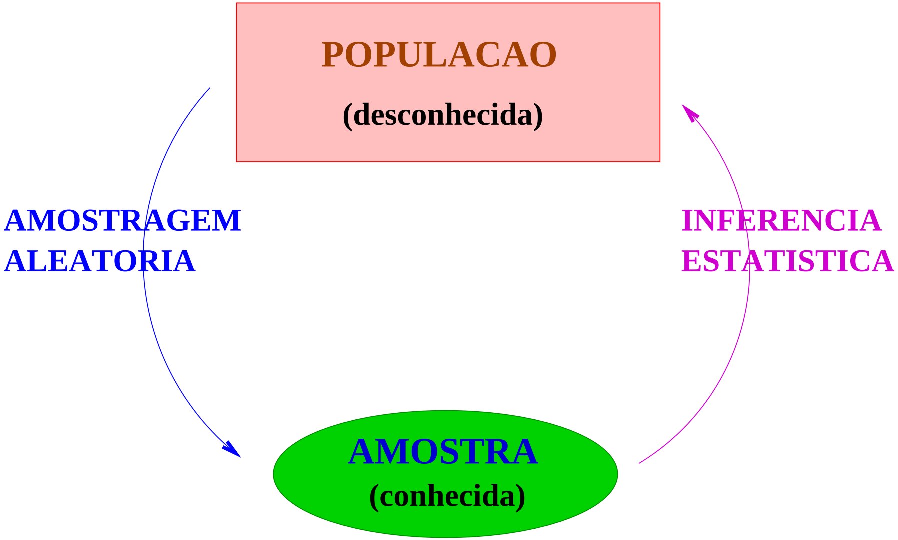
- Os dados podem ser relativos a uma população inteira (censo), a uma amostra (aleatória ou não).
- As conclusões apenas dizem respeito às entidades observadas.
- Exemplos:
  - Cálculo de indicadores (média, variância, quantis, etc.).
  - Tabelas de frequências.
  - Histogramas, *boxplots* ou outras ferramentas gráficas.

Inferência Estatística

O problema conceptualmente mais complexo, de procurar conclusões relativas a um conjunto vasto de elementos (a população), a partir da observação apenas dum subconjunto dessa população (a amostra) designa-se inferência.

- Para que se possa falar em inferência estatística, é necessário que a amostra tenha sido escolhida de forma aleatória.
- A inferência estatística baseia-se na Teoria de Probabilidades, que estuda os fenómenos aleatórios.
- Exemplos:
  - Propriedades de estimadores.
  - Intervalos de confiança.
  - Testes de Hipóteses.

A Inferência Estatística (cont.)



Breve revisão sobre Testes de Hipóteses

Na UC Estatística, dos primeiros ciclos do ISA, estudam-se técnicas de Estatística Descritiva e de Inferência Estatística.

Em particular, estudam-se Testes de Hipóteses para indicadores quantitativos de populações:

- média μ duma população;
- variância σ^2 duma população;
- comparação de médias de duas populações $(\mu_1 - \mu_2)$;
- comparação de variâncias de duas populações $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$.

As hipóteses dizem respeito à população. Opta-se entre hipóteses alternativas com base numa amostra aleatória dessa população (apontamentos de Estatística 2012/13, Acetatos 160-185).

Revisão de Testes de Hipóteses

Num teste de Hipóteses há cinco passos a seguir.

Passo 1. Formulam-se as hipóteses em confronto

- Hipótese Nula H_0 (e.g., $\mu = 2$) tem o benefício da dúvida
- Hipótese Alternativa H_1 (e.g., $\mu \neq 2$) tem o ónus da prova

Há que distinguir entre:

- a realidade (H_0 ou H_1); e
- a decisão (H_0 ou H_1).

Existem quatro possíveis combinações:

	Decisão	
Realidade	Admitir H_0	Rejeitar H_0 (optar por H_1)
H_0 verdade	Certo	Erro (Tipo I)
H_0 falso (H_1 verdade)	Erro (Tipo II)	Certo

Revisão de Testes de Hipóteses (cont.)

Passo 2. Identifica-se uma estatística de teste

- É a quantidade com base na qual se opta entre H_0 e H_1.
- É uma quantidade aleatória cujos valores apenas dependem da amostra e de H_0.
- É preciso conhecer a distribuição de probabilidades da estatística de teste sob H_0.

Num teste a uma média duma população Normal, a estatística de teste usual é:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_{|H_0}}{S/\sqrt{n}} \quad \cap \quad t_{n-1} \, ,$$

sendo $\overline{X}$ e S, respectivamente, a média e desvio padrão amostrais, n o tamanho da amostra e $\mu_{|H_0}$ o valor da média populacional sob a hipótese nula. O símbolo "$\cap$" indica que segue a distribuição, neste caso uma distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Revisão de Testes de Hipóteses (cont.)

Passo 3. Define-se o nível de significância do teste (α)

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{P[Erro de Tipo I]} \\ \alpha &= \text{P[Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdade]}\end{aligned}$$

Como é a probabilidade de um erro, queremos α pequeno.

Valores usuais: $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$.

Nota: Minimizar P[Erro Tipo I] significa diminuir a região crítica.
Mas isso tende a aumentar P[Erro Tipo II].

Não é possível minimizar simultaneamente a probabilidade dos dois tipos de erro.

A "solução" deste problema consiste em controlar P[Erro Tipo I]. Esse é o objectivo de fixar o nível de significância α.

