

## II.2. Regressão Linear Múltipla

Por vezes, é necessário **mais do que uma variável preditiva** para modelar a variável resposta de interesse.

**Exemplo:** Num estudo sobre uma população experimental de clones da casta Tinta Francisca, realizado no Tabuaço em 2003, foram medidos os valores das seguintes variáveis para 24 videiras:

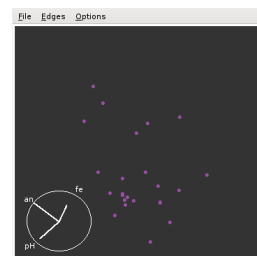
- teor de antocianinas (variável `antoci`, em  $mg/dm^3$ );
- fenóis totais (variável `fentot`);
- pH (variável `pH`).

Há interesse em estudar a relação entre o teor de antocianinas (variável resposta) e o teor de fenóis totais e pH.

## A nuvem de pontos - uma perspectiva

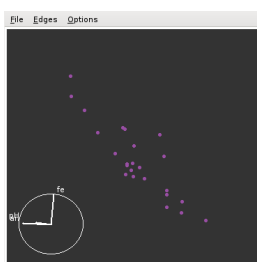
As  $n = 24$  observações em três variáveis descrevem agora uma nuvem de 24 pontos em  $\mathbb{R}^3$ .

Neste ângulo de visão, a nuvem de pontos em  $\mathbb{R}^3$  nada tem de especial.



## A nuvem de pontos - outra perspectiva

Noutro ângulo de visão percebe-se que os pontos se dispersam aproximadamente em torno de **um plano**.



## Plano em $\mathbb{R}^3$

Qualquer plano em  $\mathbb{R}^3$ , no sistema  $x_0y_0z$ , tem equação

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

No nosso contexto, e colocando:

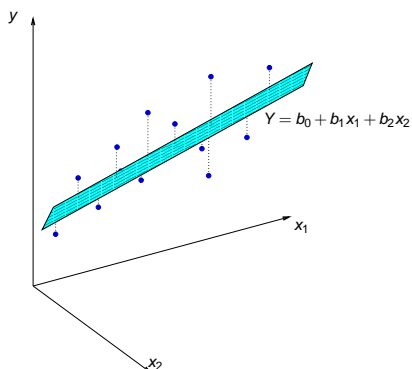
- no eixo vertical ( $z$ ) a variável resposta  $Y$ ;
- noutro eixo ( $x$ ) um preditor  $X_1$ ;
- no terceiro eixo ( $y$ ) o outro preditor  $X_2$ ,

A equação fica (no caso geral, com  $C \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} Ax_1 + Bx_2 + Cy + D = 0 &\Leftrightarrow y = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}x_1 - \frac{B}{C}x_2 \\ &\Leftrightarrow y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \end{aligned}$$

Esta equação generaliza a equação da recta, para o caso de haver dois preditores.

## Regressão Múltipla - representação gráfica ( $p = 2$ )



$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  é a equação dum plano em  $\mathbb{R}^3$  ( $x_10x_20y$ ).

Pode ser ajustado pelo mesmo critério que na RLS: minimizar a Soma de Quadrados Residual.

## O caso geral: $p$ preditores

Caso se pretenda modelar uma variável resposta,  $Y$ , com base em  $p$  variáveis predictoras,  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , uma generalização da equação de regressão linear simples admite que os valores de  $Y$  oscilam em torno duma combinação linear (afim) das  $p$  variáveis preditivas:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p.$$

Tal como na Regressão Linear Simples, admite-se que dispomos de  $n$  conjuntos de observações  $\{(x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, y_i)\}_{i=1}^n$ , para estudar este hiperplano em  $\mathbb{R}^{p+1}$  que define a relação de fundo entre  $Y$  e os  $p$  preditores.

Começamos por considerar o problema meramente descritivo.

## O hiperplano ajustado

O critério utilizado para ajustar um hiperplano à nuvem de  $n$  pontos em  $\mathbb{R}^{p+1}$  é o mesmo que na RLS: **minimizar a Soma de Quadrados dos Resíduos**, ou seja, escolher os valores dos  $p+1$  parâmetros  $\{b_j\}_{j=0}^p$  de tal forma que minimizem

$$SQRE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

onde os  $y_i$  são os valores observados da variável resposta e  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}$  os valores ajustados, resultantes dos valores correspondentes dos  $p$  preditores e da equação do hiperplano.

Infelizmente, não existem fórmulas simples, como no caso da RLS, para cada um dos parâmetros  $b_j$  isoladamente. Mas é possível indicar uma fórmula única matricial para o conjunto dos  $p+1$  parâmetros.

## As dificuldades na representação gráfica

A representação gráfica usual da nuvem de  $n$  pontos observados exige  $p+1$  eixos: um para  $Y$  e um para cada um dos  $p$  preditores.

Para  $p > 2$ , seriam necessários mais de três eixos e a visualização torna-se impossível.

As características fundamentais dessas representações seriam:

- Existem  $p+1$  eixos – um para cada variável em questão.
- Existem  $n$  pontos – um para cada indivíduo (unidade experimental) observado.
- Tem-se uma nuvem de  $n$  pontos num espaço  $(p+1)$ -dimensional.

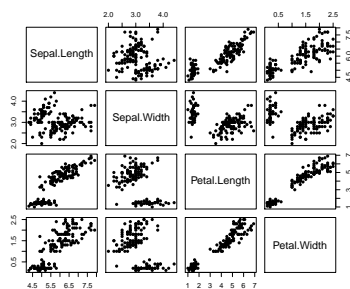
Na regressão linear múltipla admite-se que os pontos se dispõem em torno de um hiperplano em  $\mathbb{R}^{p+1}$ , de equação

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p .$$

## Visualizações parciais da nuvem de pontos

A impossibilidade de visualizar as nuvens de  $n$  pontos em  $\mathbb{R}^{p+1}$  sugere a consideração de visões parciais, como sejam as nuvens de pontos definidas por cada par de variáveis, que são as **projeções ortogonais da nuvem em cada plano coordenado de  $\mathbb{R}^{p+1}$** .

E.g., para as  $n = 150$  observações de lírios em 4 variáveis:



## Advertência

A projecção da nuvem de  $n$  pontos nos planos coordenados não é uma solução ideal.

Em particular, nem sempre permite verificar a hipótese básica de linearidade, isto é, a hipótese de que os pontos se dispersam em torno de um hiperplano.

Tal hipótese pode ser válida, mesmo que não se verifique linearidade em qualquer das nuvens de pontos de  $y$  vs. um preditor individual,  $x_j$ .

## Outra representação gráfica

A representação gráfica em  $\mathbb{R}^{p+1}$  das  $n$  observações de  $Y$  e das  $p$  variáveis preditivas não é a única possível.

Há **outra representação possível** dos dados, que **casa conceitos geométricos e conceitos estatísticos** e é útil na determinação dos parâmetros ajustados.

As  $n$  observações de  $Y$  definem um **vector em  $\mathbb{R}^n$** :

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) .$$

Da mesma forma, as  $n$  observações de cada variável preditora definem um **vector de  $\mathbb{R}^n$** .

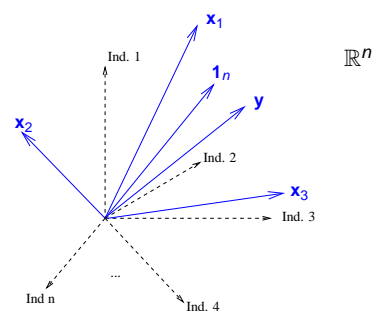
$$\mathbf{x}_j = (x_{j(1)}, x_{j(2)}, x_{j(3)}, \dots, x_{j(n)}) \quad (j = 1, 2, \dots, p) .$$

Podemos representar todas as variáveis por **vectores em  $\mathbb{R}^n$** .

## A representação em $\mathbb{R}^n$ , o espaço das variáveis

- cada **eixo** corresponde a um **indivíduo** observado;
- cada **vector** corresponde a uma **variável**.

O **vector de  $n$  uns**, representado por  $\mathbf{1}_n$ , também é útil.



## Vantagens da representação gráfica alternativa

Os  $n$  valores ajustados  $\hat{y}_j$  também definem um vector de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ , que é uma combinação linear dos vectores  $\mathbf{1}_n, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ :

$$\begin{aligned} b_0 \mathbf{1}_n + b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + \dots + b_p \mathbf{x}_p &= b_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} x_{1(1)} \\ x_{1(2)} \\ x_{1(3)} \\ \vdots \\ x_{1(n)} \end{bmatrix} + \dots + b_p \begin{bmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ x_{p(3)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_0 + b_1 x_{1(1)} + b_2 x_{2(1)} + \dots + b_p x_{p(1)} \\ b_0 + b_1 x_{1(2)} + b_2 x_{2(2)} + \dots + b_p x_{p(2)} \\ b_0 + b_1 x_{1(3)} + b_2 x_{2(3)} + \dots + b_p x_{p(3)} \\ \dots \\ b_0 + b_1 x_{1(n)} + b_2 x_{2(n)} + \dots + b_p x_{p(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

## A matriz $\mathbf{X}$ e o seu subespaço de colunas

Recordemos alguns conceitos dados na UC Álgebra Linear dos 1os. ciclos do ISA.

- O conjunto de **todas** as combinações lineares dos  $p+1$  vectores  $\mathbf{1}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  chama-se o **subespaço gerado** por esses vectores.
- Colocando os vectores  $\mathbf{1}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  nas **colunas** duma **matriz  $\mathbf{X}$** , de dimensão  $n \times (p+1)$ , podemos chamar a este subespaço o **subespaço das colunas da matriz  $\mathbf{X}$** ,  $\mathcal{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^n$ .
- É um subespaço de **dimensão  $p+1$**  (se os vectores forem **linearmente independentes**, isto é, nenhum se pode escrever como combinação linear dos restantes).
- Qualquer **combinação linear** dos vectores coluna da matriz  $\mathbf{X}$  é dada por  $\mathbf{X}\mathbf{a}$ , onde  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  é o **vector dos coeficientes** que define a combinação linear.

## Um produto matricial $\mathbf{X}\mathbf{a}$

O produto da matriz  $\mathbf{X}$  por um vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{p+1}$  é uma combinação linear das colunas de  $\mathbf{X}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{a} &= \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \dots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \dots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \dots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \dots & x_{p(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x_{1(1)} + a_2 x_{2(1)} + \dots + a_p x_{p(1)} \\ a_0 + a_1 x_{1(2)} + a_2 x_{2(2)} + \dots + a_p x_{p(2)} \\ a_0 + a_1 x_{1(3)} + a_2 x_{2(3)} + \dots + a_p x_{p(3)} \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_{1(n)} + a_2 x_{2(n)} + \dots + a_p x_{p(n)} \end{bmatrix} \\ &= a_0 \mathbf{1}_n + a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_p \mathbf{x}_p \end{aligned}$$

## Os parâmetros

- Cada escolha possível de coeficientes  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  corresponde a um ponto/vector no subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .
- Essa escolha de coeficientes é **única** caso as colunas de  $\mathbf{X}$  sejam **linearmente independentes**, isto é, se **não houver multicolinearidade** entre as variáveis  $x_1, \dots, x_p, \mathbf{1}_n$ .
- Um dos pontos/vectores do subespaço é a combinação linear dada pelo vector de coeficientes  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_p)$  que minimiza **SQRE**. É a combinação linear que desejamos determinar.

