



MECÂNICA DE FLUIDOS

Separação sólido-líquido



Separação sólido-líquido- I

- **Bases teóricas**
- **Sedimentação discreta**

Bibliografia:

- Svarovsky, L. 2000. *Solid liquid separation*, 4th edition. Butterworth Heinemann, Oxford;

1/40

Separação sólido-líquido

1. Introdução

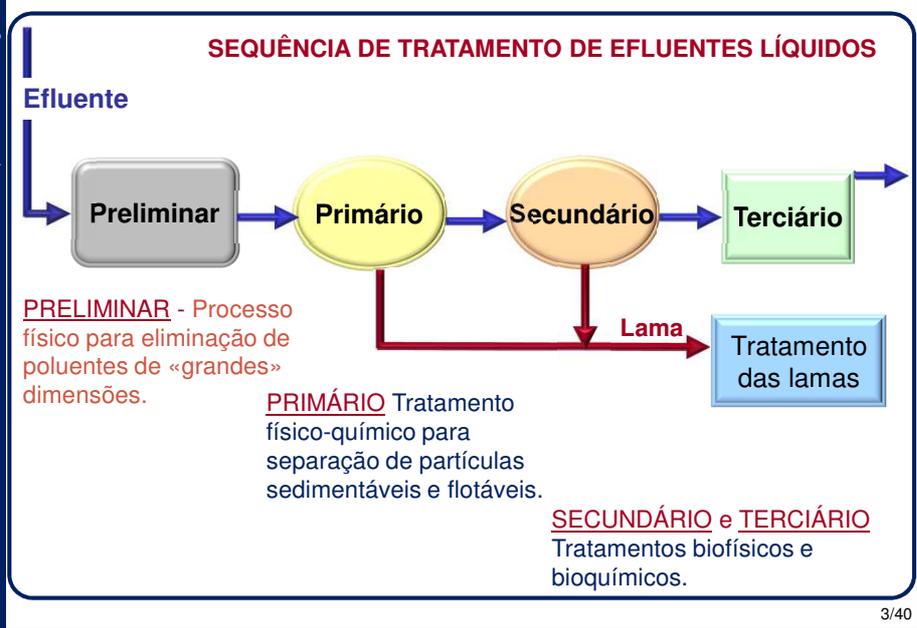
2. Movimento de partículas em fluidos em repouso

- Considerações gerais
- Sedimentação por gravidade em fluidos com baixas concentrações (partículas esféricas e não esféricas)
- Sedimentação por gravidade em fluidos muito concentrados
- Sedimentação com centrifugação
- Escolha do equipamento de separação

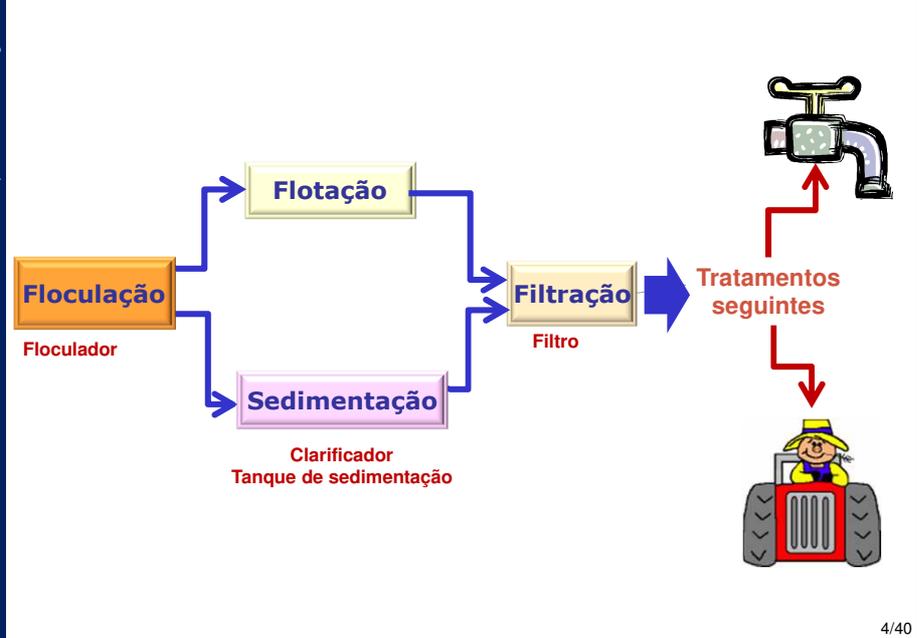
3. Aplicação prática da teoria da separação sólido líquido – os tanques de sedimentação

2/40

□ Introdução: enquadramento do estudo



Pré tratamento e Tratamento Primário: Separação sólido-líquido



□ Definição e objectivos da sedimentação de partículas em Eng.ª Ambiente

A **sedimentação** é o processo de separação sólido-líquido através do qual a suspensão é separada em duas fases :

- Sobrenadante clarificado;
- Depósito concentrado (lama) que pode ser facilmente manuseado.