Revisão de Testes de Hipóteses (cont.)

Passo 4. Definir a Região Crítica (Região de Rejeição)

- É o conjunto de valores da estatística ao qual associamos a rejeição de H_0;
- É constituída pelos valores da estatística de teste "menos plausíveis", caso fosse verdade H_0;
- Pode ser bilateral ou unilateral;
- É uma região de probabilidade α, se fôr verdade H_0.

Revisão de Testes de Hipóteses (cont.)

Passo 5. Conclusão

- Escolhe-se uma amostra concreta;
- Calcula-se o valor da estatística para essa amostra;
- Toma-se a decisão de Rejeitar H_0 ou de Não rejeitar H_0, consoante o valor da estatística calculado para a amostra escolhida recaia, ou não, na Região Crítica.

É o único passo onde é preciso que existam dados.

Os passos 3 a 5 podem ser substituídos pela indicação duma medida de plausibilidade de H_0, designada valor de prova ou *p-value*, definido como a probabilidade de obter um valor tão ou mais extremo quanto o observado na estatística do teste, caso seja verdade H_0.

Testes χ^2 de Pearson

Neste primeiro Capítulo estudamos uma classe específica de testes de Hipóteses, que partilham uma mesma estatística de teste: a estatística de Pearson.

Estes testes são também chamados testes χ^2, uma vez que a estatística de teste segue, assintoticamente, uma distribuição qui-quadrado.

Estes "testes χ^2" surgem associados a dados de contagem, que contam as frequências observadas de várias categorias ou classes.

Dados de contagem unidimensionais

Exemplo 1: contagens em classes definidas por um só factor/variável

Uma máquina produz lotes de paletes de madeira.
Controlo de qualidade: durante 200 dias conta-se o número de lotes defeituosos em cada dia.
Esta tabela de frequências organiza os resultados:

no. lotes defeituosos	0	1	2	3	4	5
no. de dias observados	78	69	33	16	3	1

Há $k = 6$ resultados observados: no. de lotes defeituosos (0 a 5).
A cada resultado associa-se uma contagem (frequência absoluta): o número de dias com esse resultado.

É admissível que as contagens sigam uma lei Poisson?

Dados de contagem bidimensionais

Exemplo 2: Tabelas de contingência (tabelas de dupla entrada)

Pretende-se avaliar se a proporção de machos e fêmeas duma espécie de morcegos sofre variações entre quatro diferentes *habitats*.

Capturam-se 30 morcegos em cada *habitat*. Foi registado o sexo de cada morcego capturado, com os seguintes resultados:

Habitat	1	2	3	4	Total
Machos	13	13	12	15	53
Fêmeas	17	17	18	15	67
Total	30	30	30	30	120

Aqui, as contagens fazem-se em células definidas pelo cruzamento de dois factores (variáveis qualitativas ou categóricas): *habitat* e sexo. A proporção de cada sexo difere consoante os *habitats*?

Vai desempenhar um papel importante o facto de se ter fixado previamente o número de observações em cada *habitat* (30).

Testes χ^2 (cont.)

Nos testes χ^2 comparam-se:

- as contagens observadas (indicadas pela letra O); com
- as contagens esperadas ao abrigo de alguma hipótese (indicadas pela letra E).

A maior ou menor proximidade global entre contagens observadas e esperadas contém informação sobre a plausibilidade da hipótese que gerou os valores esperados.

Começaremos por considerar um contexto associado a contagens em k classes, definidas por um único factor de classificação (como no exemplo dos lotes de madeira).

Testes χ^2 para ajustamento a distribuições

Considerem-se N observações independentes que podem recair num de k resultados. O número de observações com o resultado i representa-se por O_i.

Exemplo: Controlo de qualidade numa linha de produção de embalagens de 6 latas de cerveja.
Para cada embalagem, conta-se o número de latas que não passam o controlo de qualidade, havendo assim $k = 7$ possíveis resultados (0,1,2,3,4,5 ou 6 latas rejeitadas).

Em $N = 200$ embalagens, conta-se o número O_i de embalagens com i latas rejeitadas no controlo ($i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Foram obtidos os seguintes valores:

No. latas impróprias	0	1	2	3	4	5	6
No. embalagens (O_i)	141	48	9	2	0	0	0

A hipótese nula

Considere-se uma hipótese nula que associa a cada uma das k categorias uma probabilidade π_i.

Exemplo: No contexto do exemplo anterior, é natural admitir que o número de latas impróprias em cada embalagem (representado pela variável aleatória X) siga uma distribuição Binomial, com primeiro parâmetro $m = 6$.

Recorde-se que a distribuição Binomial surge associada a variáveis aleatórias X que contam o número de êxitos em m provas de Bernoulli, ou seja, experiências aleatórias que se podem repetir indefinidamente em condições análogas e que:

- são repetidas m vezes de forma independente:
- cada prova só tem dois possíveis resultados ("êxito" e "fracasso");
- cada prova tem igual probabilidade p de ter um "êxito".

A hipótese nula (cont.)