Como identificar esse ponto/vector?

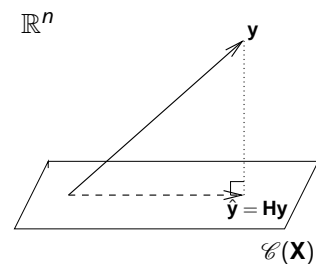
## Geometria

Vamos usar argumentos geométricos.

- Dispomos de um vector de  $n$  observações de  $\mathbf{y}$  que está em  $\mathbb{R}^n$  mas, em geral, **não está no subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** .
- Queremos aproximar esse vector por outro vector,  $\hat{\mathbf{y}} = b_0 \mathbf{1}_n + b_1 \mathbf{x}_1 + \dots + b_p \mathbf{x}_p$ , que **está no subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** .
- Vamos aproximar o vector de observações  $\mathbf{y}$  pelo vector  $\hat{\mathbf{y}}$  do subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  que está **mais próximo de  $\mathbf{y}$** .

**SOLUÇÃO:** Tomar a **projecção ortogonal** de  $\mathbf{y}$  sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ :  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{y}$ .

## O conceito geométrico subjacente à identificação de $\mathbf{b}$



O vector de  $\mathcal{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^n$  mais próximo dum vector  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  é o vector  $\hat{\mathbf{y}}$  que resulta de projectar ortogonalmente  $\mathbf{y}$  sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .

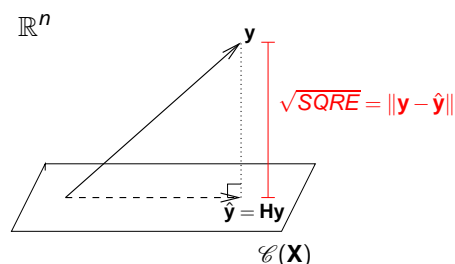
## O critério minimiza SQRE

O critério de escolher  $\hat{\mathbf{y}}$  tal que minimize a distância ao vector de observações  $\mathbf{y}$  significa que minimizamos o **quadrado dessa distância**, que é dado por:

$$\text{dist}^2(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \text{SQRE},$$

ou seja, que **minimizamos a soma de quadrados dos resíduos**. Trata-se do **critério** que foi usado na Regressão Linear Simples.

## O conceito geométrico subjacente à obtenção de $\mathbf{b}$



O quadrado da distância de  $\mathbf{y}$  a  $\hat{\mathbf{y}}$  é SQRE, a soma dos quadrados dos resíduos.

## A projecção ortogonal

A projecção ortogonal de um vector  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  sobre o subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  gerado pelas colunas (linearmente independentes) de  $\mathbf{X}$  faz-se pré-multiplicando  $\mathbf{y}$  pela **matriz de projecção ortogonal sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$** :

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{H}\mathbf{y} \\ \Leftrightarrow \hat{\mathbf{y}} &= \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}_{=\mathbf{b}}\mathbf{y} \end{aligned}$$

A combinação linear dos vectores  $\mathbf{1}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  que gera o vector mais próximo de  $\mathbf{y}$  tem coeficientes dados pelos elementos do vector  $\mathbf{b}$ :

Os parâmetros ajustados na RL Múltipla

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

## As três Somas de Quadrados

Na Regressão Linear Múltipla definem-se três Somas de Quadrados, de forma idêntica ao que se fez na Regressão Linear Simples:

**SQRE** – Soma de Quadrados dos Resíduos (já definida):

$$\text{SQRE} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

**SQT** – Soma de Quadrados Total:

$$\text{SQT} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2.$$

**SQR** – Soma de Quadrados associada à Regressão:

$$\text{SQR} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2.$$

Nota: Também aqui os  $y$  observados ( $y_i$ ) e os  $y$  ajustados ( $\hat{y}_i$ ) têm a mesma média (ver Exercício 4 da RLM).

## Pitágoras e a Regressão

O **Teorema de Pitágoras** aplica-se em qualquer espaço euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Aplicado ao triângulo rectângulo do acetato 206 produz a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|^2 &= \|\hat{\mathbf{y}}\|^2 + \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 &= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}_{=\text{SQRE}} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 &= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2 + \text{SQRE} \\ \text{SQT} &= \text{SQR} + \text{SQRE} \end{aligned}$$

## Revisitando Pitágoras

Vimos que a relação fundamental da Regressão Linear ( $\text{SQT} = \text{SQR} + \text{SQRE}$ ) resulta duma aplicação do Teorema de Pitágoras. Mas foi necessário introduzir a subtracção de  $n\bar{y}^2$ .

Um outro triângulo rectângulo é estatisticamente mais interessante.

Considere-se o **vector centrado** das observações da variável resposta, isto é, o **vector cujo elemento genérico é  $y_i - \bar{y}$** . Este vector, que será designado  $\mathbf{y}^c$ , obtém-se subtraindo a  $\mathbf{y}$  o vector que repete  $n$  vezes  $\bar{y}$ :

$$\mathbf{y}^c = \mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1}_n = (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_n - \bar{y})^t.$$

A norma deste vector é  $\|\mathbf{y}^c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\text{SQT}}$ .

## Revisitando Pitágoras (cont.)

A projecção ortogonal do vector  $\mathbf{y}^c$  sobre o subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  gera o vector:

$$\begin{aligned} \mathbf{Hy}^c &= \mathbf{H}(\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1}_n) \\ \Leftrightarrow \mathbf{Hy}^c &= \mathbf{Hy} - \bar{y}\mathbf{H}\mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \mathbf{Hy}^c &= \hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1}_n \end{aligned}$$

já que  $\mathbf{H}\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ , pois o vector  $\mathbf{1}_n$  já pertence ao subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ , logo fica invariante quando projectado nesse mesmo subespaço.

O vector  $\mathbf{Hy}^c$  tem elemento genérico  $\hat{y}_i - \bar{y}$ , e a sua norma é

$$\|\mathbf{Hy}^c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2} = \sqrt{SQR}.$$

## Revisitando Pitágoras (cont.)

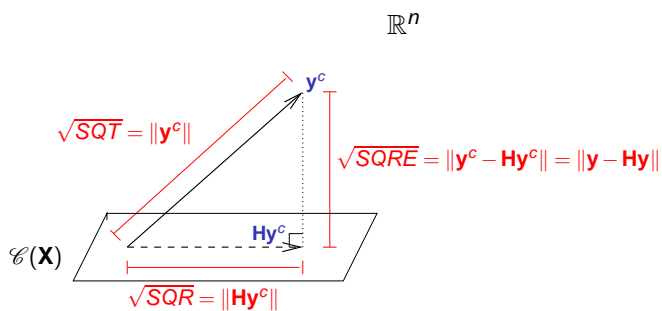
A distância entre o vector  $\mathbf{y}^c$  e a sua projecção ortogonal sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  continua a ser  $\sqrt{SQRE}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^c - \mathbf{Hy}^c &= (\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1}_n) - (\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1}_n) \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}^c - \mathbf{Hy}^c &= \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

pelo que

$$\|\mathbf{y}^c - \mathbf{Hy}^c\| = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} = \sqrt{SQRE}.$$

## Revisitando Pitágoras (cont.)



A fórmula fundamental da Regressão Linear,  $SQT = SQR + SQRE$ , é uma aplicação directa do Teorema de Pitágoras ao triângulo definido por  $\mathbf{y}^c$  e a sua projecção ortogonal sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .

## Pitágoras e o Coeficiente de Determinação

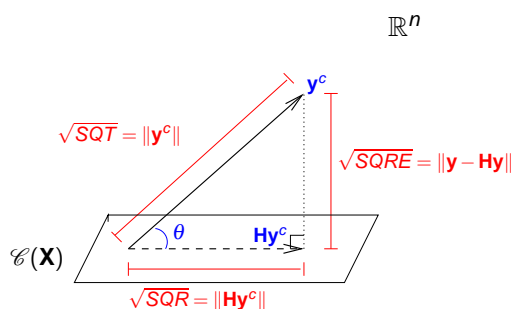
O acetato 213 torna evidente outra relação importante entre a geometria e a estatística da Regressão Linear:

Definindo o **coeficiente de determinação** da forma usual,  $R^2 = \frac{SQR}{SQT}$ , este resulta ser o cosseno ao quadrado do ângulo entre o vector centrado das observações da variável resposta,  $\mathbf{y}^c$ , e a sua projecção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ :

$$\cos^2(\theta) = \frac{SQR}{SQT} = R^2,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vectores  $\mathbf{y}^c$  e  $\mathbf{Hy}^c$ .

## Pitágoras e o Coeficiente de Determinação (cont.)



O Coeficiente de Determinação na Regressão Linear,  $R^2 = \frac{SQR}{SQT}$ , é o cosseno ao quadrado do ângulo entre  $\mathbf{y}^c$  e  $\mathbf{Hy}^c$ .

## Propriedades do Coeficiente de Determinação

A abordagem geométrica confirma que, também na Regressão Linear Múltipla, são válidas as propriedades (já conhecidas da Regressão Linear Simples) do Coeficiente de Determinação:

- $R^2$  toma valores entre 0 e 1.
- Quanto mais próximo de 1 estiver  $R^2$ , menor o ângulo  $\theta$ , e portanto melhor será a correspondência entre o vector (centrado) das observações,  $\mathbf{y}^c$ , e o seu ajustamento em  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .
- Se  $R^2 \approx 0$ , o vector  $\mathbf{y}^c$  é quase perpendicular ao subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  onde se pretende aproximá-lo, e a projecção vai quase anular todos os elementos do vector projectado. O resultado será de má qualidade.

## A Regressão Múltipla no $\mathbb{R}$

Uma Regressão Múltipla no  $\mathbb{R}$  estuda-se através do mesmo comando `lm` usado para a regressão linear simples. A indicação de qual a variável resposta  $y$  e quais as variáveis preditivas  $x_1, \dots, x_p$  faz-se de forma semelhante à da RLS.