Objectivos da sedimentação:

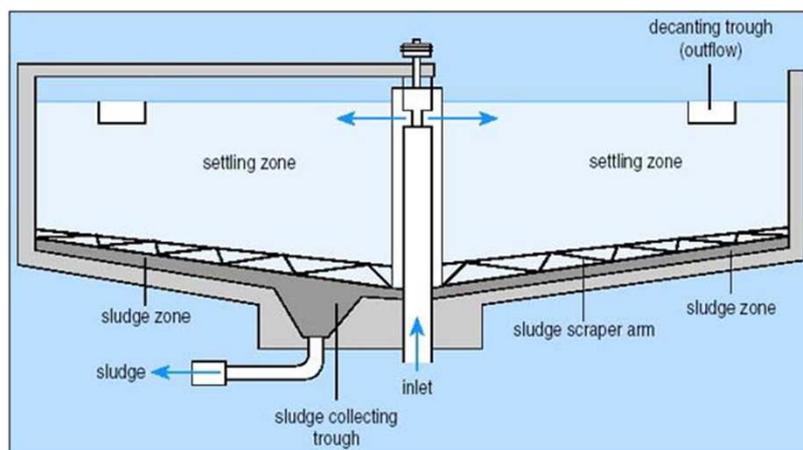
- remover as partículas mais grosseiras em suspensão;
- remover agregados de partículas floculadas ou coaguladas;
- remover partículas precipitadas após um tratamento químico;
- sedimentar as lamas.

Princípio da sedimentação :

- Os sólidos em suspensão apresentam massa volúmica maior que a da água e portanto tendem a sedimentar por acção da força gravítica;

5/40

Equipamento utilizado para a realização do processo de separação: tanque de sedimentação



6/40

❑ Tipos de sedimentação

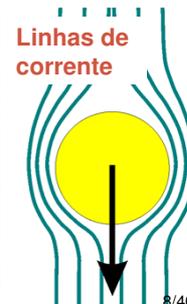
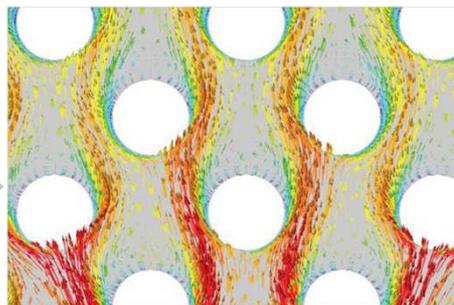
- **Sedimentação discreta (tipo 1)**, em fluido pouco concentrado: as partículas sedimentam individualmente sem interagir com as partículas vizinhas;
- **Sedimentação de partículas floculadas (Tipo 2)**: a floculação origina um aumento de massa das partículas, que deste modo sedimentam mais rapidamente;
- **Sedimentação retardada (Tipo 3)**: em fluidos muito concentrados a massa das partículas tende a sedimentar como uma unidade, onde as partículas mantêm a sua posição relativa.

❑ Considerações gerais sobre o movimento de partículas em fluidos em repouso

Quando uma partícula se move no interior de um fluido, este exerce sobre ela uma força que se opõe ao movimento, denominada de força de arrastamento viscoso, F_v

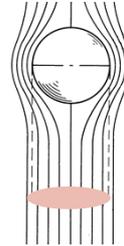
O conhecimento desta força é fundamental quando se pretende estudar o movimento de partículas dentro de fluidos, nomeadamente o fenómeno físico da sedimentação.

Resistência oposta por um líquido ao movimento de um sólido esférico



De acordo com a **Lei de Newton**, a forma convencional para se expressar a força de arrastamento viscoso, F_v (N) é:

$$F_v = C_v A_p \frac{\rho_w u_p^2}{2}$$



Onde:

u_p é a *velocidade* da partícula dentro do fluido ($m s^{-1}$);

A_p é a *área da partícula projectada* na direcção do movimento (m^2);

C_v é um *coeficiente de proporcionalidade* adimensional, coeficiente de arrastamento;

ρ_w é a *massa volúmica* do fluido ($kg m^{-3}$).

