

Matemática II

Alguns Modelos Probabilísticos

2014/2015

(MJ Martins, F. Valente e M. Mesquita)

Modelos probabilísticos

- ▣ As v.a.s associadas a grande parte das experiências podem ser representadas por famílias de distribuições estatísticas – modelos probabilísticos – cujas propriedades são função de poucos parâmetros.
- ▣ Os parâmetros determinam a localização, a variabilidade e a forma das distribuições.
- ▣ Pela sua importância, ir-se-ão considerar as
 - Distribuições discretas:
 - uniforme discreta, binomial e Poisson;
 - Distribuições contínuas:
 - uniforme, normal.

2

Modelos probabilísticos no R

- ▣ O *software* R disponibiliza “tabelas estatísticas” para um conjunto de distribuições.
- ▣ Para cada distribuição estatística é possível calcular
 1. função massa de probabilidade ou função densidade
 2. função distribuição cumulativa
 3. quantis
 4. números pseudo-aleatórios

Nota: Os números pseudo-aleatórios são muitas vezes utilizados para obter dados simulados que seguem uma dada distribuição.

3

Modelos probabilísticos no R

Distribuição	nome no R	argumentos adicionais
beta	beta	shape1, shape2, ncp
binomial	binom	size, prob
Cauchy	cauchy	location, scale
qui-quadrado	chisq	df, ncp
exponencial	exp	rate
F	f	df1, df2, ncp
gama	gamma	shape, scale
geométrica	geom	prob
hipergeométrica	hyper	m, n, k
log-normal	lnorm	meanlog, sdlog
logística	logis	location, scale
binomial neg.	nbinom	size, prob
normal	norm	mean, sd
Poisson	pois	lambda
t - Student	t	df, ncp
uniforme	unif	min, max
Weibull	weibull	shape, scale
Wilcoxon	wilcox	m, n

4

Modelos probabilísticos no R

- ▣ Ao nome R da distribuição acrescentam-se os prefixos:
 - d para função massa de probabilidade ou função densidade
 - p para função distribuição cumulativa
 - q para quantis
 - r para números pseudo-aleatórios

As funções `pxxx` e `qxxx` têm o argumentos lógico: `lower.tail` – se for TRUE (por omissão), as probabilidades são $P[X \leq x]$, caso contrário são $P[X > x]$.

5

Distribuição uniforme discreta

- ▣ É a distribuição discreta mais simples. Caracteriza-se por todos os valores possíveis terem igual probabilidade.
- ▣ É usada como primeiro modelo para uma quantidade que toma n valores distintos, x_1, \dots, x_n , em que $x_1 \leq \dots \leq x_n$

$$X \cap UD(x_1, \dots, x_n)$$

$$P[X = x_i] = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

6

Distribuição uniforme discreta

▣ Valor médio: $E[X]=\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

▣ Variância: $Var(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\mu^2$

▣ Exemplo: Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado de seis faces. Seja X a v.a. que representa o nº pintas da face voltada para cima.
 $X \cap UD(1:6)$

- pode tomar os valores $x=1,2,3,4,5,6$
- com probabilidade $P[X=x]=\frac{1}{6}$

7

Distribuição binomial

▣ É a distribuição discreta mais importante, muito aplicada em amostragem.

▣ **Sucessão de provas de Bernoulli independentes** é uma sequência de experiências aleatórias em que:

- cada prova tem dois resultados possíveis, sucesso ou insucesso,
- a probabilidade de sucesso p mantém-se de prova para prova,
- o resultado de cada prova é independente dos resultados das provas anteriores.

▣ A v.a. X que representa o número de sucessos numa sucessão de n provas de Bernoulli independentes, tem distribuição binomial com parâmetros n e p .

8

Distribuição binomial

▣ $X \cap B(n, p)$ n inteiro positivo e $0 < p < 1$

- pode tomar os valores $x=0,1,2,\dots,n$

- com probabilidade $P[X=x]=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
em que $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$

▣ Valor médio: $E[X]=np$

▣ Variância: $Var(X)=np(1-p)$

▣ Exemplo: Seja $X \cap B(4, 0.3)$

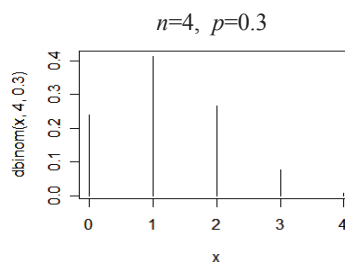
- $P[X=2]=0.2646$ $\text{dbinom}(2, 4, 0.3)$
- $P[X \leq 2]=0.9163$ $\text{pbinom}(2, 4, 0.3)$

