Departamento de Ciências e Engenharia de Biossistemas
Secção de Matemática

Matemática II

Fundamentos de Probabilidade: Revisões

2014/2015

(MJ Martins, F. Valente e M. Mesquita)

Probabilidade - motivação

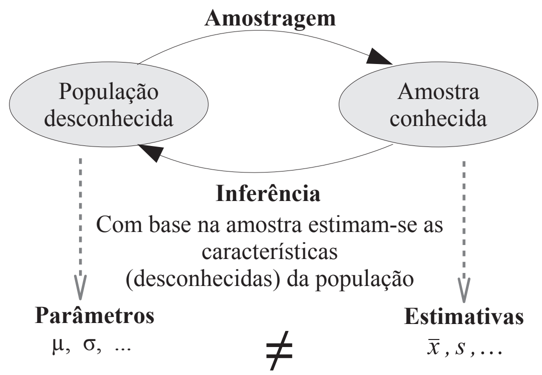
- **Objectivo:** caracterizar uma população (através de parâmetros de localização, dispersão, …)

  Não sendo possível estudar todos os elementos da população, recolhe-se uma **amostra aleatória**:

  i. Qualquer elemento da população deve ter igual oportunidade de ser incluído na amostra – **representatividade**.

  ii. A selecção de um elemento não deve influenciar a selecção de outro qualquer elemento - **independência**.

Probabilidade - motivação



Probabilidade - motivação

- O estudo da ***probabilidade*** permite quantificar a incerteza associada às estimativas, proporcionando ferramentas para desenvolver modelos matemáticos que ajudam a prever o comportamento de fenómenos nos quais interfere o acaso.

Experiência aleatória

- **Experiência aleatória**:
  – O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antes da realização da experiência;
  – tem intervenção do acaso, por isso o resultado (observação - ω) não se conhece antes da realização da experiência.

- **Espaço de resultados** (Ω): o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Experiência aleatória

- **Exemplo**:

$\mathcal{A}$ – lançar um dado cúbico com as faces numeradas de 1 a 6 e observar o número da face voltada para cima

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\} \quad \#\Omega=6$$

$\mathcal{B}$ – lançar dois dados (distinguíveis)

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),...,(6,6)\} \quad \#\Omega=36$$

$\mathcal{C}$ – ensaiar uma lâmpada e observar o tempo (centenas de horas) que leva a fundir

$$\Omega=\{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}=[0,+\infty[$$

Acontecimento

- **Acontecimento**: é uma colecção de resultados possíveis – é um subconjunto do espaço de resultados.
  - Os acontecimentos são os objectos aos quais se atribui probabilidade
- O **acontecimento $A \subset \Omega$ realiza-se** se o resultado da experiência aleatória for um elemento de A
  - $\varnothing$ é o acontecimento impossível
  - Ω é o acontecimento certo

Acontecimentos

Exemplo (continuação) – Acontecimentos:

$\mathcal{A}$ – ocorre face par

$$A=\{2,4,6\}$$

$\mathcal{B}$ – ocorre soma par

$$B=\{(1,1),(1,3),...,(1,5),...,(6,6)\}$$

$\mathcal{C}$ – lâmpada funde em menos de 2400h

$$C=[0,24[$$

Álgebra de acontecimentos

- ***A* subacontecimento de *B***, $A \subset B$: a realização de A implica a realização de B.
- ***A* união com *B***, $A \cup B$: é o acontecimento que se realiza quando pelo menos um deles se realiza.
- ***A* intersecção com *B***, $A \cap B$: é o acontecimento que se realiza quando ambos se realizam.
- **Diferença entre *A* e *B***, $A - B$: é o acontecimento que se realiza quando A se realiza sem que se realize B $(A-B=A\cap\overline{B})$.
- **Complementar de *A***, $\overline{A}=\Omega-A$: é o acontecimento que se realiza quando A não se realiza.