Por exemplo, se a variável resposta se chama  $y$  e existirem três preditores de nome  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , a fórmula que indica a relação será:

$$y \sim x_1 + x_2 + x_3$$

O comando correspondente no R será:

```
> lm ( y ~ x1 + x2 + x3 , data=dados)
```

O resultado produzido por este comando será o vector das estimativas dos  $p+1$  parâmetros do modelo,  $b_0, b_1, \dots, b_p$ .

## A Regressão Múltipla no $\mathbb{R}$ (cont.)

Exemplifique-se de novo com os dados dos lírios.

Pretende-se prever a variável resposta largura da pétala, não apenas a partir do comprimento da pétala, mas também das duas medições (largura e comprimento) das sépalas.

```
> iris2.lm <- lm(Petal.Width ~ Petal.Length + Sepal.Length +
+ Sepal.Width , data=iris)
> iris2.lm
(...)
Coefficients:
(Intercept) Petal.Length Sepal.Length Sepal.Width
-0.2403 0.5241 -0.2073 0.2228
```

O hiperplano ajustado é:

$$PW = -0.2403 + 0.5241 PL - 0.2073 SL + 0.2228 SW$$

O coeficiente de determinação é  $R^2 = 0.9379$ , só ligeiramente maior que o valor  $R^2 = 0.9271$  do modelo RLS (acetato 163).

## O contexto inferencial

Até aqui, apenas se considerou o problema descritivo:

dados  $n$  conjuntos de observações  $\{(x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, Y(i))\}_{i=1}^n$ , determinar os  $p+1$  coeficientes  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_p)$  que minimizam a soma de quadrados de resíduos

$$SQRE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})]^2$$

$$\Rightarrow SQRE \text{ minimo se } \mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Mas, tal como na Regressão Linear Simples, coloca-se o problema inferencial quando as  $n$  observações representam uma amostra aleatória de uma população mais vasta. É a relação populacional entre  $Y$  e as  $p$  variáveis preditoras que se pretende conhecer. Para esse fim, será necessário admitir alguns pressupostos adicionais.

## O Modelo RLM

Na Regressão Linear Múltipla admite-se que as  $n$  observações da variável resposta  $Y$  são aleatórias e podem ser modeladas como

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Admitem-se válidos pressupostos semelhantes aos do modelo RLS:

**Definição (O Modelo da Regressão Linear Múltipla - RLM)**

- 1  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} + \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$
- 2  $\varepsilon_i \cap \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \forall i = 1, \dots, n.$
- 3  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$  v.a. independentes.

A constante  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) que multiplica a variável  $X_j$  pode ser interpretada como a variação esperada em  $Y$ , associada a aumentar  $X_j$  em uma unidade, mantendo as restantes variáveis constantes.

## A notação matricial/vectorial

As  $n$  equações do modelo, válidas para as  $n$  observações, podem ser escritas como uma única equação, utilizando notação vectorial/matricial:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(1)} + \beta_2 x_{2(1)} + \dots + \beta_p x_{p(1)} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(2)} + \beta_2 x_{2(2)} + \dots + \beta_p x_{p(2)} + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(3)} + \beta_2 x_{2(3)} + \dots + \beta_p x_{p(3)} + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(n)} + \beta_2 x_{2(n)} + \dots + \beta_p x_{p(n)} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

## A notação matricial (cont.)

As  $n$  equações correspondem a uma única equação matricial:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

onde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \dots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \dots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \dots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \dots & x_{p(n)} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Nesta equação,  $\mathbf{Y}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são vectores aleatórios (de dimensão  $n \times 1$ ),  $\mathbf{X}$  é uma matriz não aleatória (dimensão  $n \times (p+1)$ ) e  $\boldsymbol{\beta}$  um vector não-aleatório (dimensão  $(p+1) \times 1$ ).

## A notação matricial (cont.)

Na equação matricial  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ , tem-se:

- $\mathbf{Y}$  – vector aleatório das  $n$  variáveis aleatórias resposta;
- $\mathbf{X}$  – matriz do modelo (não aleatória) de dimensões  $n \times (p+1)$  cujas colunas são dadas pelas observações de cada variável preditora (e por uma coluna de uns, associada a constante aditiva do modelo);
- $\boldsymbol{\beta}$  – vector (não aleatório) dos  $p+1$  parâmetros do modelo;
- $\boldsymbol{\epsilon}$  – vector aleatório dos  $n$  erros aleatórios.

Representa-se um vector de  $n$  observações de  $Y$  por  $\mathbf{y}$ .

Com alguns conceitos adicionais podemos escrever também os pressupostos relativos aos erros aleatórios em notação vectorial/matricial.

## Ferramentas para vectores aleatórios

O conjunto das  $n$  observações de  $\mathbf{Y}$ , tal como o conjunto dos  $n$  erros aleatórios,  $\boldsymbol{\epsilon}$ , constituem **vectores aleatórios**.

Para qualquer **vector aleatório**  $\mathbf{W} = (W_1, W_2, \dots, W_k)$ , define-se:

- O **vector esperado** de  $\mathbf{W}$ , constituído pelos **valores esperados** de cada componente:

$$E[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} E[W_1] \\ E[W_2] \\ \vdots \\ E[W_k] \end{bmatrix}$$

## Ferramentas para vectores aleatórios (cont.)

- a **matriz de variâncias-covariâncias** de  $\mathbf{W}$  é constituída pelas (co)variâncias de cada par de componentes:

$$V[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} V[W_1] & C[W_1, W_2] & C[W_1, W_3] & \dots & C[W_1, W_k] \\ C[W_2, W_1] & V[W_2] & C[W_2, W_3] & \dots & C[W_2, W_k] \\ C[W_3, W_1] & C[W_3, W_2] & V[W_3] & \dots & C[W_3, W_k] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C[W_k, W_1] & C[W_k, W_2] & C[W_k, W_3] & \dots & V[W_k] \end{bmatrix}$$

## Propriedades do vector esperado

Tal como para o caso de variáveis aleatórias, também o vector esperado de um vector aleatório  $\mathbf{W}_{k \times 1}$  tem propriedades simples:

- Se  $b$  é um escalar não aleatório,  $E[b\mathbf{W}] = bE[\mathbf{W}]$ .
- Se  $\mathbf{a}_{k \times 1}$  é um vector não aleatório,  $E[\mathbf{W} + \mathbf{a}] = E[\mathbf{W}] + \mathbf{a}$ .
- Se  $\mathbf{a}'_{k \times 1}$  é um vector não aleatório,  $E[\mathbf{a}'\mathbf{W}] = \mathbf{a}'E[\mathbf{W}]$ .
- Se  $\mathbf{B}_{m \times k}$  é uma matriz não aleatória,  $E[\mathbf{B}\mathbf{W}] = \mathbf{B}E[\mathbf{W}]$ .

Também o vector esperado da **soma de dois vectors aleatórios** tem uma propriedade operatória simples:

- Se  $\mathbf{W}_{k \times 1}$ ,  $\mathbf{U}_{k \times 1}$  são **vectores aleatórios**,  $E[\mathbf{W} + \mathbf{U}] = E[\mathbf{W}] + E[\mathbf{U}]$ .

## Propriedades da matriz de (co)variâncias

- Se  $b$  é um escalar não aleatório,  $V[b\mathbf{W}] = b^2 V[\mathbf{W}]$ .
- Se  $\mathbf{a}_{k \times 1}$  é um vector não aleatório,  $V[\mathbf{W} + \mathbf{a}] = V[\mathbf{W}]$ .
- Se  $\mathbf{a}'_{k \times 1}$  é um vector não aleatório,  $V[\mathbf{a}'\mathbf{W}] = \mathbf{a}' V[\mathbf{W}] \mathbf{a}$ .
- Se  $\mathbf{B}_{m \times k}$  é uma matriz não aleatória,  $V[\mathbf{B}\mathbf{W}] = \mathbf{B} V[\mathbf{W}] \mathbf{B}'$ .

A matriz de variâncias-covariâncias da **soma de dois vectors aleatórios** tem uma propriedade operatória simples **se os vectores aleatórios forem independentes**:

- Se  $\mathbf{W}_{k \times 1}$  e  $\mathbf{U}_{k \times 1}$  forem **vectores aleatórios independentes**,  $V[\mathbf{W} + \mathbf{U}] = V[\mathbf{W}] + V[\mathbf{U}]$ .

## A distribuição Normal Multivariada

Vectores aleatórios têm também **distribuições (multivariadas) de probabilidades**. A mais frequente distribuição multivariada para vectores aleatórios é a **Multinormal**:

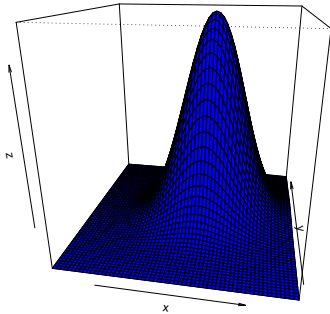
### Definição (Distribuição Normal Multivariada)

O vector aleatório  $k$ -dimensional  $\mathbf{W}$  tem **distribuição Multinormal**, com **parâmetros dados pelo vector  $\boldsymbol{\mu}$  e a matriz  $\boldsymbol{\Sigma}$**  se a sua função densidade conjunta for:

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{w}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{w}-\boldsymbol{\mu})}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k. \quad (3)$$

Notação:  $\mathbf{W} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

## A densidade Binormal (Multinormal com $k = 2$ )



## Algumas propriedades da distribuição Multinormal

### Teorema (Propriedades da Multinormal)

Se  $\mathbf{W} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ :

- 1 O vector esperado de  $\mathbf{W}$  é  $E[\mathbf{W}] = \boldsymbol{\mu}$ .
- 2 A matriz de (co)variâncias de  $\mathbf{W}$  é  $V[\mathbf{W}] = \boldsymbol{\Sigma}$ .
- 3 Se duas componentes de  $\mathbf{W}$  têm covariância nula, são independentes:  $Cov(W_i, W_j) = 0 \Rightarrow W_i, W_j$  independentes.

Nota: Nas disciplinas introdutórias de Estatística dá-se que  $X, Y$  independentes  $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$ . Agora sabemos que, quando a distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$  é Multinormal, tem-se também a implicação contrária.

Nota: Qualquer elemento nulo numa matriz de (co)variâncias duma Multinormal indica que as componentes correspondentes são independentes.

## Propriedades da Multinormal (cont.)

### Teorema (Propriedades da Multinormal)

Se  $\mathbf{W} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ :

- 1 Todas as distribuições marginais de  $\mathbf{W}$  são (multi)normais. Em particular, cada componente  $W_i$  é normal com média  $\mu_i$  e variância  $\Sigma_{(i,i)}$ :  $W_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{(i,i)})$ .
- 2 Se  $\mathbf{a}$  um vector (não-aleatório)  $k \times 1$ , então  $\mathbf{W} + \mathbf{a} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}, \boldsymbol{\Sigma})$ .
- 3 Combinações lineares das componentes dum vector multinormal são Normais:  $\mathbf{a}'\mathbf{W} = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \dots + a_k W_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a})$ .
- 4 Se  $\mathbf{B}$  é matriz  $m \times k$  (não aleatória, de característica  $m \leq k$ ), então  $\mathbf{B}\mathbf{W} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}')$ .

