
INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA
ESTATÍSTICA E DELINEAMENTO – 2014/15
Algumas demonstrações de resultados nos acetatos de apoio às Teóricas

1. **Distribuição do estimador do declive, $\hat{\beta}_1$ (Teoremas dos acetatos 121 e 122).**

Foi visto (Acetato 119) que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{COV_{xY}}{s_x^2} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i, \quad \left(c_i = \frac{x_i - \bar{x}}{(n-1)s_x^2} \right).$$

Logo, $\hat{\beta}_1$ é uma **combinação linear das observações de Y** , $\{Y_i\}_{i=1}^n$. Mas essas observações têm distribuição Normal e são independentes (Acetato 118). **Qualquer combinação linear de Normais independentes é Normal** (Acetato 117). **Logo, $\hat{\beta}_1$ tem distribuição Normal.** Falta indicar com que parâmetros. Uma vez que o primeiro parâmetro duma Normal é o seu valor esperado (valor médio), temos (tendo em conta os acetatos 114 e 118):

$$E[\hat{\beta}_1] = E\left[\sum_{i=1}^n c_i Y_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i E[Y_i] = \sum_{i=1}^n c_i (\beta_0 + \beta_1 x_i) = \beta_0 \sum_{i=1}^n c_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

Veremos de seguida que o primeiro destes somatórios tem soma nula, e o segundo tem soma 1, pelo que o valor esperado pretendido é β_1 . Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \bar{x}}{(n-1)s_x^2} = \frac{1}{(n-1)s_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (\text{ver Ex.3a) RLS}) \\ \sum_{i=1}^n c_i x_i &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})x_i}{(n-1)s_x^2} = \frac{1}{(n-1)s_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{s_x^2}{s_x^2} = 1 \end{aligned}$$

sendo a passagem intermédia na segunda linha resultado de aplicar o Exercício 3b) de RLS a uma situação em que $y_i = x_i$, para todo o $i = 1, \dots, n$. Logo, $E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$, pelo que o estimador é **centrado**.

Vejamos agora a expressão para o segundo parâmetro da Normal, que sabemos ser a variância. Recordem-se as propriedades das variâncias, e tenha-se presente que as observações $\{Y_i\}_{i=1}^n$ são v.a. independentes.

$$\begin{aligned} V[\hat{\beta}_1] &= V\left[\sum_{i=1}^n c_i Y_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i^2 \underbrace{V[Y_i]}_{=\sigma^2, \forall i} = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{[(n-1)s_x^2]^2}}_{=c_i^2} = \frac{\sigma^2}{[(n-1)s_x^2]^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{[(n-1)s_x^2]^2} \cdot (n-1)s_x^2 = \frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}. \end{aligned}$$

Temos assim que $\hat{\beta}_1 \cap \mathcal{N}\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}\right)$. Como sabemos (acetato 117), se a uma v.a. Normal subtrairmos a sua média e dividirmos pelo seu desvio padrão, obtemos uma Normal reduzida, $\mathcal{N}(0, 1)$. Assim, e como referido no Acetato 122, $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \cap \mathcal{N}(0, 1)$, sendo $\sigma_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)s_x^2}}$ o desvio padrão associado à estimação de β_1 .

Os resultados para o outro estimador, $\hat{\beta}_0$, são análogos e são discutidos no Exercício 13 das aulas práticas.

2. Distribuição de $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ (Teorema do acetato 128).

Pretende-se mostrar que, se na quantidade $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}}$ (que tem distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$) se substituir $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ pelo seu estimador $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$, a distribuição resultante é uma t -Student, com $n - 2$ graus de liberdade. No acetato 122 viu-se que

$$Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \cap \mathcal{N}(0, 1) .$$

Por outro lado, no acetato 125 enunciou-se que

$$W = \frac{SQRE}{\sigma^2} \cap \chi_{n-2}^2 ,$$

sendo $SQRE$ independente de $\hat{\beta}_1$. Logo, e relembrando a forma como surgem distribuições t -Student (acetato 127), sabemos que $\frac{Z}{\sqrt{W/(n-2)}} \cap t_{n-2}$.

Tendo em conta a expressão para $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ (acetato 122), a expressão para $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$ (acetato 128) e a definição de $QMRE$ (acetato 126), temos:

$$\frac{Z}{\sqrt{W/(n-2)}} = \frac{\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}}}{\sqrt{\frac{SQRE}{\sigma^2 \cdot (n-2)}}} = \frac{\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{(n-1) \cdot s_x^2}}}{\sqrt{\frac{QMRE}{\sigma^2 \cdot (n-2)}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{QMRE}{(n-1) \cdot s_x^2}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} .$$

Assim, $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ tem distribuição t -Student, com $n - 2$ graus de liberdade.

3. Intervalo de confiança para β_1 (Acetato 129).

Sabemos (acetato 128) que $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \cap t_{n-2}$. Designando por $t_{\alpha/2(n-2)}$ o valor que, numa distribuição t_{n-2} deixa à sua direita uma região de probabilidade $\alpha/2$, e uma vez que o simétrico desse valor, $-t_{\alpha/2(n-2)}$, será (dada a simetria da distribuição t -Student em torno de zero) o valor que deixa à sua esquerda uma área $\alpha/2$, pode-se escrever a seguinte equação:

$$P \left[-t_{\alpha/2(n-2)} < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} < t_{\alpha/2(n-2)} \right] = 1 - \alpha$$

Substituíndo a dupla desigualdade por outras duplas desigualdades equivalentes não altera a probabilidade $1 - \alpha$. Vamos efectuar essas substituições com o objectivo de deixar o parâmetro para o qual se pretende contruir o intervalo de confiança (β_1) sozinho no meio duma dupla desigualdade. Tem-se (primeiro multiplicando a dupla desigualdade por $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$, depois por -1 e finalmente somando $\hat{\beta}_1$):

$$\begin{aligned} -t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} &< \hat{\beta}_1 - \beta_1 < t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \\ \Leftrightarrow t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} &> \beta_1 - \hat{\beta}_1 > -t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \\ \Leftrightarrow \hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} &< \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} . \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de o verdadeiro valor do declive β_1 da recta populacional estar contido entre os dois extremos indicados é $1 - \alpha$. Mas este intervalo é um *intervalo aleatório*: os seus

extremos são constituídos por variáveis aleatórias $(\hat{\beta}_1 \text{ e } \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1})$, que tomam diferentes valores para cada amostra concreta que seja extraída da população. Para *uma amostra concreta* obter-se-á um *intervalo concreto* substituindo o estimador $\hat{\beta}_1$ pela estimativa concreta b_1 e substituindo o erro padrão estimado $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$ pelo seu valor concreto (que continuamos a designar por $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$). O intervalo assim resultante chama-se um *intervalo de confiança* a $(1-\alpha) \times 100\%$ para β_1 :

$$\left] b_1 - t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \quad , \quad b_1 + t_{\alpha/2(n-2)} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \left[.$$

Pode ser interpretado da seguinte forma: é um intervalo concreto (associado a uma amostra concreta) extraído ao acaso duma família de intervalos (que se obteriam se fossem extraídas todas as possíveis amostras concretas de tamanho n da nossa população). Nessa família, $(1-\alpha) \times 100\%$ dos intervalos conteriam o verdadeiro valor do declive populacional β_1 . Não sabemos se o intervalo concreto por nós escolhido contém, ou não, esse valor. Mas temos uma *confiança* $(1-\alpha) \times 100\%$ em como contém, uma vez que essa era a proporção de intervalos na referida família de intervalos (de onde o nosso intervalo concreto foi escolhido ao acaso) que continham o valor β_1 .