Álgebra de acontecimentos: Propriedades

- **Comutativa:** $A\cup B=B\cup A\,;\quad A\cap B=B\cap A$
- **Associativa:** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
  $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- **Distributiva:** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
  $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- **Leis de De Morgan:** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\,;\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Acontecimentos mutuamente exclusivos

- A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos (ou incompatíveis) se e só se a realização de um implica a não realização do outro, isto é,

$$A\cap B=\varnothing$$

- **Exemplo** (continuação):

$\mathcal{A}$ – ocorre face par, A_1 $\quad A_1=\{2,4,6\}$

ocorre face ímpar, A_2 $\quad A_2=\{1,3,5\}$

Probabilidade

- Segundo **Laplace** (1812) – se numa experiência aleatória os resultados possíveis são igualmente prováveis, a probabilidade de um acontecimento A é

$$P(A)=\frac{n^o\ de\ \ resultados\ favoráveis\ a\ A}{n^o\ de\ \ resultados\ possíveis}$$

Exemplo (continuação) – Probabilidade de acontecimentos

$\mathcal{A}$ – ocorre face par $\quad A=\{2,4,6\} \rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Probabilidade

$\mathcal{B}$ – ocorre soma par B={(1,1),(1,3),...,(1,5),...,(6,6)}

dado 1 (colunas), dado 2 (linhas)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

C – lâmpada funde em menos de 2400h C=[0,24[

$$P(C)=?$$

Probabilidade frequencista

- **Conceito frequencista** (von Mises, 1919) – a probabilidade de um acontecimento é o limite da sua frequência relativa num grande número de experiências.

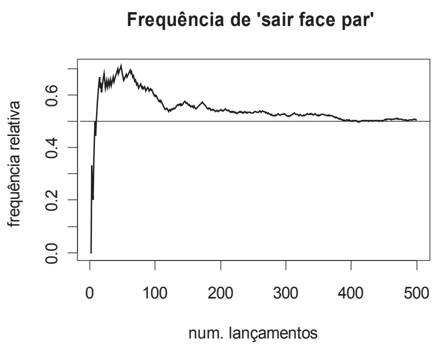
Exemplo (continuação) – Probabilidade de acontecimentos

$\mathcal{A}$ – ocorre face par A={2,4,6} $P(A)$ = ?

Lançar o dado "muitas" vezes, contar o número de vezes que ocorre A e calcular a frequência relativa de A.

Probabilidade frequencista

	res	freq
1	3	0.0000000
2	5	0.0000000
3	4	0.3333333
4	3	0.2500000
5	5	0.2000000
6	6	0.3333333
7	2	0.4285714
8	2	0.5000000
9	3	0.4444444
10	2	0.5000000
.	.	.
50	5	0.6800000
51	5	0.6666667
.	.	.
100	6	0.6000000
101	3	0.5940594
.	.	.



Probabilidade: formulação axiomática

- Kolmogorov, 1933
- **Probabilidade de um acontecimento A**, P(A): é um número real que verifica os axiomas
  - P(A) ≥ 0
  - P(Ω) = 1
  - P($A \cup B$) = P(A) + P(B) se A e B mutuamente exclusivos, i.e. se $A \cap B = \emptyset$

Destes axiomas decorrem as leis da probabilidade.

Leis básicas da probabilidade

A, B, C acontecimentos aleatórios

1) $P(\bar{A})=1-P(A)$
2) $P(\emptyset)=0$
3) $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$
4) $P(A)\leq 1$
5) $P(A-B)=P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$
6) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
7) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$
$+P(A\cap B\cap C)$

Leis básicas da probabilidade (Exemplo)

$\mathcal{B}$ – acontecimentos B_1={(1,1),(1,2),(2,1)}

B_2={(1,1),(2,2),(3,3)}

B_3={(1,1),(1,2),(1,3)}

P($B_1 \cup B_2 \cup B_3$) = P{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(1,3)}

=6/36

Utilizando a lei 7: P(B_1)=P(B_2)=P(B_2)=3/36,

P($B_1 \cap B_2$)=1/36, P($B_1 \cap B_3$)=2/36,...

Probabilidade condicional

- Probabilidade condicional de *A* dado *B* (ou "sabendo *B*" ou "se *B*") é

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

se $P(B)>0$.