Nota Importante: F_v aumenta com o quadrado da velocidade (relembrar o que acontece no escoamento sob pressão)

A análise dimensional mostra que, de um modo geral, o coeficiente de arrastamento viscoso, C_v é função do número de Reynolds da partícula, \mathcal{R}_{ep}

$$C_v = f(\mathcal{R}_{ep})$$

$$\mathcal{R}_{ep} = \frac{u_p X_p \rho_w}{\mu} = \frac{u_p X_p}{\nu}$$

Sendo:

X_p a forma da partícula;

μ a viscosidade dinâmica ($N s m^{-2}$)

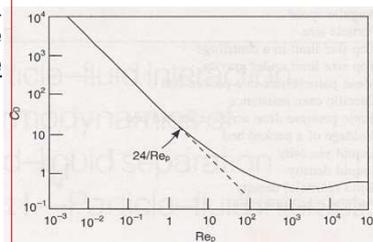
ν a viscosidade cinemática ($m^2 s^{-1}$)

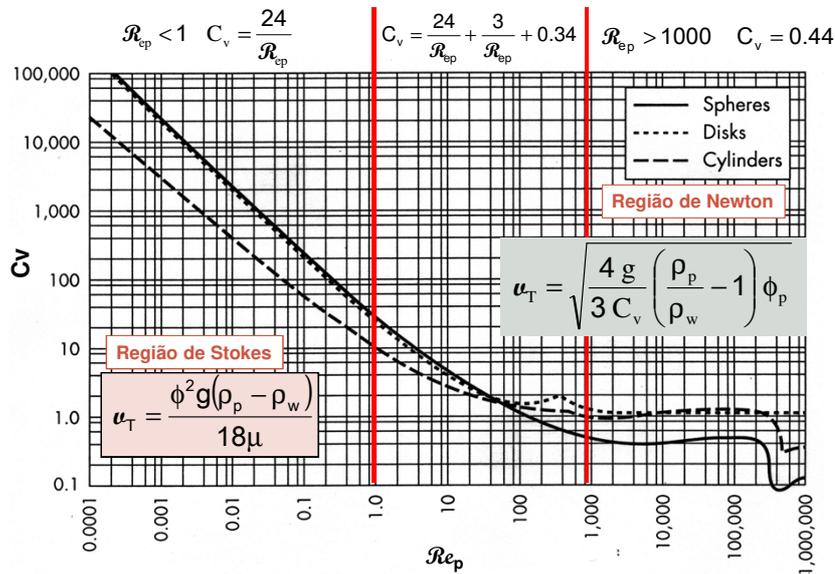
A forma da função depende do regime de escoamento (laminar ou turbulento)

Para baixos valores de \mathcal{R}_{ep} , C_v e F_v podem ser determinados de forma teórica a partir das equações de **Navier-Stokes** e a sua solução é conhecida pela **Lei de Stokes**:

$$F_v = 3 \pi \mu u_p X$$

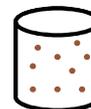
$$C_v = \frac{24}{\mathcal{R}_{ep}} \quad (\mathcal{R}_{ep} < 1)$$





□ Sedimentação por gravidade em fluidos com baixas concentrações (sedimentação discreta)

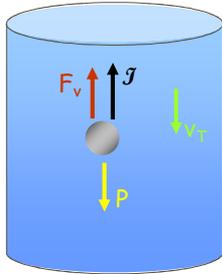
- Caracterização do meio
 - Concentração de m.s. < 0.5 % volume;
 - A dimensão, a forma e a massa volúmica das partículas não se altera com o tempo;
 - Diâmetro das partículas > 5 μ m.



- Exemplos de partículas com comportamento discreto:
 - Areia, saibro (mistura de partículas abrasivas)
- Aplicação:
 - Pré-sedimentação das águas residuais para remoção das areias antes da floculação ou coagulação

➤ Teoria da sedimentação discreta

As forças que actuam sobre uma *partícula individual movimentando-se por gravidade* num fluido em repouso são:



- ✓ Força da gravidade, \mathcal{P} ;
- ✓ Impulsão, \mathcal{J} e
- ✓ Força de arrastamento viscoso, \mathcal{F}_v .

Verifica-se que o movimento da partícula dentro do fluido divide-se em duas fases:

- (1) Movimento uniformemente acelerado e;
- (2) Movimento uniforme

1ª fase do movimento, velocidade crescente:

2ª lei de Newton: $\vec{P} + \vec{F}_v + \vec{J} = m\vec{a}$

$\Rightarrow P = m g$

$\Rightarrow \mathcal{J} = \nabla_p \rho_w g = \frac{m}{\rho_p} \rho_w g = m \frac{\rho_w}{\rho_p} g$

$P - F_v - \mathcal{J} = m a \Leftrightarrow m g - m \frac{\rho_w}{\rho_p} g - F_v = m \frac{\partial u_p}{\partial t}$

~~$m g - m \frac{\rho_w}{\rho_s} g - \frac{F_v}{m} = m \frac{\partial u_p}{\partial t}$~~

Para regime laminar, e partículas de forma esférica, F_v é dada por:

$F_v = 3 \pi \mu u_p \phi_p \leftarrow$ **Lei de Stokes**

$g - \frac{\rho_w}{\rho_s} g - \frac{3 \pi \mu u_p \phi_p}{m} = \frac{\partial u_p}{\partial t}$

$\frac{m}{3 \pi \mu \phi_p} = \tau$ τ é o tempo que a partícula demora a atingir a velocidade terminal, u_T

$$g - \frac{\rho_w}{\rho_s} g - \frac{u_p}{\tau} = \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad g \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_s} \right) - \frac{u_p}{\tau} = \frac{\partial u_p}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \quad g \left(\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} \right) - \frac{u_p}{\tau} = \frac{\partial u_p}{\partial t}$$

Resolvendo a equação obtém-se:
$$u(t) = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} \tau g \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Esta equação dá-nos a velocidade de sedimentação da partícula ao longo do tempo.

Equação exponencial que, com o aumento de t, se aproxima de:

$$u_T = \left(\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} \right) \tau g$$

Onde u_T é a **velocidade terminal de sedimentação sob acção da gravidade**
(quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow u \approx u_T$)

Mostra-se que a velocidade terminal, para o caso de partículas muito pequenas, é atingida tão depressa, que em casos práticos de engenharia, a **sedimentação é calculada a velocidade constante (u_T) e o período de aceleração é desprezado.**

Eliminando o termo τ :

$$u_T = \frac{\phi_p^2 (\rho_s - \rho_w) g}{18 \mu}$$

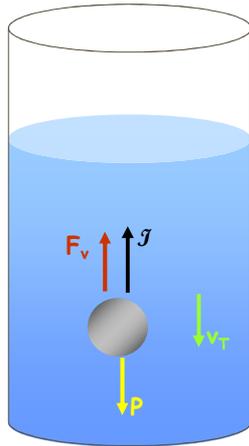
Equação de Stokes (1945) para a velocidade terminal de partículas esféricas que caem em regime laminar ($Re < 1$)

Condições de idealidade da equação de Stokes:

- Partículas de forma esférica (ou F_F);
- Ausência de interações entre as partículas => concentrações < 0.5% volume;
- Dimensões das partículas sólidas maiores que as dimensões das moléculas do meio envolvente;
- Diâmetro das partículas maiores de que 1-5 μm ;
- Ausência de distúrbios causados pelas correntes de convecção;

2ª fase do movimento – velocidade constante

A velocidade do objecto aumenta ao longo do tempo => a força de arrastamento viscoso aumenta com o quadrado da velocidade.



Como F_v aumenta com a velocidade, a aceleração resultante vai diminuindo até se anular.

$$P - F_v - J = ma$$

Nesse momento atinge-se a velocidade terminal.

Portanto, para a situação representada, a velocidade terminal, V_T é atingida quando:

$$P - F_v - J = 0$$

$$P - F_v - J = 0$$

$$mg - \nabla_p \rho_w g - F_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_v = mg - \nabla_p \rho_w g$$

$$\Leftrightarrow \quad F_v = g \nabla_p (\rho_p - \rho_w)$$

Para partículas esféricas: $\nabla_p = \frac{4}{3} \pi r^3$

Substituindo na eq. anterior $F_v = g \frac{4}{3} \pi r_p^3 (\rho_p - \rho_w)$

Igualando à equação geral de Newton: $F_v = C_v A_p \frac{\rho_w u_p^2}{2}$

$$g \frac{4}{3} \pi r_p^3 (\rho_p - \rho_w) = C_v A_p \frac{\rho_w u_p^2}{2}$$

Resolvendo em ordem à velocidade da partícula, v_p :

$$v_p^2 = \frac{g \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_p - \rho_w) 2}{C_v \pi r^2 \rho_w} \Leftrightarrow v_p = \sqrt{\frac{4 g}{3 C_v} \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p} = v_T$$

↑
Equação de Newton (1687) para a velocidade terminal de sedimentação

v_T é a **velocidade terminal da partícula** – velocidade máxima, atingida quando as forças que actuam sobre a partícula se equilibram.

Para partículas não esféricas, a equação é corrigida por aplicação de um **factor de forma F_F** . Este aspecto é mais importante quando estudarmos a sedimentação não de partículas individuais mas floculadas.