## Modelo Regressão Linear Múltipla - versão matricial

### Definição (O Modelo em notação matricial)

- 1  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ .
- 2  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ .

Na segunda destas hipóteses são feitas quatro afirmações (tendo em conta as propriedades da Multinormal, referidas atrás):

- Cada erro aleatório individual  $\varepsilon_i$  tem distribuição Normal.
- Cada erro aleatório individual tem média zero:  $E[\varepsilon_i] = 0$ .
- Cada erro aleatório individual tem variância igual:  $V[\varepsilon_i] = \sigma^2$ .
- Erros aleatórios diferentes são independentes, porque  $Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0$  se  $i \neq j$  e, numa Multinormal, isso implica a independência.

## A distribuição das observações $\mathbf{Y}$ da variável resposta

O seguinte Teorema é consequência directa de aplicar as propriedades dos acetatos 230 e 231 ao Teorema do acetato 232.

### Teorema (Primeiras Consequências do Modelo)

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se:

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

Tendo em conta as propriedades da Multinormal:

- Cada observação individual  $Y_i$  tem distribuição Normal.
- Cada observação individual  $Y_i$  tem média  $E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)}$ .
- Cada observação individual tem variância igual:  $V[Y_i] = \sigma^2$ .
- Observações diferentes de  $Y$  são independentes, porque  $Cov[Y_i, Y_j] = 0$  se  $i \neq j$  e, numa Multinormal, isso implica a independência.

## O estimador dos parâmetros do Modelo

Tal como na Regressão Linear Simples, os estimadores dos parâmetros  $\beta_j$  do modelo ( $j = 0, 1, 2, \dots, p$ ) obtêm-se adaptando a expressão matricial resultante de minimizar SQRE (acetato 207).

O vector  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  que estima o vector  $\boldsymbol{\beta}$  dos parâmetros populacionais é:

### Definição (Estimador dos parâmetros populacionais)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

onde  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são a matriz e o vector definidos no acetato 222.

O vector  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  é de dimensão  $p+1$ . O seu primeiro elemento é o estimador de  $\beta_0$ , o seu segundo elemento é o estimador de  $\beta_1$ , etc.. Em geral, o estimador de  $\beta_j$  está na posição  $j+1$  do vector  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .



## A distribuição do vector de estimadores $\hat{\beta}$

### Teorema (Distribuição do estimador $\hat{\beta}$ )

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se:

$$\hat{\beta} \cap \mathcal{N}_{p+1}(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}).$$

Tendo em conta as propriedades da Multinormal (acetatos 230 e 231):

- $E[\hat{\beta}] = \beta$  e  $V[\hat{\beta}] = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ .
- Cada estimador individual  $\hat{\beta}_j$  tem distribuição Normal.
- Cada estimador individual tem média  $E[\hat{\beta}_j] = \beta_j$  (logo, é centrado).
- Cada estimador individual tem variância  $V[\hat{\beta}_j] = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}$ . (Note-se o desfasamento nos índices resultantes de a contagem dos  $\beta$ s começar em 0).
- Estimadores individuais diferentes não são (em geral) independentes, porque a matriz  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  não é, em geral, uma matriz diagonal.  $Cov[\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j] = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(i+1,j+1)}^{-1}$ .

## A distribuição dum estimador individual

Como se viu no acetato anterior, tem-se,  $\forall j = 0, 1, \dots, p$ :

$$\hat{\beta}_j \cap \mathcal{N}(\beta_j, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1})$$
$$\Leftrightarrow \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}} \cap \mathcal{N}(0, 1),$$

$$\text{onde } \sigma_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}.$$

Este resultado generaliza os relativos à Regressão Linear Simples.

## O problema de $\sigma^2$ desconhecido

O resultado distribucional indicado no acetato anterior permitiria construir intervalos de confiança ou fazer testes a hipóteses sobre os parâmetros  $\beta$ , não fosse a existência de um problema já familiar: o desconhecimento da variância  $\sigma^2$  dos erros aleatórios.

Procedemos de forma análoga ao que se fez na Regressão Linear Simples:

- obter um estimador para  $\sigma^2$ ; e
- ver o que acontece à distribuição do acetato anterior quando  $\sigma^2$  é substituído pelo seu estimador.

## SQRE na Regressão Múltipla

### Teorema (Resultados distribucionais de SQRE)

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla (RLM), tem-se:

- $\frac{SQRE}{\sigma^2} \cap \chi_{n-(p+1)}^2$
- SQRE é independente de  $\hat{\beta}$ .

NOTA: Omite-se a demonstração

### Corolário

Dado o Modelo de RLM,  $E\left[\frac{SQRE}{n-(p+1)}\right] = \sigma^2$ .

NOTA: Os graus de liberdade associados a SQRE são o número de observações ( $n$ ) menos o número de parâmetros do modelo ( $p+1$ ).

## O Quadrado Médio Residual na Regressão Múltipla

### Definição (Quadrado Médio Residual)

Define-se o *Quadrado Médio Residual* (QMRE) numa Regressão Linear Múltipla como

$$QMRE = \frac{SQRE}{n-(p+1)}$$

- O QMRE é habitualmente usado na Regressão como estimador da variância dos erros aleatórios, isto é, toma-se

$$\hat{\sigma}^2 = QMRE.$$

- Como se viu no acetato anterior, QMRE é um estimador centrado.

## Revisitando o estimador de $\beta_j$

Vimos (acetato 236) que cada estimador  $\hat{\beta}_j$  verifica:

$$\mathbf{z} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}} \cap \mathcal{N}(0, 1).$$

Temos ainda:

$$W = \frac{SQRE}{\sigma^2} \cap \chi_{n-(p+1)}^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{z}, W \text{ v.a. independentes.}$$

Logo (ver também o acetato 127):

$$\frac{\mathbf{z}}{\sqrt{W/(n-(p+1))}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{QMRE \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}} \cap t_{n-(p+1)}.$$

## Quantidades fulcrais para a inferência sobre $\beta_j$

**Teorema** (Distribuições para a inferência sobre  $\beta_j$  ( $j = 0, 1, \dots, p$ ))

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \cap t_{n-(p+1)},$$

com  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{QMRE \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}$ .

Este Teorema dá-nos os resultados que servem de base à construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses para os parâmetros  $\beta_j$  do modelo populacional.

**NOTA:** O resultado acima é totalmente análogo aos resultados correspondentes na RLS. Assim, os ICs e testes de hipóteses a parâmetros individuais, na RLM, serão análogos aos da RLS.

## Intervalo de confiança para $\beta_j$

**Teorema** (Intervalo de Confiança a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$ )

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, um intervalo a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de confiança para o parâmetro  $\beta_j$  do modelo é:

$$\left[ b_j - t_{\alpha/2[n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \quad b_j + t_{\alpha/2[n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \right],$$

com  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{QMRE \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{(j+1,j+1)}^{-1}}$ , e sendo  $t_{\alpha/2[n-(p+1)]}$  o valor que na distribuição  $t_{n-(p+1)}$  deixa à direita uma região de probabilidade  $\alpha/2$ . O valor  $b_j$  é o elemento  $j+1$  do vector das estimativas  $\mathbf{b}$  (acetato 207).

**NOTA:** A amplitude do IC aumenta com QMRE e o valor diagonal da matriz  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  associado ao parâmetro  $\beta_j$  em questão.

## Intervalos de confiança para $\beta_j$ no $\mathbb{R}$

A informação básica para a construção de intervalos de confiança para cada parâmetro  $\beta_j$  obtém-se, no R, a partir das tabelas produzidas pela função `summary`. No exemplo do acetato 218:

```
> summary(iris2.lm)
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.24031	0.17837	-1.347	0.18
Petal.Length	0.52408	0.02449	21.399	< 2e-16 ***
Sepal.Length	-0.20727	0.04751	-4.363	2.41e-05 ***
Sepal.Width	0.22283	0.04894	4.553	1.10e-05 ***

Assim, estima-se que em média a largura da pétala diminui 0.20727cm por cada aumento de 1cm no comprimento da sépala (mantendo-se as outras medições constantes). Como  $t_{0.025(146)} = 1.976346$ , o IC a 95% para  $\beta_2$  é

$$\begin{aligned} & ](-0.20727) - (1.976346)(0.04751), (-0.20727) + (1.976346)(0.04751) [ \\ & \Leftrightarrow ] -0.3012, -0.1134 [ \end{aligned}$$

## Intervalos de confiança para $\beta_j$ no $\mathbb{R}$ (cont.)

Alternativamente, é possível usar a função `confint` no objecto resultante de ajustar a regressão para obter os intervalos de confiança para cada  $\beta_j$  individual:

```
> confint(iris2.lm)
                2.5 %    97.5 %
(Intercept) -0.5928277  0.1122129
Petal.Length  0.4756798  0.5724865
Sepal.Length -0.3011547 -0.1133775
Sepal.Width  0.1261101  0.3195470