Exemplo (continuação)

$\mathcal{A}$ – acontecimentos $A_1=\{2\}$ $\rightarrow P(A_1) = 1/6$

$A_2=\{2,4,6\}$ $\rightarrow P(A_2) = 1/2$

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_2)}=\frac{1/6}{1/2}=1/3$$

Probabilidade condicional

- Se $P(A)>0$ e $P(B)>0$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{e também} \quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Portanto:

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=P(B|A)\times P(A)$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\times P(A)}{P(B)} \quad \text{(Teorema de Bayes)}$$

(necessita regra de cálculo interessante para denominador)

Acontecimentos independentes

- Pode acontecer que o condicionamento seja irrelevante

Exemplo (continuação)

$\mathcal{A}$ – acontecimentos: $\{4,5\}$ $\rightarrow$ $P(\{4,5\}) = 1/3$

sair face par $\rightarrow$ *P*(*face par*) = 1/2

sair face ímpar $\rightarrow$ *P*(*face ímpar*) = 1/2

$$P(\{4,5\}|\,face\ par)=\frac{P(\{4\})}{P(\{2,4,6\})}=\frac{1/6}{1/2}=1/3$$

$$P(\{4,5\}|\,face\ ímpar)=\frac{P(\{5\})}{P(\{3,5,7\})}=\frac{1/6}{1/2}=1/3$$

Acontecimentos independentes

- O acontecimento {4,5} *é independente* de "sair face par" e também de "sair face ímpar".

A é independente de *B* se P(*A*|*B*) = P(*A*), P(*B*)>0,

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=P(A)\times P(B)$$

mas então P(*B*|*A*) = P(*B*), P(*A*)>0,
portanto *B* também é independente de *A*.

Definição: Os acontecimentos *A* e *B* são independentes sse $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Acontecimentos independentes

- Note-se que dois acontecimentos independentes não podem ser mutuamente exclusivos, a não ser que um deles tenha probabilidade nula (mostrar).

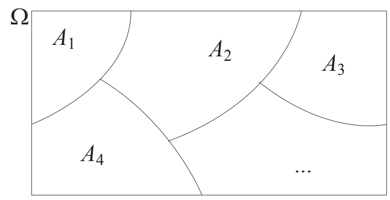
- A definição de independência pode ser alargada a qualquer conjunto de acontecimentos. Para *n* acontecimentos serem independentes não basta que sejam independentes 2 a 2.

  Definição: Os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 são independentes sse são <u>independentes 2 a 2</u> e

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)$$

Partição

- **Definição**: $A_1, A_2 \ldots, A_n$ constituem uma partição do espaço de resultados Ω sse
  - quaisquer dois acontecimentos A_i e A_j são mutuamente exclusivos e
  - $\Omega=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$



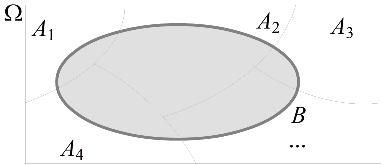
Partição

- Seja $A_1, A_2 \ldots, A_n$ uma partição do espaço de resultados Ω, com $P(A_k) > 0$ (k=1,...,n) e B um acontecimento de Ω.

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

$$\Rightarrow \; P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

$$\Leftrightarrow \; P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n)$$



Teorema da probabilidade total

Se os acontecimentos $A_1, A_2 \ldots, A_n$ constituem uma partição do espaço de resultados Ω, com $P(A_k)>0$ (k=1,...,n), então para qualquer acontecimento B de Ω tem-se

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)$$

Teorema de Bayes

- O Teorema de Bayes é uma consequência (*corolário*) do teorema da probabilidade total.
- **Teorema de Bayes**
  Se os acontecimentos $A_1, A_2 \ldots, A_n$ constituem uma partição do espaço de resultados Ω, com $P(A_k)>0$ (k=1,...,n), então para qualquer acontecimento B tal que $P(B) > 0$, tem-se

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}, \; k = 1, \ldots, n$$

Bibliografia

- Murteira, B., Ribeiro, C.S., Silva, J.A. e Pimenta C. (2010). Introdução à Estatística. Escolar Editora.
- Neves, M. (2009) Introdução à Estatística e Probabilidade. Apontamentos de apoio às aulas.
  - Teoria da Probabilidade: *www.isa.utl.pt/dm/estat/estat/seb2.pdf*
- Pestana, D.D. e Velosa, S.F. (2002) Introdução à Probabilidade e à Estatística, vol.I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.