Considere-se a hipótese nula de que o número de latas impróprias em cada embalagem (representado pela variável aleatória X) segue uma distribuição Binomial, de parâmetros $B(m=6\,,\,p=0.04)$:

$$H_0\ :\ X \frown B(6\,,\,0.04)\ .$$

ou seja, que a probabilidade de haver i latas impróprias numa embalagem de 6 latas é dada por:

$$H_0\ :\ \pi_i = \binom{6}{i}\, 0.04^i\, 0.96^{6-i}\ ,\quad \forall\, i = 0, ..., 6\ .$$

A hipótese alternativa será:

$$H_1\ :\ \text{outros } \pi_i \qquad \Leftrightarrow \qquad H_1 : X \not\frown B(6\,,\,0.04).$$

Valores esperados

Ao abrigo dessa hipótese, e tendo em conta o total de N observações, o número esperado de observações na categoria i seria $E_i = N\,\pi_i$.

No exemplo, ter-se-á $E_i = 200\,\pi_i$ e:

i	0	1	2	3	4	5	6
π_i	0.7828	0.1957	0.0204	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000
E_i	156.552	39.138	4.077	0.226	0.007	0.000	0.000

comparando-se com os valores observados:

O_i	141	48	9	2	0	0	0

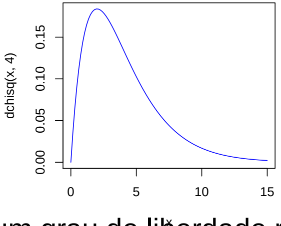
Questão:
a distribuição observada é compatível com a distribuição esperada?

A estatística de Pearson

No contexto agora descrito, Pearson mostrou que a estatística

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

segue assintoticamente (i.e., para grandes amostras) uma distribuição χ^2_{k-1}, caso H_0 seja verdade.



NOTA: a subtração de um grau de liberdade resulta da restrição ao número de observações em cada categoria, uma vez que a sua soma tem de ser N. Há apenas $k-1$ "valores observados livres".

Hipóteses do teste

Em geral, defina-se a hipótese nula como

H_0: a hipótese que gera os valores esperados E_i

e a hipótese alternativa como

H_1: outra distribuição de probabilidades para os π_i.

Quanto mais os O_is e E_is diferirem, mais duvidosa a hipótese nula , i.e.,
quanto maior o valor calculado da estatística X^2_{calc}, mais duvidosa H_0.

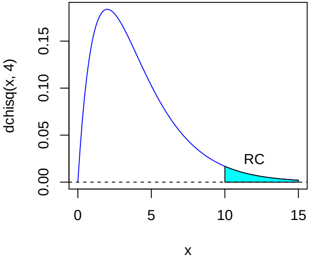
Logo, é natural definir uma Região Crítica unilateral direita.

Região Crítica

Região Crítica unilateral direita:

$$\textit{Rejeitar } H_0 \textit{ (hipótese subjacente aos } E_i\textit{) se } X^2_{calc} > \chi^2_{\alpha;(k-1)},$$

sendo $\chi^2_{\alpha;(k-1)}$ o valor que, numa distribuição χ^2 com $k-1$ graus de liberdade, deixa à sua direita uma região de probabilidade α.



A probabilidade de recair na Região Crítica, se H_0 é verdade, será α.

Validade da distribuição assintótica

A distribuição da estatística de Pearson é apenas assintótica, ou seja, aproximada para grandes amostras. Há critérios diferentes para quando se considera a aproximação adequada.

Um critério, proposto por Cochran, é:

- nenhum E_i inferior a 1;
- não mais do que 20% dos E_is inferiores a 5.

Caso estas condições não se verifiquem, podem-se agrupar classes de forma a satisfazer o critério.

Exemplo

Seguindo o critério de Cochran, no exemplo anterior será necessário agrupar as classes correspondentes a 2 ou mais latas rejeitadas, obtendo-se a nova tabela com apenas $k = 3$ classes:

i	0	1	≥ 2
π_i	0.7828	0.1957	0.0216
E_i	156.552	39.138	4.311
O_i	141	48	11

A estatística de Pearson calculada tem valor: $X^2_{calc} = 13.9327.$

Numa distribuição χ^2_{3-1} o limiar da região crítica ao nível $\alpha = 0.05$ é $\chi^2_{0.05(2)} = 5.991$, pelo que se rejeita a hipótese nula $X \cap B(6, 0.04)$.

Opta-se pela hipótese H_1 de a distribuição não ser Binomial, ou ser Binomial, mas com outro valor do parâmetro p.

Pearson com a estimação de parâmetros

Por vezes, pode existir uma hipótese incompletamente especificada relativa aos valores esperados E_i. No exemplo anterior, se é natural admitir uma distribuição Binomial cujo primeiro parâmetro seja $m = 6$, é discutível qual deva ser o valor do segundo parâmetro p (que representa a probabilidade duma lata individual estar imprópria).

Admitir que o número de latas impróprias por embalagem segue uma distribuição Binomial $B(6, p)$, mas com p desconhecido, não chega para calcular s valores esperados E_i. É necessária a estimação de p.

Quando o cálculo dos valores esperados exige a estimação de um ou mais parâmetros da distribuição (ou seja, quando a hipótese nula está incompletamente especificada), é necessário retirar um grau de liberdade por cada parâmetro estimado.

A estimação de parâmetros no exemplo

Só é possível calcular os valores esperados E_i conhecendo o valor do parâmetro p. Uma boa forma de estimar p será recordar que

$$X \cap B(m,p) \quad \Rightarrow \quad E[X] = mp \ ,$$

Pode então usar-se a média amostral $\overline{x}$ para estimar p: $\quad \overline{x} = m\,\hat{p}$.