❖ **Como obter o coeficiente de arrastamento viscoso, C_v ?**

O valor de C_v depende do regime de escoamento em redor da partícula

$\mathcal{R}_{ep} < 1 \Rightarrow$ regime laminar (*região de Stokes*)

$\mathcal{R}_{ep} > 1000 \Rightarrow$ regime turbulento (*região de Newton*)

Embora a forma da partícula afecte o C_v , para partículas de formas aproximadamente esféricas ele é dado por:

$$C_v = \frac{24}{\mathcal{R}_{ep}} + \frac{3}{\mathcal{R}_{ep}^{1/2}} + 0.34$$

Sendo o \mathcal{R}_{ep} para partículas em sedimentação dado por:

$$\mathcal{R}_{ep} = \frac{v_p \phi_p \rho_w}{\mu} = \frac{v_p \phi_p}{\nu}$$

(A) Sedimentação no Regime laminar (região de Stokes) $Re_p < 1$:

Nesta região a acção da força associada à viscosidade predomina e portanto

Substituindo na equação geral (Newton) da u_t ← $C_v = \frac{24}{Re_p}$

Impondo $Re_p = 1$, obtemos o ϕ máximo de aplicação da Eq S

$u_T = \frac{g (\rho_p - \rho_w) \phi_p^2}{18 \mu}$

$$\phi_{max} = \left(\frac{3.6 \mu^2}{(\rho_p - \rho_w) \rho_w g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Lei de Stokes

A força de arrastamento para *partículas esféricas em regime laminar* é dada por:

$$F_v = 3 \pi \mu u_p \phi_p$$

Sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido ($N \cdot s \cdot m^{-2}$), ϕ_p o diâmetro da partícula (m), e u_p a sua velocidade ($m \cdot s^{-1}$)

(B) Sedimentação no Regime turbulento (região de Newton), $Re_p > 1000$:

Nesta região as forças de inércia apresentam preponderância em relação às de viscosidade, portanto:

$$C_v = \frac{24}{Re_p} + \frac{3}{Re_p^{1/2}} + 0.34$$

$$F_v = 0.055 \pi \mu u_p^2 \phi_p^2$$

minimização do termo

Considerando-se geralmente que $C_v \approx 0.44$

Substituindo na equação da velocidade, vem:

$$u_T = \sqrt{3.33 g \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p}$$

(c) Sedimentação no Regime de transição $0.2 < Re_p < 500-1000$:

Na região entre $Re_p = 1$ e $500-1000$, denominada de região de transição, C_v é descrito por:

$$C_v = \frac{24}{Re_p} + \frac{3}{Re_p^{1/2}} + 0.34$$

$$u_T = \sqrt{\frac{4g}{3C_v} \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p}$$

$$F_v = 3 \pi \mu u_p \phi_p (1 + 0.15 Re_p^{0.687})$$

Resumo (partículas esféricas)

Rg	u_T	F_v	C_v
Laminar	$\frac{g(\rho_p - \rho_w)\phi_p^2}{18\mu}$	$F_v = 3\pi\mu u_p \phi_p$	$C_v = \frac{24}{Re_p}$
Transição	$\sqrt{\frac{4g}{3C_v} \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p}$	$F_v = 3\pi\mu u_p \phi_p \cdot (1 + 0.15 Re_p^{0.687})$	$C_v = \frac{24}{Re_p} + \frac{3}{Re_p^{1/2}} + 0.34$
Turbulento	$\sqrt{3.33g \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p}$	$F_v = 0.055 \pi \mu u_p^2 \phi_p^2$	$C_v \approx 0.44$

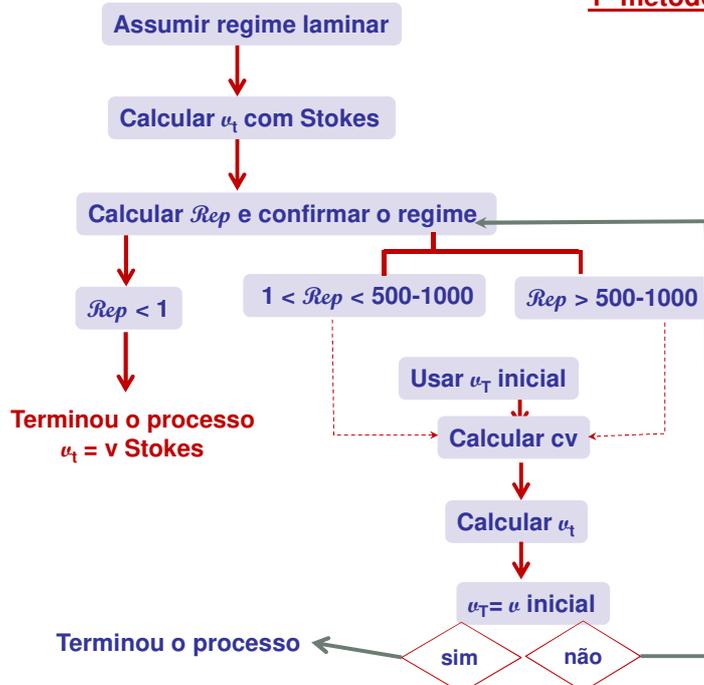
➤ Determinação de velocidade de sedimentação/diâmetro da partícula quando o regime da partícula é desconhecido

Há dois métodos:

- ❑ Processo iterativo
- ❑ Processo que recorre a funções adimensionais em relação à u_t e ao ϕ



1º método: Iterativo



Exemplo

Determine a velocidade terminal de sedimentação para uma partícula com um diâmetro de 0.5 mm e massa volúmica de 2650 kg m⁻³. A água está a 20°C ($\nu = 1.003 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Ao fim de quanto tempo esta partícula atingirá o fundo de um tanque de sedimentação com a profundidade de 3 m?