> confint(iris2.lm,level=0.99)
                0.5 %    99.5 %
(Intercept) -0.70583864  0.22522386
Petal.Length  0.46016260  0.58800363
Sepal.Length -0.33125352 -0.08327863
Sepal.Width  0.09510404  0.35055304
```

## Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

O mesmo resultado (acetato 241) usado para construir intervalos de confiança serve para construir testes a hipóteses para cada  $\beta_j$  individual. Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

**Testes de Hipóteses a  $\beta_j$  (Regressão Linear Múltipla)**

$$\text{Hipóteses: } H_0 : \beta_j = c \text{ vs. } H_1 : \beta_j \neq c$$

$$\text{Estatística do Teste: } T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j|_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \cap t_{n-(p+1)}$$

Nível de significância do teste:  $\alpha$

Região Crítica (Região de Rejeição): **Rejeitar  $H_0$  se**

$T_{calc} < -t_{\alpha[n-(p+1)]}$	(Unilateral esquerdo)
$ T_{calc}  > t_{\alpha/2[n-(p+1)]}$	(Bilateral)
$T_{calc} > t_{\alpha[n-(p+1)]}$	(Unilateral direito)

## Combinações lineares dos parâmetros

Seja  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p)'$  um vector não aleatório em  $\mathbb{R}^{p+1}$ . O produto interno  $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$  define uma combinação linear dos parâmetros do modelo:

$$\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} = a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_p\beta_p.$$

Casos particulares importantes nas aplicações são:

- Se  $\mathbf{a}$  tem um único elemento não-nulo, na posição  $j+1$ ,  $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} = \beta_j$ .
- Se  $\mathbf{a}$  tem apenas dois elementos não-nulos, 1 na posição  $i+1$  e  $\pm 1$  na posição  $j+1$ ,  $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} = \beta_i \pm \beta_j$ .
- Se  $\mathbf{a} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)$ , onde  $x_j$  indica um qualquer valor da variável preditora  $X_j$ , então  $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$  representa o valor esperado de  $Y$  associado aos valores indicados das variáveis predictoras:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p \\ &= E[Y | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p]. \end{aligned}$$

## Inferência sobre combinações lineares dos $\beta_j$ s

A multinormalidade do vector de estimadores  $\hat{\beta}$  implica a normalidade de qualquer vector que seja combinação linear das suas componentes (acetato 231, ponto 4). Mais concretamente,

- Sabemos que  $\hat{\beta} \cap \mathcal{N}_{p+1}(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$  (acetato 235);
- Logo,  $a'\hat{\beta} \cap \mathcal{N}(a'\beta, \sigma^2 a'(X'X)^{-1}a)$  (acetato 231, ponto 4);
- Ou seja,  $Z = \frac{a'\hat{\beta} - a'\beta}{\sqrt{\sigma^2 a'(X'X)^{-1}a}} \cap \mathcal{N}(0, 1)$ ;
- Por um raciocínio análogo ao usado aquando dos  $\beta$ s individuais, tem-se então

$$\frac{a'\hat{\beta} - a'\beta}{\sqrt{QMRE \cdot a'(X'X)^{-1}a}} \cap t_{n-(p+1)}.$$

## Quantidade fulcral para a inferência sobre $a'\beta$

### Teorema (Distribuições para combinações lineares dos $\beta$ s)

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se

$$\frac{a'\hat{\beta} - a'\beta}{\hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}}} \cap t_{n-(p+1)},$$

$$\text{com } \hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}} = \sqrt{QMRE \cdot a'(X'X)^{-1}a}.$$

Neste Teorema temos o resultado que serve de base à construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses para quaisquer combinações lineares dos parâmetros  $\beta_j$  do modelo.

NOTA: Repare-se na analogia da estrutura desta quantidade fulcral com os resultados anteriores, relativos a  $\beta_j$ s individuais (acetato 241).

## Intervalo de confiança para $a'\beta$

### Teorema (Intervalo de Confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $a'\beta$ )

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, um intervalo a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de confiança para a combinação linear dos parâmetros,  $a'\beta = a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \dots + a_p\beta_p$ , é:

$$\left[ a'b - t_{\alpha/2[n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}}, a'b + t_{\alpha/2[n-(p+1)]} \cdot \hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}} \right],$$

$$\text{com } a'b = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_pb_p \text{ e } \hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}} = \sqrt{QMRE \cdot a'(X'X)^{-1}a}.$$

## Testes de Hipóteses sobre os parâmetros

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

### Testes de Hipóteses a $a'\beta$ (Regressão Linear Múltipla)

$$\text{Hipóteses: } H_0: a'\beta = c \text{ vs. } H_1: a'\beta \neq c$$

$$\text{Estatística do Teste: } T = \frac{a'\hat{\beta} - \overbrace{a'\beta}^{=c}}{\hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}}} \cap t_{n-(p+1)}.$$

Nível de significância do teste:  $\alpha$

Região Crítica (Região de Rejeição): Rejeitar  $H_0$  se

$$\begin{aligned} T_{\text{calc}} < -t_{\alpha[n-(p+1)]} & \quad (\text{Unilateral esquerdo}) \\ |T_{\text{calc}}| > t_{\alpha/2[n-(p+1)]} & \quad (\text{Bilateral}) \\ T_{\text{calc}} > t_{\alpha[n-(p+1)]} & \quad (\text{Unilateral direito}) \end{aligned}$$

## De novo os casos particulares

No acetato (246) viram-se três casos particulares importantes de combinações lineares dos parâmetros.

- No caso de  $a'\beta = \beta_j$ , os intervalos e testes acabados de ver são idênticos aos dados nos acetatos (242) e (245).
- No caso de  $a'\beta = \beta_j \pm \beta_j$ , tem-se  $\hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \pm \hat{\beta}_j}$ , com:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \pm \hat{\beta}_j} &= \sqrt{\hat{V}[\hat{\beta}_i \pm \hat{\beta}_j]} = \sqrt{\hat{V}[\hat{\beta}_i] + \hat{V}[\hat{\beta}_j] \pm 2 \cdot \text{Cov}[\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j]} \\ &= \sqrt{QMRE \left[ (X'X)_{(i+1,j+1)}^{-1} + (X'X)_{(j+1,j+1)}^{-1} \pm 2(X'X)_{(i+1,j+1)}^{-1} \right]} \end{aligned}$$

- No caso de  $a$  conter os valores das variáveis predictoras usados na  $i$ -ésima observação,  $a$  será a linha  $i$  da matrix  $X$ . Nesse caso,

$$\hat{\sigma}_{a'\hat{\beta}} = \sqrt{QMRE \cdot a'(X'X)^{-1}a} = \sqrt{QMRE \cdot h_{ii}},$$

onde  $h_{ii}$  indica o  $i$ -ésimo elemento diagonal da matrix de projecções ortogonal  $H = X(X'X)^{-1}X'$ .

## ICs para combinações lineares no $\mathbb{R}$

Para construir um intervalo de confiança para  $a'\beta$ , será necessário conhecer a matrix das (co)variâncias estimadas dos estimadores  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{V}[\hat{\beta}] = QMRE \cdot (X'X)^{-1}$ .

No  $\mathbb{R}$ , esta matrix obtém-se através da função `vcov`.

E.g., a matrix das (co)variâncias estimadas no exemplo dos lírios é:

```
> vcov(iris2.lm)
      (Intercept) Petal.Length Sepal.Length Sepal.Width
(Intercept) 0.031815766 0.0015144174 -0.005075942 -0.002486105
Petal.Length 0.001514417 0.0005998259 -0.001065046 0.000802941
Sepal.Length -0.005075942 -0.0010650465 0.002256837 -0.001344002
Sepal.Width -0.002486105 0.0008029410 -0.001344002 0.002394932
```

O erro padrão estimado de  $\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$  é:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3} = \sqrt{0.002256837 + 0.002394932 + 2(-0.001344002)} = 0.04431439.$$

## Intervalos de confiança para $E[Y]$ no $\mathbb{R}$

Se a combinação linear dos  $\beta$ s que se deseja corresponde ao valor esperado de  $Y$ , dado um conjunto de valores  $X_1 = x_1, \dots, X_p = x_p$  das variáveis predictoras, é possível obter o intervalo de confiança referido no acetato 249 através do comando `predict`, tal como na RLS.

No exemplo dos lírios, um IC a 95% para a largura esperada de pétalas de flores com `Petal.Length=2`, `Sepal.Length=5` e `Sepal.Width=3.1` é pedido assim:

```
> predict(iris2.lm, data.frame(Petal.Length=c(2), Sepal.Length=c(5),
+   Sepal.Width=c(3.1)), int="conf")
```

```
      fit      lwr      upr
[1,] 0.462297 0.4169203 0.5076736
```

O IC para  $E[Y|X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 3.1]$  é: ] 0.4169 , 0.5077 [.

## Intervalos de predição para $Y$

Podem também obter-se, de forma análoga ao que foi visto na RLS, intervalos de predição para uma observação individual de  $Y$ , associada aos valores  $X_1 = x_1, \dots, X_p = x_p$  das variáveis predictoras.

Nestes intervalos, a estimativa da variância associada a uma observação individual de  $Y$  é acrescida em  $QMRE$  unidades:

onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^t$  indica o vector dos valores dos preditores e

$$\hat{\mu}_{Y|\mathbf{x}} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p$$

e

$$\hat{\sigma}_{indiv} = \sqrt{QMRE [1 + \mathbf{a}^t (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}]} \quad \text{com } \mathbf{a} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p).$$

## Intervalos de predição para $Y$ no $\mathbb{R}$

No  $\mathbb{R}$ , é possível obter um intervalo de predição através do comando `predict` com o argumento `int="pred"`, tal como na RLS.

Eis, na RLM dos lírios, o intervalo de predição para a largura da pétala, num lírio cujo comprimento de pétala seja 2 e com sépala de comprimento 5 e largura 3.1:

```
> predict(iris2.lm, data.frame(Petal.Length=c(2), Sepal.Length=c(5),
+   Sepal.Width=c(3.1)), int="pred")
```