Com base nos dados, o número médio de latas impróprias por embalagem, nas 200 embalagens, é $\overline{x} = 0.36$. Como $m = 6$, tem-se

$$\hat{p} \ = \ \frac{\overline{x}}{m} \ = \ \frac{0.36}{6} \ = \ 0.06 \ .$$

Exemplo

Agora, a probabilidade estimada de haver i latas impróprias numa embalagem de 6 latas será dada por:

$$\hat{\pi}_i = \binom{6}{i} 0.06^i \, 0.94^{6-i} \, .$$

Para $N = 200$ embalagens, tem-se $\hat{E}_i = 200 \, \hat{\pi}_i$.

Reconstruindo a tabela para uma Binomial $B(6\,,0.06)$, tem-se:

i	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{\pi}_i$	0.6899	0.2642	0.0422	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000
$\hat{E}_i$	137.974	52.841	8.432	0.718	0.034	0.001	0.000

comparando-se com os (mesmos) valores observados:

O_i	141	48	9	2	0	0	0

Pearson com estimação de parâmetros (cont.)

Sendo necessário estimar r parâmetros, a estatística

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - \hat{E}_i)^2}{\hat{E}_i}$$

segue assintoticamente uma distribuição χ^2_{k-1-r}.

Definindo a hipótese nula como

> *hipótese que (após a estimação de parâmetros) gerou os valores esperados estimados $\hat{E}_i$*

Define-se uma Região Crítica unilateral direita, ou seja:

> *Rejeita-se H_0 (hipótese subjacente aos $\hat{E}_i$) se $X^2_{calc} > \chi^2_{\alpha;k-1-r}$*

Exemplo (cont.)

De novo, colapsa-se a tabela para satisfazer o critério de Cochran (que garante a qualidade da aproximação assintótica à distribuição χ^2):

i	0	1	≥ 2
$\hat{\pi}_i$	0.6899	0.2642	0.0459
$\hat{E}_i$	137.974	52.841	9.185
O_i	141	48	11

A estatística de Pearson calculada tem agora valor:

$$X^2_{calc} \quad = \quad 0.8686$$

Numa distribuição χ^2_{3-1-1} o limiar duma região crítica ao nível $\alpha = 0.05$ é $\chi^2_{0.05(1)} = 3.841$, pelo que não se rejeita a hipótese de a distribuição subjacente ser Binomial (em particular, $B(6, 0.06)$).

O teste χ^2 de ajustamento a distribuições discretas

Os exemplos que acabámos de considerar mostram como o teste χ^2, baseado na estatística de Pearson, pode ser usado como um teste de ajustamento duma amostra a uma dada distribuição de probabilidades.

No exemplo considerado, tratava-se duma distribuição discreta (a Binomial). Para outras distribuições discretas (Poisson, Geométrica, Binomial Negativa ou qualquer outra, adequada ao problema sob estudo) pode proceder-se de forma análoga.

No caso de distribuições contínuas, o teste pode ainda ser utilizado, definindo classes de possíveis valores da variável.

O teste χ^2 de ajustamento a distribuições contínuas

Definidas k classes de possíveis valores da variável,

- Contam-se as observações que recaem em cada classe. Essas frequências absolutas constituem os valores observados O_i;
- Os valores esperados E_i, calculam-se a partir das probabilidades π_i de recair na classe i, dada a distribuição de H_0: $E_i = N \times \pi_i$.

AVISO: Caso seja necessário estimar algum parâmetro da distribuição, procede-se como antes: calcular valores esperados estimados, ($\hat{E}_i = N \times \hat{\pi}_i$), e retirar um grau de liberdade por cada parâmetro estimado.

AVISO: Para testar a Normalidade, é preferível utilizar o teste de Shapiro-Wilks, já estudado na disciplina de Estatística do 1o. ciclo.

Teste χ^2 com tabelas de contingência

Admita-se agora um novo contexto para a questão discutida antes: classificam-se observações em várias categorias, mas essas categorias resultam de combinar os níveis de 2 factores.

No contexto dum exemplo de biodiversidade, admita-se que:

- há a locais geográficos, que constituem os níveis de um factor A;
- em cada local se contam as observações de cada uma de b espécies, que definem os níveis dum factor B.

Tabelas de contingência

Assim, as N observações são classificadas de acordo com dois diferentes factores.

Chama-se tabela de contingência a uma tabela com o número O_{ij} de observações em cada célula (i, j) (nível i do factor A e j do factor B):

Níveis do Factor A	Níveis do Factor B					Marginal de A
	1	2	3	$\cdots$	b	
1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	$\cdots$	$O_{1,b}$	$N_{1\cdot}$
2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	$\cdots$	$O_{2,b}$	$N_{2\cdot}$
3	O_{31}	O_{32}	O_{33}	$\cdots$	$O_{3,b}$	$N_{3\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	O_{a1}	O_{a2}	O_{a3}	$\cdots$	$O_{a,b}$	$N_{a\cdot}$
Marginal de B	$N_{\cdot 1}$	$N_{\cdot 2}$	$N_{\cdot 3}$	$\cdots$	$N_{\cdot b}$	N

$$N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{b} O_{ij} \qquad\qquad N_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{a} O_{ij}$$

Diferentes contextos para tabelas de contingência

Tal como no contexto unidimensional, também no estudo de tabelas de contingência, surgem diferentes situações.