9

Distribuição binomial

▣ Alguns gráficos da função massa de probabilidade:

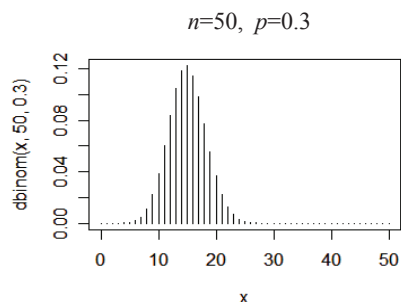
```
>x<-0:4  
>plot(x,dbinom(x,4,0.3),type="h")
```



10

Distribuição binomial

```
>x<-0:50  
>plot(x,dbinom(x,50,0.3),type="h")
```



11

Distribuição binomial (leitura de tabelas)

▣ Para calcular probabilidades de uma distribuição binomial pode recorrer-se também a tabelas.

▣ As tabelas disponíveis apresentam valores da função distribuição cumulativa para alguns valores de n (2, 3, ..., 20) e p (0.05, 0.1, ..., 0.5)

▣ Para calcular probabilidades de uma distribuição com parâmetro $p > 0.5$ utiliza-se a relação

$$X \cap B(n, p) \Leftrightarrow (n-X) \cap B(n, 1-p)$$

12

Distribuição binomial (leitura de tabelas)

Exemplo: Seja $X \sim B(4, 0.3)$

$$P[X \leq 2] = 0.9163$$

$$P[X = 2] = P[X \leq 2] - P[X \leq 1] = 0.9163 - 0.6517 = 0.2646$$

n	x	p									
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375	
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

13

Distribuição de Poisson

Esta distribuição modela o número de ocorrências num intervalo de tempo ou numa região espacial.

Processo de Poisson – refere-se ao número de ocorrências num intervalo de tempo ou numa região espacial que verifica as propriedades:

- não tem memória; os números de ocorrências em intervalos/regiões disjuntos são independentes;
- a probabilidade de ocorrência num intervalo/região *muito pequeno* é proporcional à amplitude/tamanho do intervalo/região;
- a probabilidade de o número de ocorrências ser superior a um é nula em intervalos/regiões *muito pequenos*.

14

Distribuição de Poisson

Seja $\lambda > 0$ o n° médio de ocorrências num dado intervalo de tempo (ou numa região do espaço) num processo de Poisson. Então, a v.a. que representa o n° de ocorrências nesse intervalo de tempo (ou região), tem distribuição de Poisson com parâmetro λ .

$X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$

– pode tomar os valores

$$x = 0, 1, 2, \dots,$$

– com probabilidade

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

15

Distribuição de Poisson

Valor médio: $E[X] = \lambda$

Variância: $Var(X) = \lambda$

Exemplo: Seja $X \sim P(3)$

$$- P[X = 2] = 0.2240418 \quad \text{dpois}(2, 3)$$

$$- P[X \leq 2] = 0.4231901 \quad \text{ppois}(2, 3)$$

Propriedade: se as v.a.s X_i , $i = 1, \dots, k$ são independentes e $X_i \sim P(\lambda_i)$ então

$$\sum_{i=1}^k X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$$

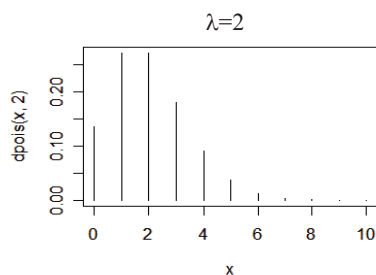
16

Distribuição de Poisson

Alguns gráficos da função massa de probabilidade:

```
>x<-0:10
```

```
>plot(x,dpois(x,2),type="h")
```

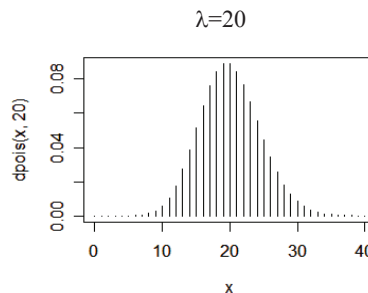


17

Distribuição de Poisson

```
>x<-0:40
```

```
>plot(x,dpois(x,20),type="h")
```



18

Distribuição Poisson (leitura de tabelas)