- (1) Determinar a velocidade de sedimentação com recurso à lei de Stokes (consideração de regime laminar)

$$u_T = \frac{g (\rho_p - \rho_w) d_p^2}{18 \mu} = \frac{9.8 (2650 - 1000) (0.0005)^2}{18 \times 1000 \times 1.003 \times 10^{-6}} = 0.2239 \text{ m s}^{-1}$$

- (2) Verificar, se com esta velocidade ocorre regime laminar (verificar Re):

$$R_e = \frac{u_p \phi_p \rho_w}{\mu} = \frac{0.2239 \times 0.0005 \times 1000}{1000 \times 1.003 \times 10^{-6}} = 111.6 > 0.2, \text{ o regime não é laminar}$$

Encontramo-nos na região de **regime de transição** => **resolução iterativa**, com recurso à **equação de Newton** para a velocidade terminal de sedimentação

$$v_T = \sqrt{\frac{4g}{3C_v} \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p}$$

27/40

- (3) Cálculo do coeficiente de arrastamento viscoso (assumindo por exemplo uma velocidade igual à que resultou da aplicação da lei de Stokes – regime laminar)

$$C_v = \frac{24}{R_e} + \frac{3}{\sqrt{R_e}} + 0.34 = \frac{24}{111.6} + \frac{3}{\sqrt{111.6}} + 0.34 = 0.8389$$

- (4) Cálculo da velocidade dada pela equação de Newton - regime de transição

$$v_T = \sqrt{\frac{4g}{3C_v} \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p} = \sqrt{\frac{4 \times 9.8}{3 \times 0.8389} \left(\frac{2650}{1000} - 1 \right) \times 0.5 \times 10^{-3}} = 0.1134 \text{ m s}^{-1}$$

0.1134 \neq 0.2238 \Rightarrow nova iteração

- (5) Assumir velocidade mais baixa (0.1134) e calcular tudo de novo até que a velocidade utilizada para calcular o R_{ep} seja igual à que resulta da aplicação da equação de Newton

(continuar ...)

Solução : $u_t = 0.09 \text{ m s}^{-1}$

28/40

2º método : *Método de Heywood* – utiliza grandezas independentes de u_T e de ϕ

(i) Determinação de *velocidade de sedimentação* quando o regime da partícula é desconhecido

$$v_T = \sqrt{\frac{4g}{3C_v} \left(\frac{\rho_p}{\rho_w} - 1 \right) \phi_p} \Leftrightarrow C_v = \frac{4g(\rho_p - \rho_w)\phi_p}{3\rho_w v^2}$$

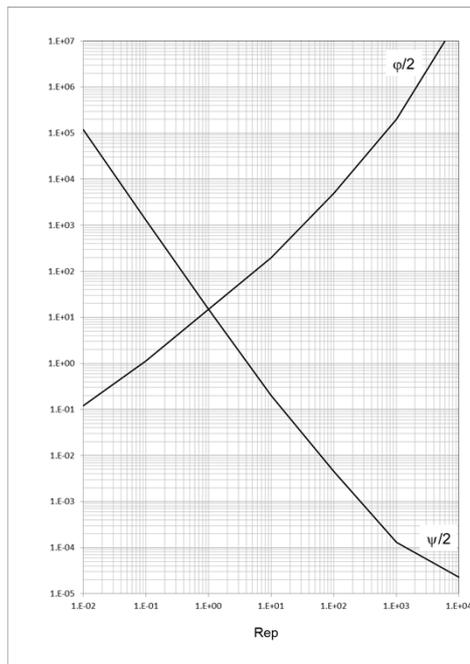
Multiplicamos C_v por \mathcal{R}_{ep}^2 $\phi = \mathcal{R}_{ep}^2 \times C_v = \frac{4g(\rho_p - \rho_w)\rho_w \phi^3}{3\mu^2} = \frac{4}{3} Ga$

Heywood publicou resultados $\log(\phi/2)$ versus $\log(\mathcal{R}_{ep})$

(ii) Determinação do *diâmetro da partícula* quando o regime da partícula é desconhecido