- As probabilidades π_{ij} de recair em cada célula (i,j) podem ser totalmente especificadas por alguma hipótese. Vamos exemplificar esta situação com exemplos ligados à genética.
- As probabilidades π_{ij} de recair em cada célula (i,j) podem ser desconhecidas, mas estimáveis, dada alguma hipótese. Vamos exemplificar esta situação com dois contextos:
  - testes de homogeneidade.
  - testes de independência.

Situação 1: probabilidades totalmente especificadas

Exemplo 1: Cruzam-se coelhos, em que:

- um gene controla a cor do pêlo, com:
  - um alelo determinante do cinzento (dominante);
  - um alelo determinante do branco (recessivo).
- outro gene controla o tipo de pelagem, com:
  - um alelo determinante do pêlo normal (dominante);
  - um alelo determinante da pelagem tipo Rex (recessivo).

Os coelhos da população inicial são heterozigóticos nos dois genes, i.e., têm um alelo de cada cor e um alelo de cada tipo de pelagem.

Exemplo 1 (cont.)

Se a segregação dos genes fôr independente, isto é, se o alelo da cor fôr independente do alelo do tipo de pelagem, seria de esperar que os descendentes desta população surgissem nas seguintes proporções:

- $9/16$ coelhos cinzentos de pelagem normal;
- $3/16$ coelhos cinzentos de pelagem tipo Rex;
- $3/16$ coelhos brancos de pelagem normal;
- $1/16$ coelhos brancos de pelagem tipo Rex;

Numa descendência de $N = 232$ coelhos, observaram-se:

		Pêlo	
		Normal	Rex
Cor	Cinzento	134	44
	Branco	42	12

Exemplo 1 (cont.)

Neste exemplo existem $a = 2$ cores do pêlo e $b = 2$ tipos de pelagem, num total de $ab = 4$ situações experimentais.

Caso sejam verdadeiros os pressupostos de segregação independente e dominância/recessividade dos genes, o número esperado de observações em cada célula será dado por $E_{ij} = N \times \pi_{ij}$, sendo as probabilidades π_{ij} de cada célula iguais às proporções esperadas dadas no acetato 48:

E_{ij}		Pêlo: Normal	Pêlo: Rex
Cor	Cinzento	$232 \times \frac{9}{16} = 130.5$	$232 \times \frac{3}{16} = 43.5$
	Branco	$232 \times \frac{3}{16} = 43.5$	$232 \times \frac{1}{16} = 14.5$

Estes valores esperados são compatíveis com os observados?

Estatística do teste para tabelas bidimensionais

No contexto agora descrito, a estatística de Pearson tem a forma

$$X^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

e segue assintoticamente uma distribuição χ^2_{ab-1}.

Os graus de liberdade são o número de células (ab) menos o número de restrições, que neste caso é apenas um: o número total de observações N que foi utilizado na experiência.

Tem-se uma Região Crítica unilateral direita, ou seja:

Rejeita-se H_0 se $\quad X^2_{calc} > \chi^2_{\alpha;(ab-1)}$,

sendo H_0 a hipótese resultante da teoria genética (a hipótese que gerou os valores esperados E_{ij}).

Exemplo 1 (cont.)

O valor da estatística de Pearson para a amostra referida é

$$X^2_{calc} = \frac{(134-130.5)^2}{130.5} + \frac{(44-43.5)^2}{43.5} + \frac{(42-43.5)^2}{43.5} + \frac{(12-14.5)^2}{14.5} = 0.5823755\,.$$

A fronteira da região crítica ao nível $\alpha = 0.05$ é

$$\chi^2_{0.05(3)} = 7.814728\,.$$

Logo, não se rejeita H_0, isto é, não se rejeitam as hipóteses genéticas referidas (dominância/recessividade e segregação independente dos genes).

Segunda situação: Testes de homogeneidade

Consideremos agora situações onde as hipóteses nulas a testar não estão totalmente especificadas, e exigem a estimação de parâmetros. Veremos dois casos particulares frequentes, desta situação.

Numa segunda situação, o número de observações em cada nível de um factor é previamente fixado (exemplo dos morcegos, acetato 26).

Para fixar ideias, admita-se que os a totais de linha, $N_{i\cdot}$, foram previamente determinados pelo experimentador.

Neste caso, objectivo de interesse pode ser o de ver se as $N_{i\cdot}$ observações de cada linha (nível do factor A) se distribuem de forma análoga (homogénea) pelas b colunas (níveis do factor B).

Um teste com este objectivo chama-se um teste de homogeneidade.

Exemplo 2 - Teste de Homogeneidade

Nos solos duma dada região foi assinalada a presença de larvas de 4 espécies de insectos que afectam as principais culturas da região.

Pretende-se investigar se as frequências relativas das espécies são ou não iguais nos vários tipos de solos.

Classificaram-se os solos em três tipos: arenosos, limosos e argilosos (Factor A, com a=3 níveis).

Em cada tipo de solos foram recolhidas 100 larvas, e classificadas de acordo com a respectiva espécie (Factor B, com b=4 níveis).

Exemplo 2 (cont.)

Feita a classificação das larvas, obtiveram-se os seguintes resultados:

		Espécie de larva				Total
		1	2	3	4	
Tipos	Arenosos	27	24	23	26	100
de	Limosos	20	32	18	30	100
solos	Argilosos	13	37	16	34	100
	Total	60	93	57	90	300

O objectivo é o de saber se se pode admitir que a distribuição das quatro espécies é idêntica nos três tipos de solos.