- Existem também tabelas que facilitam o cálculo de probabilidades de uma distribuição de Poisson.
- As tabelas disponíveis apresentam valores da **função distribuição cumulativa** para alguns valores de λ .
- Exemplo: Seja $X \sim P(3)$

$$P[X \leq 2] = 0.423$$

$$P[X = 2] = P[X \leq 2] - P[X \leq 1] = 0.423 - 0.199 = 0.224$$

x	$\lambda = E[X]$									
	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	0.111	0.091	0.074	0.061	0.050	0.041	0.033	0.027	0.022	0.018
1	0.355	0.308	0.267	0.231	0.199	0.171	0.147	0.126	0.107	0.092
2	0.623	0.570	0.518	0.469	0.423	0.380	0.340	0.303	0.269	0.238
3	0.819	0.779	0.736	0.692	0.647	0.603	0.558	0.515	0.473	0.433
4	0.928	0.904	0.877	0.848	0.815	0.781	0.744	0.706	0.668	0.629
5	0.975	0.964	0.951	0.935	0.916	0.895	0.871	0.844	0.816	0.785

Distribuição uniforme contínua

- É a distribuição contínua mais simples.
- É usada para representar uma quantidade que varia aleatoriamente no intervalo $[a, b]$ e cuja probabilidade de tomar valores num subintervalo de $[a, b]$ é proporcional ao seu comprimento.

$$X \sim U(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$$

- pode tomar valores no intervalo $[a, b]$
- função densidade

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b]$$

20

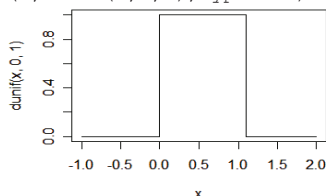
Distribuição uniforme contínua

- Valor médio: $E[X] = (a+b)/2$
- Variância: $Var(X) = (b-a)^2/12$
- Exemplo: Seja $X \sim U(0, 1)$

- função densidade

```
> x <- seq(-1, 2, 0.1)
```

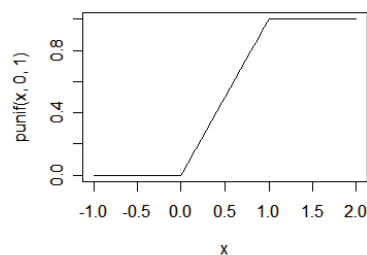
```
> plot(x, dunif(x, 0, 1), type="s")
```



21

Distribuição uniforme contínua

- função distribuição cumulativa
- ```
> plot(x, punif(x, 0, 1), type="l")
ou > curve(punif(x, 0, 1), from=-1, to=2)
```



22

## Distribuição normal

- É a distribuição contínua mais importante:
  - é um modelo adequado para representar muitos fenómenos do mundo real, nomeadamente características biométricas, variação de temperaturas, velocidades, volumes, erros, etc;
  - é muito usada em inferência estatística. Tal deve-se ao facto de, mesmo que a distribuição da população não seja normal, a distribuição das médias amostrais, sob certas condições, ser aproximadamente normal (Teorema Limite Central);
  - algumas variáveis aleatórias (como a binomial e a Poisson) podem ser aproximadas por uma v.a. normal.

23

## Distribuição normal

$$X \sim N(\mu, \sigma) \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$$

- pode tomar qualquer valor real
- função densidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- tem forma de sino e um máximo para  $x = \mu$
- é simétrica em relação à recta vertical  $x = \mu$
- tem pontos de inflexão para  $x = \mu \pm \sigma$
- $P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] = 0.68$
- $P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approx 0.95$
- $P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] = 0.997$

24

## Distribuição normal

Valor médio:  $E[X]=\mu$

Variância:  $Var(X)=\sigma^2$

Exemplo: Seja  $X \cap N(2, 4)$

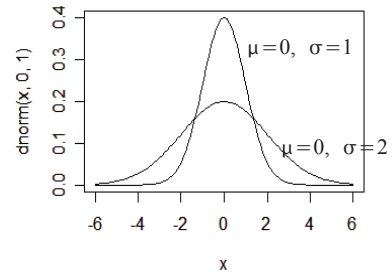
- $P[X \leq 2] = 0.5$  `pnorm(2, 2, 4)`
- $P[X > 2.5] = 0.4502618$  `1-pnorm(2.5, 2, 4)`

25

## Distribuição normal

Características da função densidade – variação com  $\sigma$

```
> curve(dnorm(x, 0, 1), from=-6, to=6)
> curve(dnorm(x, 0, 2), from=-6, to=6, add=T)
```

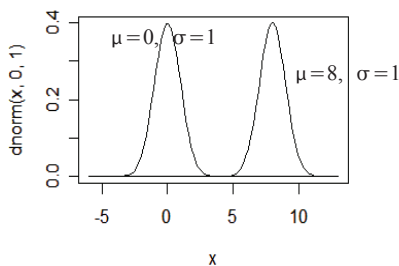


26

## Distribuição normal

Características da função densidade – variação com  $\mu$

```
> curve(dnorm(x), from=-6, to=13)
> curve(dnorm(x, 8, 1), from=-6, to=13, add=T)
```