```
      fit      lwr      upr
[1,] 0.462297 0.08019972 0.8443942
```

O intervalo de predição pedido é: ] 0.0802 , 0.8444 [.

## Avaliando a qualidade do ajustamento global

Numa Regressão Linear Simples, se  $\beta_1 = 0$ , a equação do modelo é apenas  $Y = \beta_0 + \varepsilon$ . Neste caso, o conhecimento do preditor  $X$  em nada contribui para o conhecimento de  $Y$  (o Modelo Nulo não tira partido da informação dos preditores).

Numa Regressão Linear Múltipla, o modelo nulo  $Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$ , corresponde a admitir que todas as variáveis predictoras têm coeficiente nulo. As hipóteses que queremos confrontar são:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

[MODELO INÚTIL]

vs.

$$H_1 : \exists j = 1, \dots, p \quad \text{t.q.} \quad \beta_j \neq 0$$

[MODELO NÃO INÚTIL]

NOTA: repare que  $\beta_0$  não intervém nas hipóteses.

## Distribuição associada a $SQR$

De novo, o ponto de partida para uma estatística de teste será a Soma de Quadrados associada à Regressão,  $SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ .

Tem-se (sem demonstração):

### Teorema

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

- $\frac{SQR}{\sigma^2} \cap \chi_p^2$ , se  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$ .
- $SQR$  e  $SQRE$  são variáveis aleatórias independentes.

Defina-se o **Quadrado Médio** associado à Regressão,  $QMR = \frac{SQR}{p}$ .

## A estatística do teste de ajustamento global

Temos (veja também o acetato 159), se  $\beta_j = 0, \forall i = 1 : p$

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{SQR}{\sigma^2} \cap \chi_p^2 \\ V &= \frac{SQRE}{\sigma^2} \cap \chi_{n-(p+1)}^2 \\ W, V &\text{ independentes} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{W/p}{V/(n-(p+1))} = \frac{QMR}{QMRE} \cap F_{p, n-(p+1)}$$

sendo  $QMR = \frac{SQR}{p}$  e  $QMRE = \frac{SQRE}{n-(p+1)}$ .

## O Teste $F$ de ajustamento global do Modelo

Sendo válido o Modelo RLM, pode efectuar-se o seguinte

### Teste $F$ de ajustamento global do modelo RLM

Hipóteses:  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$   
vs.

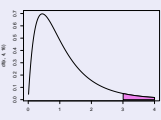
$H_1 : \exists j = 1, \dots, p$  tal que  $\beta_j \neq 0$ .

Estatística do Teste:  $F = \frac{QMR}{QMRE} \cap F_{p, n-(p+1)}$  se  $H_0$ .

Nível de significância do teste:  $\alpha$

Região Crítica (Região de Rejeição): Unilateral direita

Rejeitar  $H_0$  se  $F_{calc} > f_{\alpha(p, n-(p+1))}$



## Expressões alternativas no teste $F$ global

A estatística do teste  $F$  de ajustamento global do modelo numa Regressão Linear Múltipla pode ser escrita na forma alternativa:

$$F = \frac{n-(p+1)}{p} \cdot \frac{R^2}{1-R^2}$$

Tal como na Regressão Linear Simples, a estatística  $F$  é uma função crescente do Coeficiente de Determinação,  $R^2$ .

As hipóteses do teste também se podem escrever como

$$H_0 : R^2 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : R^2 > 0$$

A hipótese  $H_0 : R^2 = 0$  indica ausência de relação linear entre  $Y$  e o conjunto dos preditores. Corresponde a um ajustamento "péssimo" do modelo. A sua rejeição não garante um bom ajustamento, mas apenas a capacidade de o distinguir do Modelo Nulo.

## Outra formulação do Teste $F$ de ajustamento global

### Teste $F$ de ajustamento global do modelo RLM (alternativa)

Hipóteses:  $H_0 : R^2 = 0$  vs.  $H_1 : R^2 > 0$ .

Estatística do Teste:  $F = \frac{n-(p+1)}{p} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} \cap F_{(p, n-(p+1))}$  se  $H_0$ .

Nível de significância do teste:  $\alpha$

Região Crítica (Região de Rejeição): Unilateral direita

Rejeitar  $H_0$  se  $F_{calc} > f_{\alpha(p, n-(p+1))}$

- A estatística  $F$  é uma função crescente do coeficiente de determinação amostral,  $R^2$ .
- A hipótese nula  $H_0 : R^2 = 0$  afirma que, na população, o coeficiente de determinação é nulo.

## O Quadro-resumo do ajustamento global

Frequentemente, sintetiza-se a informação usada num teste de ajustamento global num **quadro-resumo da regressão**:

Fonte	g.l.	SQ	QM	$f_{calc}$
Regressão	$p$	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\frac{SQR}{p}$	$\frac{QMR}{QMRE}$
Resíduos	$n - (p + 1)$	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$\frac{SQRE}{n-p-1}$	
Total	$n - 1$	$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	-	-

## O princípio da parcimónia na RLM

Recordemos o **princípio da parcimónia** na modelação: queremos um modelo que descreva adequadamente a relação entre as variáveis, mas que **seja o mais simples (parcimonioso) possível**.

Caso se disponha de um modelo de Regressão Linear Múltipla com um ajustamento considerado adequado, a aplicação deste princípio traduz-se em saber se **será possível obter um modelo com menos variáveis predictoras, sem perder significativamente em termos de qualidade de ajustamento**.

## Modelo e Submodelos

Se dispomos de um modelo de Regressão Linear Múltipla, com relação de base

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5$$

chamamos **submodelo** a um modelo de regressão linear múltipla contendo **apenas algumas das variáveis predictoras**, e.g.,

$$Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \beta_5 x_5$$

Podemos identificar o submodelo pelo **conjunto  $\mathcal{S}$  das variáveis predictoras que pertencem ao submodelo**. No exemplo,  $\mathcal{S} = \{2, 5\}$ . O modelo e o submodelo são idênticos se  $\beta_j = 0$  para qualquer variável  $x_j$  cujo índice **não pertença a  $\mathcal{S}$** .

## Comparando modelo e submodelos

Para avaliar se um dado modelo difere significativamente dum seu submodelo (identificado pelo conjunto  $\mathcal{S}$  dos índices das suas variáveis), precisamos de optar entre as hipóteses:

$$H_0 : \beta_j = 0, \quad \forall j \notin \mathcal{S} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j \notin \mathcal{S} \quad \text{tal que} \quad \beta_j \neq 0.$$

[SUBMODELO OK]

[SUBMODELO PIOR]

NOTA: Esta discussão só envolve coeficientes  $\beta_j$  de variáveis predictoras. O coeficiente  $\beta_0$  faz sempre parte dos submodelos. Este coeficiente  $\beta_0$  não é relevante do ponto de vista da parcimónia: a sua presença não implica trabalho adicional de recolha de dados, nem de interpretação do modelo (ao mesmo tempo que permite um melhor ajustamento do modelo).

## Uma estatística de teste para a comparação modelo/submodelo

A estatística de teste envolve a comparação das Somas de Quadrados Residuais do:

- modelo completo (referenciado pelo índice  $C$ ); e do
- submodelo (referenciado pelo índice  $S$ )

Vamos admitir que o submodelo tem  $k$  preditores ( $k + 1$  parâmetros):

$$F = \frac{(SQRE_S - SQRE_C)/(p - k)}{SQRE_C/[n - (p + 1)]} \cap F_{p-k, n-(p+1)},$$

caso  $\beta_j = 0$ , para todas as variáveis  $x_j$  que não pertençam ao submodelo.

## O teste a um submodelo (teste $F$ parcial)

### Teste $F$ de comparação dum modelo com um seu submodelo

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

Hipóteses:

$$H_0 : \beta_j = 0, \quad \forall j \notin \mathcal{S} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j \notin \mathcal{S} \quad \text{tal que} \quad \beta_j \neq 0.$$

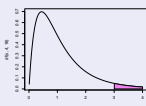
Estatística do Teste:

$$F = \frac{(SQRE_S - SQRE_C)/(p - k)}{SQRE_C/[n - (p + 1)]} \cap F_{p-k, n-(p+1)}, \text{ sob } H_0.$$

Nível de significância do teste:  $\alpha$

Região Crítica (Região de Rejeição): Unilateral direita

Rejeitar  $H_0$  se  $F_{calc} > f_{\alpha[p-k, n-(p+1)]}$



## Expressão alternativa para a estatística do teste

A estatística do teste  $F$  de comparação de um modelo completo com  $p$  preditores, e um seu submodelo com apenas  $k$  preditores pode ser escrita na forma alternativa:

$$F = \frac{n - (p + 1)}{p - k} \cdot \frac{R_C^2 - R_S^2}{1 - R_C^2}.$$

NOTA: Assinale-se que a Soma de Quadrados Total,  $SQT$ , apenas depende dos valores observados da variável resposta  $Y$ , e não de qual o modelo ajustado. Assim,  $SQT$  é igual no modelo completo e no submodelo.

## Expressão alternativa para as hipóteses do teste

As hipóteses do teste também se podem escrever como

$$H_0 : R_C^2 = R_S^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : R_C^2 > R_S^2,$$

A hipótese  $H_0$  indica que o grau de relacionamento linear entre  $Y$  e o conjunto dos preditores é idêntico no modelo e no submodelo.

Caso não se rejeite  $H_0$ , opta-se pelo submodelo (mais parcimonioso).  
 Caso se rejeite  $H_0$ , opta-se pelo modelo completo (ajusta-se significativamente melhor).

## Teste $F$ parcial: formulação alternativa

### Teste $F$ de comparação dum modelo com um seu submodelo

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla,

Hipóteses:

$$H_0 : R_C^2 = R_S^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : R_C^2 > R_S^2.$$

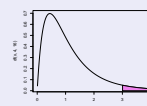
Estatística do Teste:

$$F = \frac{n - (p + 1)}{p - k} \cdot \frac{R_C^2 - R_S^2}{1 - R_C^2} \cap F_{p-k, n-(p+1)}, \text{ sob } H_0.$$


Nível de significância do teste:  $\alpha$

Região Crítica (Região de Rejeição): Unilateral direita

Rejeitar  $H_0$  se  $F_{calc} > f_{\alpha[p-k, n-(p+1)]}$



## O teste a submodelos no

A informação necessária para um teste  $F$  parcial obtém-se no , através da função `anova`, com dois argumentos: os objectos `lm` resultantes de ajustar o **modelo completo** e o **submodelo** sob comparação.

Nos exemplos dos lírios (acetatos 131 e 243), temos:

```
> anova(iris.lm, iris2.lm)
Analysis of Variance Table
Model 1: Petal.Width ~ Petal.Length
Model 2: Petal.Width ~ Petal.Length + Sepal.Length + Sepal.Width
  Res.Df  RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1      148 6.3101
2      146 5.3803    2    0.9298 12.616 8.836e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

## Relação entre os testes- $t$ e o teste $F$ parcial

**Caso o modelo e submodelo difiram num único preditor,  $X_j$ , o teste  $F$  parcial descrito nos acetatos anteriores é equivalente ao teste  $t$  (acetato 245) com as hipóteses  $H_0 : \beta_j = 0$  vs.  $H_1 : \beta_j \neq 0$ .**

Nesse caso, não apenas as hipóteses dos dois testes são iguais, como a **estatística do teste  $F$  parcial é o quadrado da estatística do teste  $t$  referido**. Tem-se  $p - k = 1$ , e como é sabido (ver os apontamentos da disciplina de Estatística dos primeiros ciclos do ISA), se uma variável aleatória  $T$  tem distribuição  $t_v$ , então o seu quadrado,  $T^2$  tem distribuição  $F_{1,v}$ .

## Como escolher um submodelo?

O teste  $F$  parcial (teste aos modelos encaixados) permite-nos optar entre um modelo e um seu submodelo. Por vezes, um submodelo pode ser sugerido por:

- **razões de índole teórica**, sugerindo que determinadas variáveis predictoras não sejam, na realidade, importantes para influenciar os valores de  $Y$ .
- **razões de índole prática**, como a dificuldade, custo ou volume de trabalho associado à recolha de observações para determinadas variáveis predictoras.

Nestes casos, pode ser claro que submodelo(s) se deseja testar.

**Nota:** Veja-sa o Exercício RLM 9e) para um exemplo.

## Como escolher um submodelo? (cont.)

Mas em muitas situações não é, à partida, evidente qual o subconjunto de variáveis predictoras que se deseja considerar no submodelo. Pretende-se apenas ver se o modelo é simplificável. Nestes casos, a opção por um submodelo não é um problema fácil.

**Dadas  $p$  variáveis predictoras, o número de subconjuntos, de qualquer cardinalidade, excepto 0 (conjunto vazio) e  $p$  (o modelo completo) que é possível escolher é dado por  $2^p - 2$ .** A tabela seguinte indica o número desses subconjuntos para  $p = 5, 10, 15, 20$ .

$p$	$2^p - 2$
5	30
10	1 022
15	32 766
20	1 048 574

## Cuidado com exclusões simultâneas de preditores

Para valores de  $p$  pequenos, é possível analisar todos os possíveis subconjuntos. Mas para  $p$  médio ou grande, essa análise completa é inviável.