Dividir C_v por \mathcal{R}_{ep} $\psi = \frac{C_v}{\mathcal{R}_{ep}} = \frac{4g(\rho_p - \rho_w)\mu}{3\rho_w^2 u_T^3}$

Heywood publicou resultados $\log(\psi/2)$ versus $\log(\mathcal{R}_{ep})$



Ábaco de Heywood

Resumo do método de Heywood para esferas

- Quando se desconhece v_T , calcula-se $\phi/2$

$$\phi = \frac{4 g (\rho_p - \rho_w) \rho_w \phi^3}{3 \mu^2}$$

- Quando se desconhece o ϕ , calcula-se $\psi/2$

$$\psi = \frac{4 g (\rho_p - \rho_w) \mu}{3 \rho_w^2 v_T^3}$$



Ábaco ou tabelas de Heywood

(o mesmo exemplo) Determine a velocidade terminal de sedimentação para uma partícula com um diâmetro de 0.5 mm e massa volúmica de 2650 kg m⁻³. A água está a 20°C ($\nu = 1.003 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Ao fim de quanto tempo esta partícula atingirá o fundo de um tanque de sedimentação com a profundidade de 3 m?

$$\phi = \frac{4 g (\rho_p - \rho_w) \rho_w \phi^3}{3 \mu^2} = 2678.9$$

ábaco

$$\frac{\phi}{2} = 1339.46 \Rightarrow Re_p = 45 \quad (\text{regime de transição})$$

$$C_v = \frac{24}{45} + \frac{3}{\sqrt{45}} + 0.34 = 1.32$$

$$v_T = \sqrt{\frac{4 \times 9.8}{3 \times 1.32} \left(\frac{2650}{1000} - 1 \right) \times 0.5 \times 10^{-3}} = 0.09 \text{ m s}^{-1}$$

❑ O caso das partículas não esféricas

1) Método de Heywood modificado

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{F_F 4 g (\rho_p - \rho_w) \rho_w D^3}{\pi \mu^2} \qquad \frac{\psi}{2} = \frac{4 F_F g \rho_p - \rho_w \mu}{\pi \rho_w^2 u_T^3}$$

F_F = factor de forma

- ❖ Como obter o Factor de forma, F_F (a aplicar a partículas ou agregados de partículas de forma não esférica)

Factor de Heywood - Factor de forma em Volume

H. definiu um diâmetro projectado médio da partícula, como sendo o diâmetro D de um círculo com a mesma área que a partícula quando observada de cima a cair na sua posição mais estável.

Exemplo: flocos de forma cilíndrica

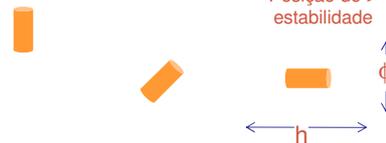
$h = 1 \text{ cm}$; $\phi = 0.6 \text{ cm}$

$$A_p = 1 \times 0.6 = 0.6 \text{ cm}^2 = A_{\text{circ}}$$

$$0.6 = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$D_{\text{circ}} = 0.87$$

← Diâmetro equivalente



O factor de forma F_F calcula-se por

$$F_F = \frac{V_p}{D_{\text{circ}}^3}$$

Onde

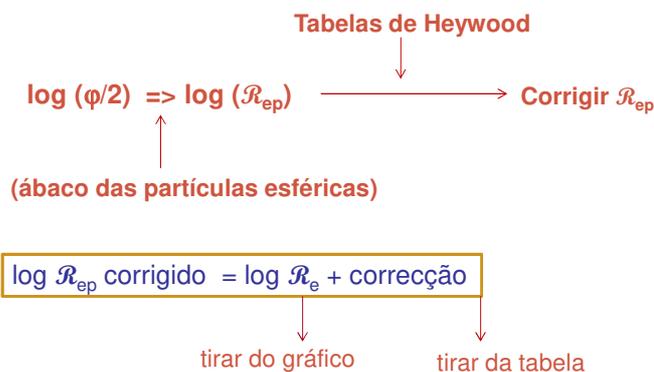
V_p representa o volume da partícula (m^3) e

D_{circ} representa o diâmetro de uma circunferência com área projectada igual à da partícula quando esta está na posição de maior equilíbrio (m)

Continuação do exemplo do slide anterior

$$F_F = \frac{\pi 0.3^2 \times 1}{0.87} = 0.32$$

Para a maioria das partículas minerais o factor de forma situa-se entre 0.2 e 0.5



Resumo:

- Calcular o factor de forma em volume, F_F ;
- Calcular os parâmetros adimensionais $\phi/2$, $\psi/2$, consoante se pretenda saber a velocidade ou o diâmetro;
- Estimar o \mathcal{R}_{ep} pelos dados de Heywood para esferas;
- Consultar as tabelas de correcção de Heywood para partículas não esféricas e determinar o \mathcal{R}_{ep} corrigido;
- Calcular C_v ou ϕ .