Hipóteses num teste de homogeneidade

Seguindo com o exemplo, a hipótese nula é que as probabilidades de cada espécie, condicionais ao solo i, ($\pi_{1|i}$, $\pi_{2|i}$, $\pi_{3|i}$ e $\pi_{4|i}$), não dependem do tipo de solo i dado.

Designando por $\pi_{j|i}$ a probabilidade da espécie j, para o solo i:

$$H_0 \;:\; \left\{ \begin{array}{ll} \pi_{1|1} = \pi_{1|2} = \pi_{1|3} & [\,= \pi_{.1}\,] \\ \pi_{2|1} = \pi_{2|2} = \pi_{2|3} & [\,= \pi_{.2}\,] \\ \pi_{3|1} = \pi_{3|2} = \pi_{3|3} & [\,= \pi_{.3}\,] \\ \pi_{4|1} = \pi_{4|2} = \pi_{4|3} & [\,= \pi_{.4}\,] \end{array} \right.$$

A hipótese alternativa H_1 é que pelo menos uma das igualdades acima referidas não é verdadeira.

Mas que valores usar para as probabilidades $\pi_{.j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$?

A estimação das probabilidades

A linha final da tabela, com as frequências absolutas $N_{\cdot j}$ de cada tipo de larva, representa uma base para estimar o que serão as probabilidades de cada tipo de larva, caso haja uma única distribuição das espécies, comum aos três tipos de solo.

		Espécie de larva				Total
		1	2	3	4	
Tipos	Arenosos	27	24	23	26	100
de	Limosos	20	32	18	30	100
solos	Argilosos	13	37	16	34	100
	Total	60	93	57	90	300

A probabilidade estimada da espécie j será $\hat{\pi}_{\cdot j} = \frac{N_{\cdot j}}{N}$, ou seja:

$$\hat{\pi}_{\cdot 1} = \frac{60}{300} = 0.20 \quad \hat{\pi}_{\cdot 2} = \frac{93}{300} = 0.31 \quad \hat{\pi}_{\cdot 3} = \frac{57}{300} = 0.19 \quad \hat{\pi}_{\cdot 4} = \frac{90}{300} = 0.30$$

Os valores esperados (estimados)

Uma vez que em cada tipo de solo há $N_{i.} = 100$ observações, o número esperado de observações na célula (i,j) é dado por

$$\hat{E}_{ij} \quad = \quad N_{i.} \times \hat{\pi}_{.j} \quad = \quad N_{i.} \times \frac{N_{.j}}{N}$$

A tabela com os valores esperados estimados entre parenteses:

		Espécie de larva				Total
		1	2	3	4	
Tipos	Arenosos	27 (20)	24 (31)	23 (19)	26 (30)	100
de	Limosos	20 (20)	32 (31)	18 (19)	30 (30)	100
solos	Argilosos	13 (20)	37 (31)	16 (19)	34 (30)	100
	Total	60	93	57	90	300

Entre as observações O_{ij} e os correspondentes valores esperados estimados ($\hat{E}_{ij}$), existe concordância suficiente para admitir que as espécies se distribuem de forma análoga nos três tipos de solos?

As restrições

Admitindo que se fixou o número de observações em cada linha (níveis do factor A), tal facto impõe a restrições.

A necessidade de estimar as probabilidades dos níveis do outro factor (no nosso caso, as probabilidades de espécie, ou seja as probabilidades marginais de coluna) impõe mais $b-1$ restrições.

(NOTA: Não são b restrições pois a soma dos $\hat{\pi}_i$ tem de ser 1, logo estimar $b-1$ probabilidades determina a última estimativa.)

Assim, ao todo foram impostas $a+b-1$ restrições.

A estatística de Pearson em testes de homogeneidade

No contexto agora descrito, a estatística de Pearson tem a forma

$$X^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}}$$

e segue assintoticamente uma distribuição $\chi^2_{(a-1)(b-1)}$.

NOTA: Os graus de liberdade são o número de células (ab) menos o número de restrições ($a+b-1$), i.e., $ab-(a+b-1) = (a-1)(b-1)$

Tem-se uma Região Crítica unilateral direita, ou seja:

Rejeita-se H_0 se $\quad X^2_{calc} > \chi^2_{\alpha;(a-1)(b-1)}$,

sendo H_0 a hipótese de homogeneidade na distribuição das amostras de cada população (a hipótese que gerou os valores esperados $\hat{E}_i$).

Exemplo 2 (cont.)

A estatística de Pearson calculada no exemplo das larvas tem valor

$$X^2_{calc} = 10.10928 \,.$$

Este valor calculado deve ser comparado com o valor que, numa distribuição χ^2_6 (pois $(a-1)(b-1) = 2 \times 3 = 6$), deixa à direita uma região de probabilidade $\alpha = 0.05$:

$$\chi^2_{0.05(6)} = 12.591 \,.$$

Como $X^2_{calc} < \chi^2_{0.05(6)}$ não se rejeita H_0, a hipótese de homogeneidade das distribuições de espécies de larva, nos três tipos de solos.

Tal como nos casos anteriores, pode ser necessário agrupar classes do factor B, se o número esperado de observações nalgumas classes fôr demasiado baixo. Neste exemplo, tal não é necessário.