Também não é legítimo olhar para o ajustamento do modelo completo e, com base nos testes  $t$  à significância de cada coeficiente  $\beta_j$ , optar pela exclusão de várias variáveis predictoras **em simultâneo**.

De facto, os testes  $t$  aos coeficientes  $\beta_j$  são feitos partindo do princípio que todas as restantes variáveis pertencem ao modelo. **A exclusão de um qualquer preditor altera o ajustamento: altera os valores estimados  $b_j$  e os respectivos erros padrão** das variáveis que permanecem no submodelo. **Pode acontecer que um preditor seja dispensável num modelo completo, mas deixe de o ser num submodelo, ou viceversa.**

## Um exemplo

Nos dados relativos ao Exercício 2 (RLM) das aulas práticas, a tabela associada à regressão da variável **Brix** sobre todas as restantes é:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	6.08878	1.00252	6.073	0.000298 ***
Diametro	1.27093	0.51219	2.481	0.038030 *
Altura	-0.70967	0.41098	-1.727	0.122478
Peso	-0.20453	0.14096	-1.451	0.184841
pH	0.51557	0.33733	1.528	0.164942
Acucar	0.08971	0.03611	2.484	0.037866 *

Mas **não** é legítimo concluir que **Altura, Peso e pH** são dispensáveis.

```
> anova(brix2.lm, brix.lm)
Analysis of Variance Table
Model 1: Brix ~ Diametro + Acucar
Model 2: Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar
  Res.Df  RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
1       11 0.42743
2        8 0.14925    3    0.27818 4.97 0.03104 *
```

## Algoritmos de pesquisa sequenciais

Vamos considerar **algoritmos de pesquisa** que permitam simplificar um modelo de regressão linear múltipla, sem precisar de analisar todos os possíveis submodelos. Em particular, vamos considerar um **algoritmo que, em cada passo, exclui uma variável preditora, até alcançar uma condição de paragem considerada adequada**. Trata-se do

**algoritmo de exclusão sequencial** (*backward elimination*).

Existem variantes deste algoritmo, não estudadas aqui:

- algoritmo de inclusão sequencial (*forward selection*).
- algoritmos de exclusão/inclusão alternada (*stepwise selection*).

## O algoritmo de exclusão sequencial

- 1 **ajustar o modelo completo**, com os  $p$  preditores;
- 2 **existem variáveis para as quais não se rejeita a hipótese  $\beta_j = 0$ ?** Em caso negativo, passar ao ponto seguinte. Em caso afirmativo, qualquer dessas variáveis é candidata a sair do modelo.
  - 1 se apenas existe uma candidata a sair, **excluir essa variável**;
  - 2 se existir mais do que uma variável candidata a sair, **excluir a variável associada ao maior  $p$ -value** (isto é, ao valor da estatística  $t$  mais próxima de zero)

Em qualquer caso, **reajustar o modelo após a exclusão da variável e repetir este ponto**

- 3 **Quando não existirem variáveis candidatas a sair, ou quando sobrar um único preditor**, o algoritmo pára. Tem-se então o **modelo final**.

## Um exemplo – Exercício 2 (RLM)

Usando o nível de significância  $\alpha = 0.05$ :


```
> summary(lm(Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar, data=brix))
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.08878    1.00252    6.073 0.000298 ***
Diametro     1.27093    0.51219    2.481 0.038030 *
Altura      -0.70967    0.41098   -1.727 0.122478
Peso        -0.20453    0.14096   -1.451 0.184841
pH           0.51557    0.33733    1.528 0.164942
Acucar       0.08971    0.03611    2.484 0.037866 *

> summary(lm(Brix ~ Diametro + Altura + pH + Acucar, data=brix))
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.25964    1.05496    5.934 0.000220 ***
Diametro     1.40573    0.53373    2.634 0.027189 *
Altura      -1.06413    0.35021   -3.039 0.014050 * <- Passou a ser significativo (0.05)
pH           0.33844    0.33322    1.016 0.336316
Acucar       0.08481    0.03810    2.226 0.053031 . <- Deixou de ser significativo (0.05)

> summary(lm(Brix ~ Diametro + Altura + Acucar, data=brix))
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.97183    0.78941    8.832 4.9e-06 ***
Diametro     1.57932    0.50642    3.119 0.01090 *
Altura      -1.11589    0.34702   -3.216 0.00924 ***
Acucar       0.09039    0.03776    2.384 0.03771 * <- Voltou a ser significativo (0.05)
```

O algoritmo pára aqui. Pode comparar-se o submodelo final com o modelo completo, através dum teste  $F$  parcial.

## Algoritmos sequenciais com base no AIC

O  disponibiliza funções para automatizar pesquisas sequenciais de submodelos, semelhantes à que aqui foi enunciada, mas em que o critério de exclusão dum variável em cada passo se baseia no **Critério de Informação de Akaike (AIC)**.

O AIC é uma **medida geral da qualidade de ajustamento de modelos**. No contexto dum **Regressão Linear Múltipla com  $k$  variáveis preditoras**, define-se como

$$AIC = n \cdot \ln \left( \frac{SQRE_k}{n} \right) + 2(k+1).$$

Nota: O AIC pode tomar valores negativos.

## Interpretando o AIC

$$AIC = n \cdot \ln \left( \frac{SQRE_k}{n} \right) + 2(k+1)$$

- a primeira parcela é função crescente de  $SQRE_k$ , i.e., quanto melhor o ajustamento, mais pequena a primeira parcela;
- a segunda parcela mede a complexidade do modelo ( $k+1$  é o número de parâmetros), pelo que quanto mais parcimonioso o modelo, mais pequena a segunda parcela.

Assim, o AIC mede simultaneamente a qualidade do ajustamento e a simplicidade do modelo.

Um modelo para a variável resposta  $Y$  é considerado **melhor** que outro se tiver um **AIC menor**.

## Algoritmos sequenciais com base no AIC (cont.)

Pode definir-se um algoritmo de exclusão sequencial, com base no critério AIC:

- ajustar o modelo completo e calcular o respectivo AIC.
- ajustar cada submodelo com menos **uma** variável e calcular o respectivo AIC.
- Se nenhum dos AICs dos submodelos considerados fôr inferior ao AIC do modelo anterior, o algoritmo termina sendo o modelo anterior o modelo final.  
Caso alguma das exclusões reduza o AIC, efectua-se a exclusão que maior redução no AIC provoca e regressa-se ao ponto anterior.



## Algoritmos sequenciais com base no AIC (cont.)

Em cada passo de exclusão, o submodelo com menor AIC será aquele que provocar menor aumento no *SQRE*, ou seja, aquele que tiver excluído a variável cujo teste a  $\beta_j = 0$  tem maior *p-value*.

Assim, o procedimento de exclusão sequencial baseado nos testes *t* ou no AIC coincidem na ordem das variáveis a excluir, podendo diferir apenas no critério de paragem.

Em geral, um algoritmo de exclusão sequencial baseado no AIC é mais cauteloso quanto a exclusões do que um algoritmo baseado nos testes *t*, sobretudo se o valor de  $\alpha$  usado nos testes for baixo. É aconselhável usar valores mais elevados de  $\alpha$ , como  $\alpha = 0.10$ , nos algoritmos de exclusão baseados nos testes *t*.

## Algoritmos de exclusão sequencial no R

A função `step` corre o algoritmo de exclusão sequencial, com base no AIC. Considere ainda o exemplo dos dados `brix` (Exercício 2 RLM):

```
> brix.lm <- lm(Brix ~ Diametro+Altura+Peso+pH+Acucar, data = brix)
> step(brix.lm, dir="backward")
Start: AIC=-51.58
Brix ~ Diametro + Altura + Peso + pH + Acucar
      Df Sum of Sq  RSS   AIC
<none>                0.14925 -51.576
-  Peso      1  0.039279 0.18853 -50.306
-  pH        1  0.043581 0.19284 -49.990
-  Altura    1  0.055631 0.20489 -49.141
-  Diametro  1  0.114874 0.26413 -45.585
-  Acucar    1  0.115132 0.26439 -45.572
```

Neste caso, não se exclui qualquer variável: o AIC do modelo inicial é inferior ao de qualquer submodelo resultante de excluir uma variável. O submodelo final é o modelo inicial.

## Uma palavra final sobre algoritmos de pesquisa

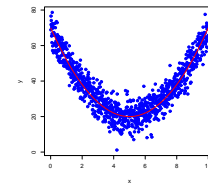
O algoritmo de exclusão sequencial não garante a identificação do "melhor submodelo" com um dado número de preditores. Apenas identifica, de forma que não é computacionalmente muito pesada, submodelos que se presume serem "bons".

Deve ser usado com bom senso e o submodelo obtido cruzado com outras considerações (como por exemplo, o custo ou dificuldade de obtenção de cada variável, ou o papel que a teoria relativa ao problema em questão reserva a cada preditor).

## Regressão Polinomial

Um caso particular de relação não-linear, mesmo que envolvendo apenas uma variável preditora e a variável resposta, pode ser facilmente tratada no âmbito duma regressão linear múltipla: o caso de relações polinomiais entre *Y* e um ou mais preditores.

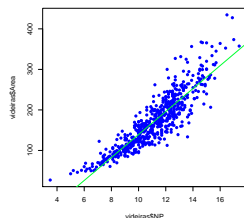
Considere-se, por exemplo, que a relação de fundo entre uma variável resposta *Y* e uma única variável preditora *X* não é dada por uma recta, mas sim por uma parábola:



## Regressão Polinomial - Exemplo

Considere os dados do Exercício 7 da Regressão Linear Múltipla, relativos a medições sobre  $n = 600$  folhas de videira.

Eis o gráfico das áreas vs. comprimentos de nervuras principais, com sobreposta a recta de regressão:



Há uma tendência para curvatura. Talvez um polinómio de 2o. grau?

## Regressão Polinomial - Exemplo (cont.)

Qualquer parábola, com equação  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$ , pode ser ajustada e estudada como se se tratasse duma regressão linear entre *Y* e as variáveis  $X_1 = X$  e  $X_2 = X^2$ :

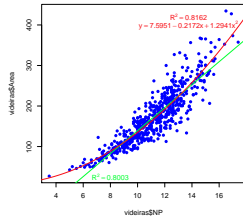
```
> summary(lm(Area ~ NP + I(NP^2), data=videiras))
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  7.5961      22.0431   0.345   0.731
NP          -0.2172       4.0125  -0.054  0.957
I(NP^2)      1.2941       0.1801   7.187 1.98e-12 ***
---
Residual standard error: 28.86 on 597 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8162, Adjusted R-squared:  0.8155
F-statistic: 1325 on 2 and 597 DF, p-value: < 2.2e-16
```

A equação da parábola ajustada é  $y = 7.5961 - 0.2172x + 1.2941x^2$ .