Tabelas de Heywood para partículas não esféricas (exemplo)

a) Para correcção ao log R_{ep} em função de log $(\varphi/2)$ (Quadro 4.4 de Coulson II, pg 166)

Log $(\varphi/2)$	$F_F = 0.4$	$F_F = 0.3$	$F_F = 0.2$	$F_F = 0.1$
-2.0	-0.022	-0.002	0.032	0.131
-1.0	-0.023	-0.003	0.030	0.131
0.0	-0.025	-0.005	0.026	0.129
1.0	-0.027	-0.010	0.021	0.122
2.0	-0.031	-0.016	0.012	0.111
2.5	-0.033	-0.020	0.000	0.080
3.0	-0.038	-0.032	-0.022	0.025
3.5	-0.051	-0.052	-0.056	-0.040
4.0	-0.068	-0.074	-0.089	-0.098
4.5	-0.083	-0.093	-0.114	-0.146
5.0	-0.097	-0.110	-0.135	-0.186
5.5	-0.109	-0.125	-0.154	-0.224
6.0	-0.120	-0.134	-0.172	-0.255

Conclusões:

O tempo de aceleração necessário para que se atinja a velocidade terminal é muito pequeno, pelo que é desprezável em termos práticos, *trabalhando-se apenas com velocidade constante = u_T* .

Nos problemas de separação sólido-líquido, a maior preocupação diz respeito às partículas de menor dimensão, que são as mais difíceis de separar. Isto significa que o R_{ep} é baixo, devido aos baixos valores da dimensão da partícula e das velocidades e, portanto apenas a região de Stokes deve ser considerada.

Existe, num entanto, um valor limite para o tamanho das partículas (geralmente 1-5 μm), *abaixo do qual a lei de Stokes não se aplica no estudo do processo de sedimentação*. Isto deve-se ao efeito do processo de difusão (processo Browniano), que origina tempos de sedimentação inferiores aos calculados pela lei de Stokes. A difusão origina velocidades de sedimentação inferiores aos preditos pela Lei de Stokes.

Correcções à velocidade terminal ou velocidade limite de queda

❑ *Efeito de parede do recipiente*

o volume de fluido não pode ser considerado infinito => deve considerar-se o retardamento que as paredes do recipiente exercem sobre a vT da partícula

$$u_{T\text{corrigida}} = u_T \times e_R \quad \text{Sendo } e_R \text{ é o factor de correcção}$$

➔ Regime Laminar: $e_R = \left[1 - \frac{\phi_P}{\phi_R}\right]^{2.25}$ expressões de Francis-Monroe

➔ Regime Turbulento: $e_R = 1 - \left(\frac{\phi_P}{\phi_R}\right)^{1.5}$

➔ expressão de Ladenberg: $e_R = \left[1 + 2.4 \frac{\phi_P}{\phi_R}\right]^{-1}$ quando $\frac{\phi_P}{\phi_R} \approx 1$

Correcções à velocidade terminal ou velocidade limite de queda

❑ *Efeito de fundo do recipiente*

Quando a partícula se aproxima do fundo do recipiente, a sua vT é diminuída

$$u_{T\text{corrigida}} = u_T \times e_R \quad \text{Sendo } e_R \text{ é o factor de correcção}$$

➔ expressão de Ladenberg: $e_R = \left[1 + 1.7 \frac{\phi_P}{L'}\right]^{-1}$

❑ *Efeito de escorregamento*

Quando o ϕ da partícula não é significativamente maior do que as moléculas que constituem o fluido, a partícula pode escorregar entre as moléculas e ter uma u_t maior. Verifica-se para $\phi_p < 0.1 \mu\text{m}$

$$e_R = \left[1 + \frac{J\lambda}{\phi_P}\right] \quad \text{Onde: } J = 1.764 + 0.562 \exp\left(\frac{-0.785 \phi_P}{\lambda}\right)$$

λ é o percurso médio

Correcções à velocidade terminal ou velocidade limite de queda

- *Partículas não rígidas: gotas e bolhas*

Consideração dos efeitos de circulação interna, deformação e oscilação

$$u_{\text{Tcorrigida}} = u_{\text{T}} \times e_{\text{R}} \quad \text{Sendo } e_{\text{R}} \text{ é o factor de correcção}$$

- ▶ factor de correcção de Hadamard:

$$e_{\text{R}} = \frac{3\mu + 3\mu_1}{2\mu + 3\mu_1}$$

Onde μ é a viscosidade de fluido onde cai a gota/bolha
 μ_1 é a viscosidade do fluido que forma a gota/bolha



Válida para tensões superficiais baixas