Terceiro contexto: testes de independência

Numa tabela bidimensional, há independência quando as probabilidades conjuntas são o produto das probabilidades marginais:

$$H_0 \; : \quad \pi_{ij} \quad = \quad \pi_{i.} \times \pi_{.j} \; , \qquad \forall \, i, j$$

onde

- π_{ij} indica a probabilidade duma observação recair na célula (i,j);
- $\pi_{i.}$ indica a probabilidade marginal duma observação recair no nível i do factor A (seja qual fôr o nível do outro factor);
- $\pi_{.j}$ indica a probabilidade marginal duma observação recair no nível j do factor B (seja qual fôr o nível do outro factor);

Estimação das probabilidades

Pode haver situações onde as probabilidades marginais sejam conhecidas, mas em geral não o são.

É possível estimar as probabilidades marginais a partir das frequências relativas marginais (como foi feito nos testes de homogeneidade, para o factor B):

$$\hat{\pi}_{i.} = \frac{N_{i.}}{N} \quad , \quad \forall i = 1, 2, ..., a$$

$$\hat{\pi}_{.j} = \frac{N_{.j}}{N} \quad , \quad \forall j = 1, 2, ..., b \ ,$$

onde N é o número total de observações (fixo), $N_{i.}$ é o número (livre) de observações no nível i do factor A e $N_{.j}$ é o número (livre) de observações no nível j do factor B.

Valores esperados

Caso se verifique a independência, o número esperado de observações na célula (i,j) é dado por:

$$E_{ij} \quad = \quad N\,\pi_{ij} \quad = \quad N\,\pi_{i.}\,\pi_{.j} \qquad \forall\, i,j\,.$$

Estimando as probabilidades marginais, caso se verifique a independência, o número esperado estimado de observações na célula (i,j) é:

$$\hat{E}_{ij} = N\,\hat{\pi}_{ij} = N\,\hat{\pi}_{i.}\,\hat{\pi}_{.j} = N\,\frac{N_{i.}}{N}\,\frac{N_{.j}}{N} = \frac{N_{i.}\,N_{.j}}{N} \quad , \quad \forall\, i,j\,.$$

As restrições

Foram estimadas:

- $a-1$ probabilidades marginais do factor A (a última tem de dar a soma 1); e
- $b-1$ probabilidades marginais do factor B (a última tem de dar a soma 1).

Juntamente com

- 1 restrição imposta pelo número total fixo de observações (N),

tem-se um total de $(a-1)+(b-1)+1 = a+b-1$ restrições.

Testes χ^2 de independência (cont.)

Estes valores esperados estimados $\hat{E}_{ij}$ em cada uma das *ab* células serão comparados com os valores observados, O_{ij}, com base na estatística de Pearson.

NOTA: Repare-se que, embora com motivações diferentes,

- as expressões de cálculo dos $\hat{E}_{ij}$ são iguais, nos testes de homogeneidade e nos testes de independência;
- o número de restrições impostas é igual nos dois tipos de teste.

Logo, a estatística X^2 de Pearson terá uma expressão idêntica, e uma distribuição assintótica idêntica, quer nos testes de homogeneidade, quer nos testes de independência.

Mas importa não perder de vista que se trata de contextos diferentes, com hipóteses de referência diferentes e conclusões diferentes.

A estatística do teste

Quer no contexto de testes de homogeneidade, quer no contexto de testes de independência, a estatística de Pearson tem a forma

$$X^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{\left(O_{ij} - \frac{N_{i.}N_{.j}}{N}\right)^2}{\frac{N_{i.}N_{.j}}{N}}$$

e segue assintoticamente uma distribuição $\chi^2_{(a-1)(b-1)}$.

Em ambos os casos tem-se uma Região Crítica unilateral direita, ou seja:

Rejeita-se H_0 se $\quad X^2_{calc} > \chi^2_{\alpha;(a-1)(b-1)}$.

Exemplo 3 - Teste de independência

Um estudo de $N = 6800$ alemães do sexo masculino analisou a cor do cabelo e a cor dos olhos de cada indivíduo. Os resultados foram:

	Cabelo				
Olhos	Louro	Castanho	Preto	Ruivo	Total
Azuis	1768	807	189	47	2811
Cinz./Verde	946	1387	746	53	3132
Castanhos	115	438	288	16	857
Total	2829	2632	1223	116	6800

Pretende-se testar se existe independência entre as características cor do cabelo e cor dos olhos (sendo natural que se rejeite esta hipótese).

Exemplo 3 (cont.)

As frequências marginais de linha dão estimativas das probabilidades marginais de cada cor de olhos ($\hat{\pi}_{i.} = \frac{N_{i.}}{N}$):

$$\hat{\pi}_{1.} = \frac{2811}{6800} = 0.4134 \qquad \hat{\pi}_{2.} = \frac{3132}{6800} = 0.4606 \qquad \hat{\pi}_{3.} = \frac{857}{6800} = 0.1260$$

De forma análoga se obtêm estimativas das probabilidades marginais de cores de cabelo ($\hat{\pi}_{.j} = \frac{N_{.j}}{N}$):

$$\hat{\pi}_{.1} = \frac{2829}{6800} = 0.416\,, \quad \hat{\pi}_{.2} = \frac{2632}{6800} = 0.387\,, \quad \hat{\pi}_{.3} = \frac{1223}{6800} = 0.180\,, \quad \hat{\pi}_{.4} = \frac{116}{6800} = 0.017$$

Os valores esperados estimados em cada célula, caso haja independência, são dados por:

$$\hat{E}_{ij} \; = \; N\,\hat{\pi}_{ij} \; = \; N\,\hat{\pi}_{i.}\,\hat{\pi}_{.j} \; = \; \frac{N_{i.} \times N_{.j}}{N}\,.$$

Por exemplo, $\hat{E}_{11} = \frac{2811 \times 2829}{6800} \; = \; 1169.4587$.