27

## Distribuição normal reduzida

$Z \cap N(\mu=0, \sigma=1)$  tem distribuição normal reduzida

Se  $X \cap N(\mu, \sigma)$  então  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \cap N(0,1)$

O cálculo de probabilidades envolvendo  $X \cap N(\mu, \sigma)$  pode ser reduzido ao cálculo com a v.a.  $Z \cap N(0,1)$ , por exemplo:

$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] = P\left[-3 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 3\right] = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.997 \quad (\Phi(z) = P[Z \leq z])$$

28

## Distribuição normal reduzida (leitura de tabelas)

O cálculo de probabilidades da distribuição normal só pode ser efectuado através de métodos numéricos.

Existem tabelas com os valores da função distribuição cumulativa da normal reduzida,  $\Phi(z)$ .

As tabelas disponíveis apresentam probabilidades para valores positivos da variável ( $z \geq 0$ ).

Para valores negativos, utiliza-se a relação

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z),$$

consequência da simetria da distribuição normal.

29

## Distribuição normal reduzida (leitura de tabelas)

Exemplo: Seja  $Z \cap N(0, 1)$

$$P[Z \leq 0.23] = \Phi(0.23) = 0.59095$$

$$P[Z \leq -0.23] = \Phi(-0.23) = 1 - \Phi(0.23) = 1 - 0.59095 = 0.40905$$

|     | 0.00    | 0.01    | 0.02    | 0.03    | 0.04    | 0.05    | 0.06    | 0.07    | 0.08    | 0.09    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |

30

## Propriedades

### 1) Transformação afim de uma normal:

se  $X \cap N(\mu, \sigma)$  então  $a+bX \cap N(a+b\mu, |b|\sigma)$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

### 2) Estabilidade da soma de normais:

Se as v.a.s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  têm distribuição normal e são **independentes**, então a sua soma ainda tem distribuição normal. Mais concretamente:

$$\left. \begin{array}{l} X_i \cap N(\mu_i, \sigma_i), \quad i=1, 2, \dots, n \\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ v.a. independentes} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \cap N\left(\sum_i \mu_i, \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}\right)$$

31

## Propriedades (cont.)

Se as v.a.s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com  $X_i \cap N(\mu, \sigma), \forall i$ , pelas propriedades anteriores tem-se

### 3) Estabilidade da soma de normais i.i.d.:

$$\sum_{i=1}^n X_i \cap N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

### 4) Média (amostral) de $n$ normais i.i.d.:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cap N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

32

## Teorema Limite Central

☞ A soma de “muitas” v.a.s independentes e identicamente distribuídas, com variância finita, tem distribuição **aproximadamente** normal.

☞ Se as v.a.s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são i.i.d. com  $E[X_i]=\mu$  e  $Var[X_i]=\sigma^2$  então

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) \quad \text{para } n \text{ elevado } (n \geq 30)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{para } n \text{ elevado } (n \geq 30)$$

33

## Teorema Limite Central (cont.)

### ☞ Consequências do TLC

– Aproximação da binomial pela normal

$$X \cap B(n, p) \rightarrow X \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}) \quad \text{para } n \text{ elevado} \\ (np > 5 \text{ e } n(1-p) > 5)$$

– Aproximação da Poisson pela normal

$$X \cap P(\lambda) \xrightarrow{(\lambda > 12)} X \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda}), \quad \lambda \text{ elevado } (\lambda > 12)$$

☞ **Correcção de continuidade:** Na aproximação de uma distribuição discreta por uma contínua, há que ter em conta que  $P[X_{\text{contínua}}=x]=0, \forall x$ .

$$P[X_{\text{discreta}}=x] \longrightarrow P[x-0.5 < X_{\text{contínua}} < x+0.5] \quad 34$$

## Bibliografia

- ☞ Neves, M. (2009) Introdução à Estatística e Probabilidade. Apontamentos de apoio às aulas.  
– Teoria da Probabilidade: [www.isa.utl.pt/dm/estat/estat/seb2.pdf](http://www.isa.utl.pt/dm/estat/estat/seb2.pdf)
- ☞ Pestana, D.D. e Velosa, S.F. (2002) Introdução à Probabilidade e à Estatística, vol.I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- ☞ An Introduction to R, cap. 8 (Probability distributions), cap. 11 (Statistical models in R). Manual do R disponível através do Help ou em <http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.html>

35