A rejeição da hipótese  $\beta_2 = 0$  diz que a parábola ajusta-se significativamente melhor do que a recta de regressão.

## Regressão Polinomial - Exemplo (cont.)

Eis a parábola ajustada:



É legítimo afirmar que este modelo de regressão quadrático explica 81.62% da variabilidade nas áreas foliares observadas.

## Regressões Polinomiais (cont.)

O argumento é extensível a qualquer polinómio de qualquer grau, e em qualquer número de variáveis. Dois exemplos:

- Polinómio de grau  $p$  numa variável

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \underbrace{x}_{=x_1} + \beta_2 \underbrace{x^2}_{=x_2} + \beta_3 \underbrace{x^3}_{=x_3} + \dots + \beta_p \underbrace{x^p}_{=x_p}$$

- Polinómio de grau 2 em 2 variáveis

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \underbrace{x}_{=x_1} + \beta_2 \underbrace{x^2}_{=x_2} + \beta_3 \underbrace{z}_{=x_3} + \beta_4 \underbrace{z^2}_{=x_4} + \beta_5 \underbrace{xz}_{=x_5}$$

## A análise de Resíduos e outros diagnósticos

Uma análise de regressão linear não fica completa sem o estudo dos resíduos e de alguns outros diagnósticos.

Grande parte do que se disse sobre resíduos na Regressão Linear Simples mantém-se válido numa Regressão Linear Múltipla.

Relembrar três conceitos relacionados, mas diferentes:

Erros aleatórios

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)})$$

Resíduos (variáveis aleatórias)

$$E_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \hat{\beta}_2 x_{2(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)})$$

Resíduos (observados)

$$e_i = y_i - (b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})$$

## Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM

O modelo de Regressão Linear Múltipla admite que

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Sob o modelo RLM, os **resíduos** têm a seguinte distribuição:

$$E_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(1 - h_{ii})) \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

onde  $h_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento diagonal da matriz  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$  de projecção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ , gerado pelas colunas da matriz  $\mathbf{X}$ .

Em notação vectorial:  $\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{Y}$ ,

## Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM (cont.)

### Teorema (Distribuição dos Resíduos no MRLM)

Dado o Modelo de Regressão Linear Múltipla, tem-se:

$$\mathbf{E} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})) \quad \text{sendo } \mathbf{E} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{Y}.$$

O vector dos resíduos  $\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{Y}$ , tem distribuição **Multinormal** pelo último ponto do Teorema do acetato 231.

O vector esperado de  $\mathbf{E}$  resulta das propriedades do acetato 226:

- $E[\mathbf{E}] = E[(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{Y}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})E[\mathbf{Y}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ , pois o vector  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$ , logo permanece invariante sob a acção da matriz de projecções  $\mathbf{H}$ :  $\mathbf{H}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ .

## Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM (cont.)

A matriz de covariâncias do vector aleatório dos resíduos,  $\mathbf{E}$ , calcula-se a partir do facto de a matriz de projecção ortogonal ser (Exercício 4 da RLM):

- simétrica, isto é  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$ ;
- idempotente, isto é,  $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{H}$ .

Tendo também presentes as propriedades do acetato 227, vem:

- $V[\mathbf{E}] = V[(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{Y}] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})V[\mathbf{Y}](\mathbf{I}_n - \mathbf{H})' = \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$ .

## Propriedades dos Resíduos sob o Modelo RLM (cont.)

Embora no modelo RLM os erros aleatórios sejam independentes, os resíduos não são variáveis aleatórias independentes, pois as covariâncias entre resíduos diferentes são (em geral), não nulas:

$$\text{cov}(E_i, E_j) = -\sigma^2 h_{ij}, \quad \text{se } i \neq j,$$

onde  $h_{ij}$  indica o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{H}$ .

## Vários tipos de resíduos

Tal como na RLS, definem-se diferentes tipos de resíduos (como resultado do facto de as variâncias dos resíduos "clássicos" ( $E_i$ ) não serem constantes, mesmo sob o modelo de RLM):

Resíduos habituais :  $E_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ;

Resíduos (internamente) estandardizados :  $R_i = \frac{E_i}{\sqrt{QMRE_{(-i)}(1-h_{ii})}}$ .

Resíduos Studentizados (ou externamente estandardizados):

$$T_i = \frac{E_i}{\sqrt{QMRE_{(-i)}(1-h_{ii})}}$$

sendo  $QMRE_{(-i)}$  o valor de  $QMRE$  resultante de um ajustamento da Regressão **excluindo** a  $i$ -ésima observação (associada ao resíduo  $E_i$ ).

## Análise dos resíduos

Tal como para a RLS, também em regressões múltiplas se avalia a validade dos pressupostos do modelo através de **gráficos de resíduos**.

Estes gráficos são agora mais importantes do que na RLS, dada a impossibilidade de visualização de nuvens de pontos em espaços de alta dimensionalidade.

Os gráficos mais usuais são os já considerados na RLS e a sua leitura faz-se de forma análoga:

- gráfico de  $E_i$ s vs.  $\hat{Y}_i$ s: os pontos devem-se dispor numa banda horizontal, centrada no valor zero, sem outro padrão especial.
- *qq-plot* dos resíduos estandardizados vs. distribuição Normal: a Normalidade dos erros aleatórios corresponde à linearidade.
- gráfico de resíduos vs. ordem de observação: para investigar eventuais faltas de independência dos erros aleatórios.

## O efeito alavanca

Outras ferramentas de diagnóstico visam identificar observações individuais que merecem ulterior análise, tal como na RLS. Mas importa adaptar as definições ao contexto de Regressão Múltipla.

Numa RLM o **valor de efeito alavanca** (*leverage*) é o valor  $h_{ii}$  do elemento diagonal da matriz de projecção ortogonal  $\mathbf{H}$ , correspondente à observação  $i$ .

O **valor médio** das observações alavanca numa RLM é

$$\bar{h} = \frac{p+1}{n},$$

ou seja, a razão entre o número de parâmetros e o número de observações.

## Gráficos de diagnóstico

A **distância de Cook** para avaliar a influência da observação  $i$  define-se agora como:

$$D_i = \frac{\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{(-i)}\|^2}{(p+1) \cdot QMRE},$$

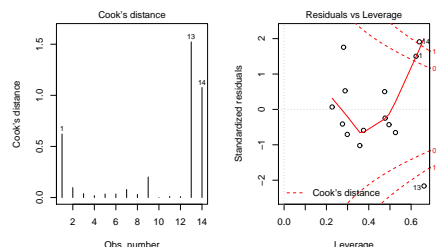
onde  $\hat{\mathbf{y}}_{(-i)} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(-i)}$  é o vector dos  $n$  valores ajustados de  $Y$  obtido estimando os  $\beta$ s sem a observação  $i$ . Expressão equivalente é (sendo  $R_i$  o correspondente resíduo estandardizado):

$$D_i = R_i^2 \cdot \left( \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right) \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Os restantes aspectos da discussão são análogos aos duma RLS.

## Um exemplo de gráficos de diagnóstico

Um exemplo destes gráficos de diagnósticos, para os dados do Exercício 2 da RLM (Brix) é:



Os valores bastante elevados de distância de Cook e  $h_{ii}$  neste exemplo reflectem o reduzido número de observações ( $n = 14$ ) usado para ajustar um modelo com muitos parâmetros ( $p + 1 = 6$ ).

## O $R^2$ modificado

Como foi visto no contexto da RLS (acetato 164), define-se uma variante do Coeficiente de Determinação: o  $R^2$  modificado.

- O Coeficiente de Determinação usual:

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = 1 - \frac{SQRE}{SQT}$$

- O  $R^2$  modificado (sendo  $QMT = SQT/(n-1)$ ):

$$R_{mod}^2 = 1 - \frac{QMRE}{QMT} = 1 - \frac{SQRE}{SQT} \cdot \frac{n-1}{n-(p+1)} = 1 - (1-R^2) \cdot \frac{n-1}{n-(p+1)}$$

Tem-se sempre  $n-1 > n-(p+1)$ , pelo que  $R_{mod}^2 < R^2$ .

Quando  $n \gg p+1$  (muito mais observações que parâmetros no modelo) tem-se  $R^2 \approx R_{mod}^2$ .

Se  $n$  é pouco maior que o número de variáveis predictoras,  $R_{mod}^2$  é bastante inferior a  $R^2$ , excepto se  $R^2$  for muito próximo de 1.

## Advertências finais

1. Podem surgir problemas associados à **multicolinearidade** das variáveis predictoras, ou seja, ao facto das colunas da matriz  $\mathbf{X}$  serem (quase) linearmente dependentes. Nesse caso, podem:

- existir **problemas no cálculo de  $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}$** , logo no ajustamento do modelo e na estimação dos parâmetros;
- existir **variâncias muito grandes de alguns  $\hat{\beta}_j$ s**, o que significa muita instabilidade na inferência.

Multicolinearidade exacta reflecte redundância de informação nos preditores.

É possível eliminar multicolinearidade exacta ou aproximada, excluindo da análise uma ou várias variáveis predictoras que sejam responsáveis pela (quase) dependência linear dos preditores.

## Advertências finais (cont.)

2. Tal como na Regressão Linear Simples, podem ser usadas transformações da variável resposta, e também de alguma(s) das variáveis predictoras.

Em particular, podem ser úteis **transformações que linearizem a relação entre  $Y$  e  $X_1, X_2, \dots, X_p$** . Tais **transformações linearizantes** podem permitir estudar relações de tipo não-linear através de relações lineares entre as variáveis transformadas.

E.g., a relação não linear entre  $Y, x_1$  e  $x_2$ ,

$$y = ax_1^b x_2^c$$

torna-se, após uma logaritmização, numa relação linear entre  $\ln(y)$ ,  $\ln(x_1)$  e  $\ln(x_2)$  (com  $b_0^* = \ln(a)$ ,  $b_1^* = b$  e  $b_2^* = c$ ):

$$\ln(y) = b_0^* + b_1^* \ln(x_1) + b_2^* \ln(x_2)$$

## Advertências finais (cont.)

3. Não se deve confundir a existência de uma **relação linear entre preditores  $X_1, X_2, \dots, X_p$  e variável resposta  $Y$ , com uma relação de causa e efeito**.

Pode existir uma relação de causa e efeito.

Mas pode também verificar-se:

- Uma relação de **variação conjunta**, mas não de tipo causal (como por exemplo, em muitos conjuntos de dados morfométricos). Por vezes, preditores e variável resposta são todos efeito de causas comuns subjacentes.
- Uma relação **espúria**, de coincidência numérica.

Uma relação **causal** só pode ser afirmada com base em teoria própria do fenómeno sob estudo, e não com base na relação linear estabelecida estatisticamente.