Exemplo 3 (cont.)

A tabela com os valores esperados (estimados) entre parenteses é:

Olhos	Cabelo: Louro	Castanho	Preto	Ruivo	Total
Azuis	1768 (1169.46)	807 (1088.02)	189 (505.57)	47 (47.95)	2811
Cin./Verde	946 (1303.00)	1387 (1212.27)	746 (563.30)	53 (53.43)	3132
Castanhos	115 (356.54)	438 (331.71)	288 (154.13)	16 (14.62)	857
Total	2829	2632	1223	116	6800

A estatística de Pearson será então:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}} = \frac{(1768 - 1169.46)^2}{1169.46} + \ldots + \frac{(16 - 14.62)^2}{14.62} = 1073.508\,.$$

As dimensões da tabela são iguais às do Exemplo 2, logo a fronteira da região crítica foi dada no acetato 60: $\chi^2_{0.05(6)} = 12.591$.
Como esperado, rejeita-se claramente a hipótese de independência.

Analisando as parcelas da estatística

Em qualquer dos contextos considerados, a região de rejeição é unilateral direita, isto é, são os valores grandes da estatística que rejeitam a hipótese nula, num teste baseado na estatística de Pearson.

Em caso de rejeição, e como a estatística X^2 de Pearson é uma soma de parcelas não-negativas, é possível identificar a(s) categoria(s) ou célula(s) que contribuem as parcelas de maior valor e que são, por isso mesmo, maiormente responsáveis pela rejeição de H_0.

Ainda o exemplo de teste de independência

As parcelas individuais da estatística de Pearson, no caso do teste de independência acima referido, são:

	Cabelo			
Olhos	Louro	Castanho	Preto	Ruivo
Azuis	306.340	72.585	198.222	0.019
Cin./Verde	97.814	25.185	59.257	0.003
Castanhos	163.630	34.059	116.263	0.130

Uma vez que $\chi^2_{0.05(6)} = 12.592$, quase todas as combinações (excepto as referentes aos ruivos) são, só por si, responsáveis pela rejeição de H_0, com destaque para as associações de olhos azuis com cabelo louro e de olhos azuis com cabelo preto.

Ainda o exemplo da independência (cont.)

No entanto, o sentido destas duas associações é diferente:

- para olhos azuis/cabelo louro, tem-se

$$1768 \;=\; O_{11} \;\gg\; \hat{E}_{11} \;=\; 1169.46\;.$$

  Trata-se duma associação positiva.

- para olhos azuis/cabelo preto, tem-se

$$189 \;=\; O_{13} \;\ll\; \hat{E}_{13} \;=\; 505.57\;.$$

  Trata-se duma associação negativa.

A identificação das parcelas que mais contribuem para uma rejeição de H_0 pode ajudar a identificar outras hipóteses, mais realistas, subjacentes às contagens observadas.

Testes usando $p - values$

Em alternativa a fixar previamente o nível de significância α, é possível indicar apenas o valor de prova (ou *p*-value) associado ao valor calculado da estatística dum qualquer teste.

No caso da estatística T num teste a uma média populacional:

prob. de T tomar valores mais extremos que T_{calc}, sob H_0

O cálculo do *p-value* é feito de forma diferente, consoante a natureza das hipóteses nula e alternativa:

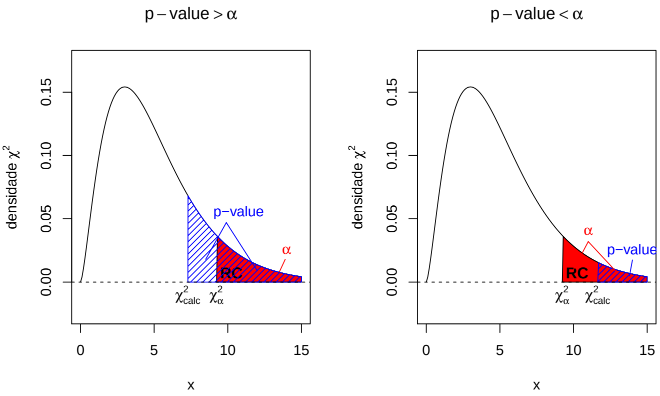
Teste Unilateral direito	$p = P[t_{n-1} > T_{calc}]$
Teste Unilateral esquerdo	$p = P[t_{n-1} < T_{calc}]$
Teste Bilateral	$p = 2P[t_{n-1} > \|T_{calc}\|]$.

No contexto dos testes χ^2, baseados na estatística de Pearson, o *p-value* é sempre calculado como:

$$p = P[\chi^2 > X^2_{calc}] .$$

A relação de *p-values* e níveis de significância

- $p - value > \alpha \Rightarrow$ não rejeição de H_0 ao nível α;
- $p - value < \alpha \Rightarrow$ rejeição de H_0 ao nível α;



Em geral: p-value muito pequeno implica rejeição H_0.